

ポアンカレ予想



トポロジー(位相幾何学)の未解決問題
ポアンカレ予想(1904年)

**「単連結な三次元閉多様体は
三次元球面と同相といえるか？」**

2007年10月22日 NHK
100年の難問はなぜ解けたのか
～天才数学者 失踪の謎～

宇宙に果てはあるのか？宇宙は一体どんな形なのか？
人類が長年、問い続けてきた謎に大きく迫るヒントが去年見つかった。
百年もの間、誰も解けなかった数学の難問「ポアンカレ予想」が証明
され、宇宙がとりうる複数の形が初めて明らかになったのだ。

世紀の難問を解いたのはロシアの数学者
グリゴリ・ペレルマン(41)。その功績により、
数学界最高の栄誉とされるフィールズ賞の
受賞が決まったが、彼は受賞を拒否し、数
学の表舞台から消え去ってしまった。



7つのミレニアム問題の一つ

2000年 100万ドルの懸賞

- P NP予想
- ホッジ予想
- ポアンカレ予想 グレゴリー・ペレルマンにより解決
- リーマン予想
- ヤン-ミルズ方程式と質量ギャップ問題
- ナビエ-ストークス方程式の解の存在と滑らかさ
- バーチ・スウィンナートン = ダイアー予想

私の子供の頃(1964生まれ)の 未解決問題

四色問題 平面上の地図は4色で塗り分けられる
1976年解決

フェルマー予想(フェルマーの最終定理)

$n \geq 3$ のとき(n :整数)、

$$x^n + y^n = z^n$$

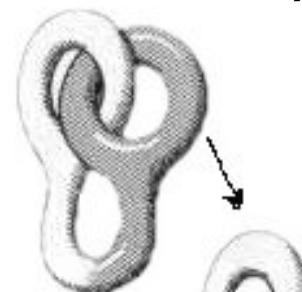
を満たす3つの正の整数(x, y, z)の組は存在しない。

1994年解決

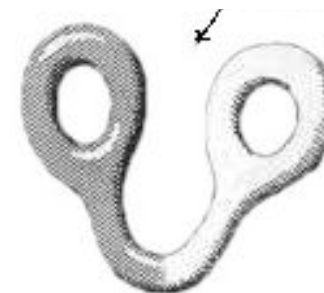
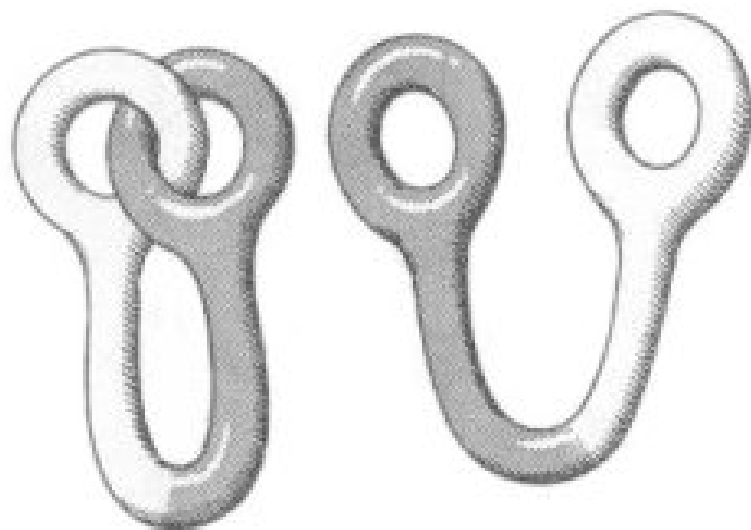
解決までに300年以上

トポロジー (位相幾何学とは)

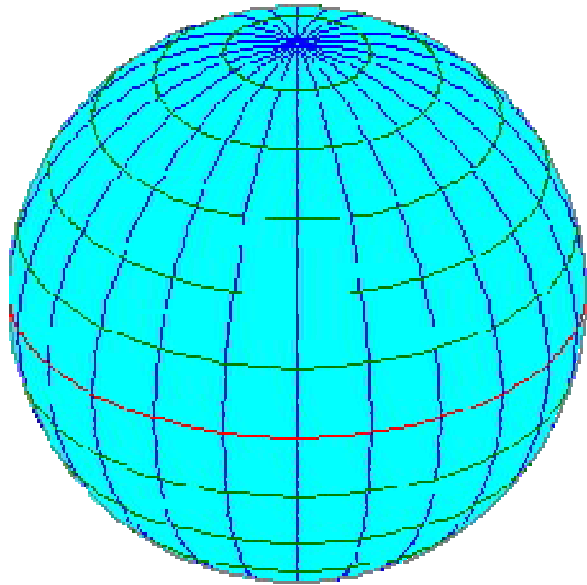
連続的な変形で
移り変わる図形は同一



考えてください

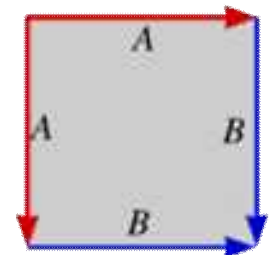
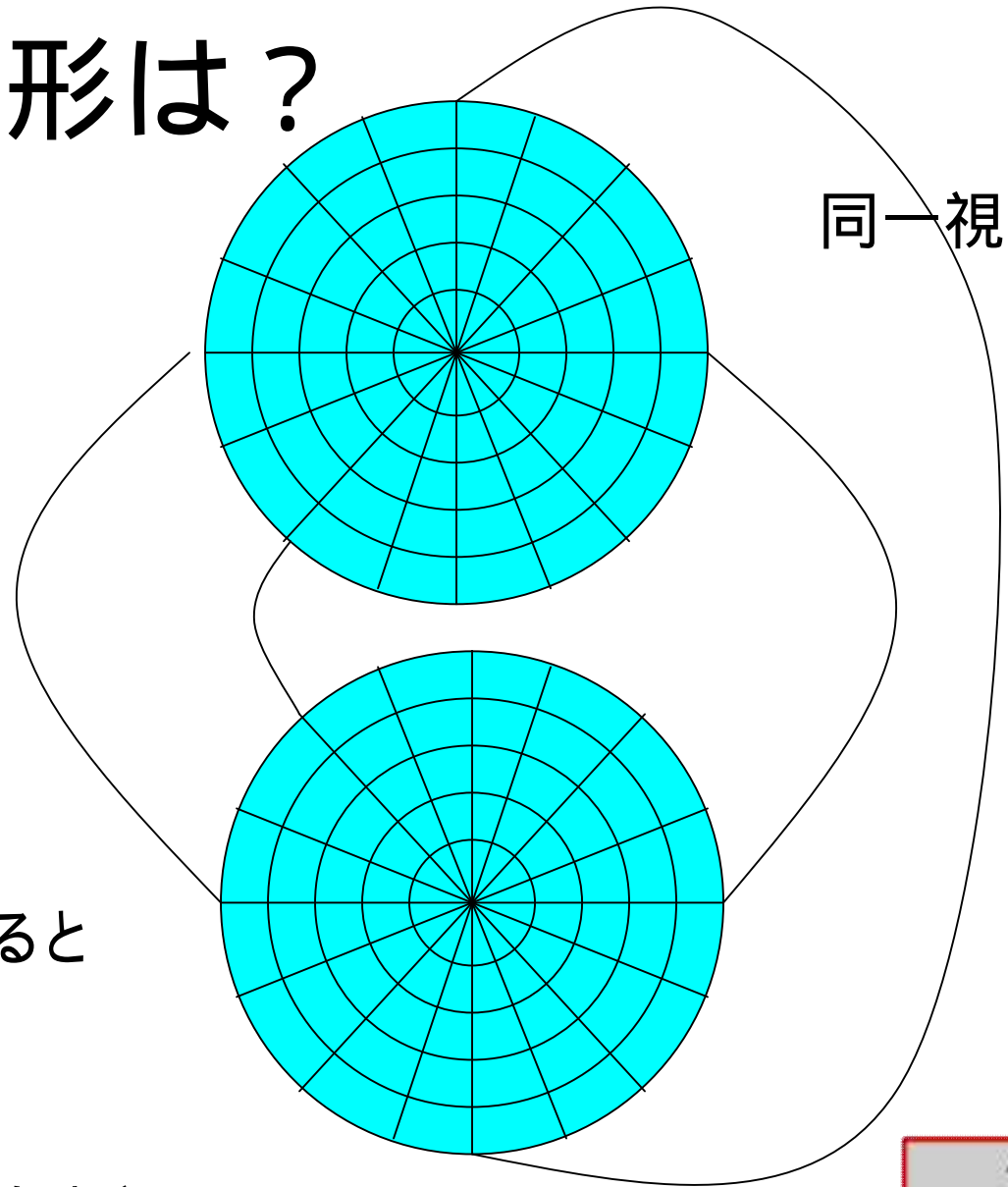


世界(地球)の形は？

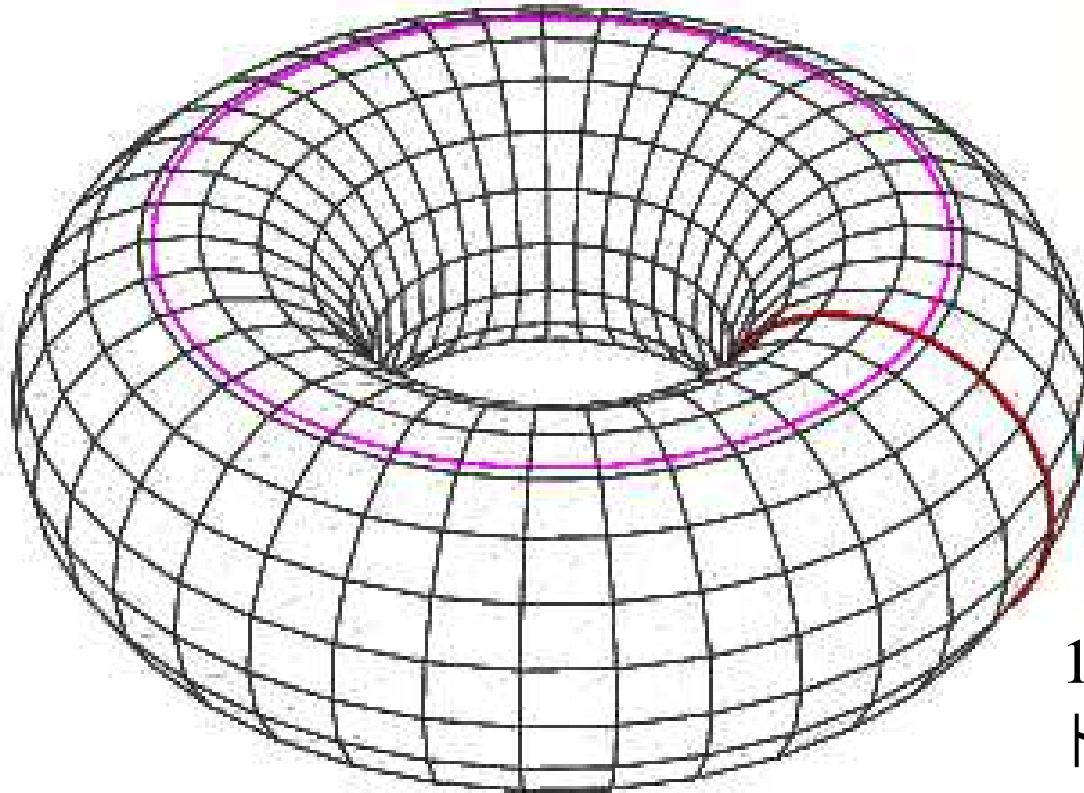
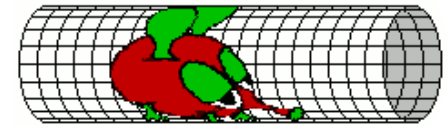
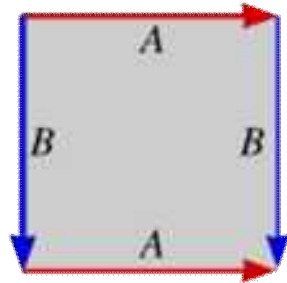


2つの円を貼り合わせると
2次元球面

1周をして出発点に戻ったとき、
2次元球面と言えるか？



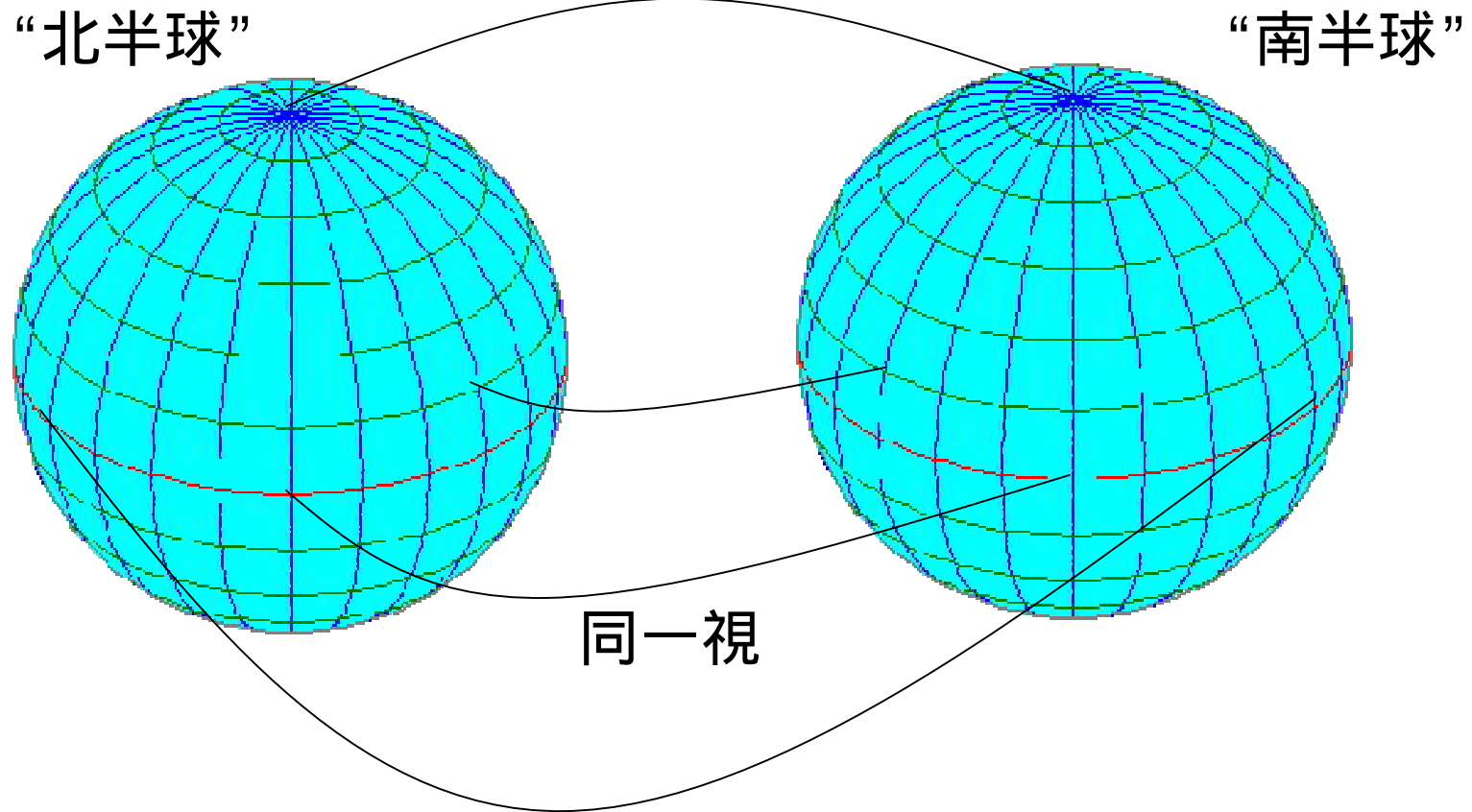
ト - ラス



1周して戻るのは
トーラスでも可能

宇宙の構造は？

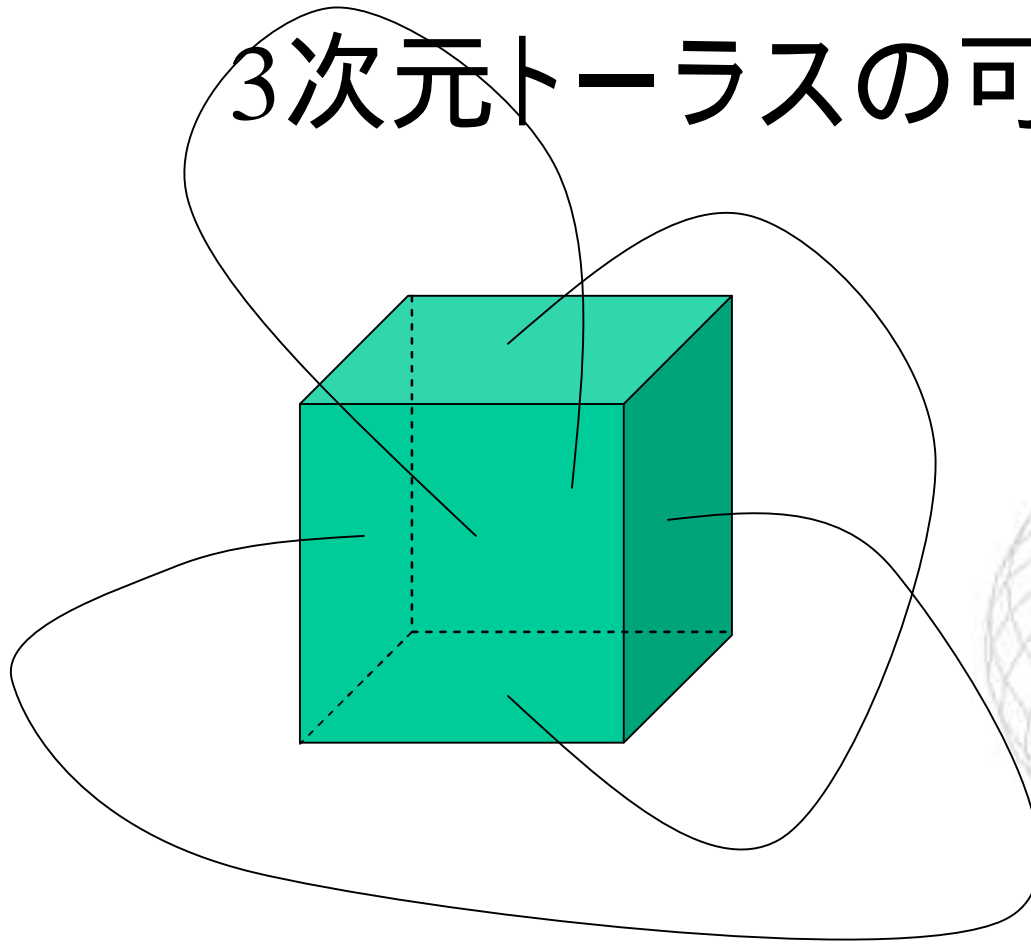
3次元球面



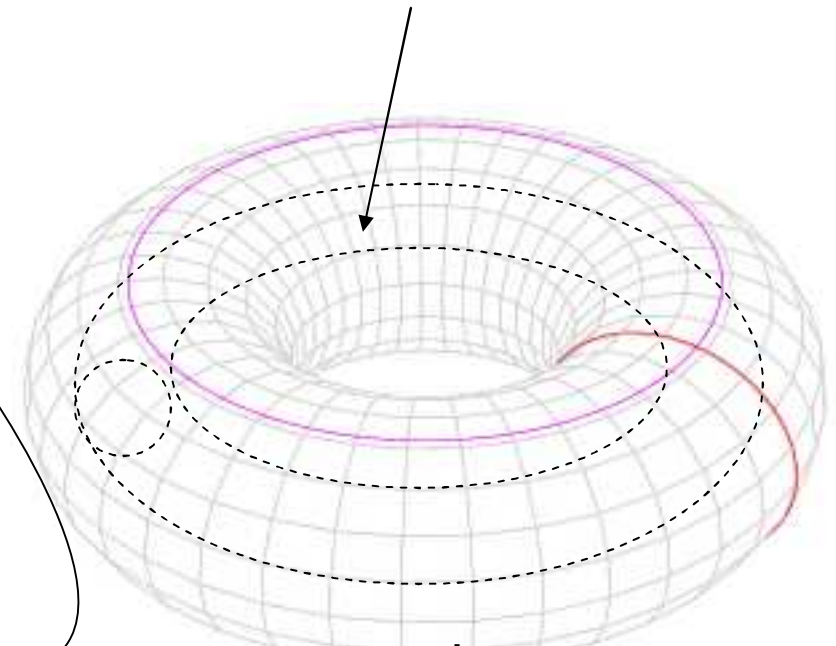
2つの球体を貼り合わせる 球体の表面が“赤道面”

まっすぐに進んで出発点に戻ったとき、3次元球面と言えるか？

3次元トーラスの可能性もある



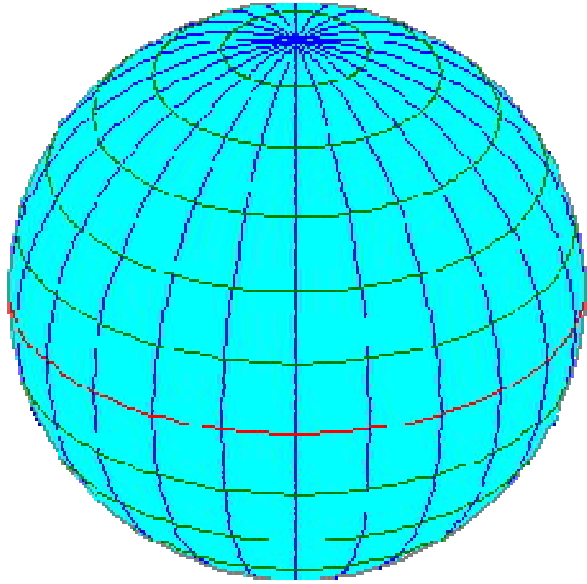
空洞の開いたドーナツ



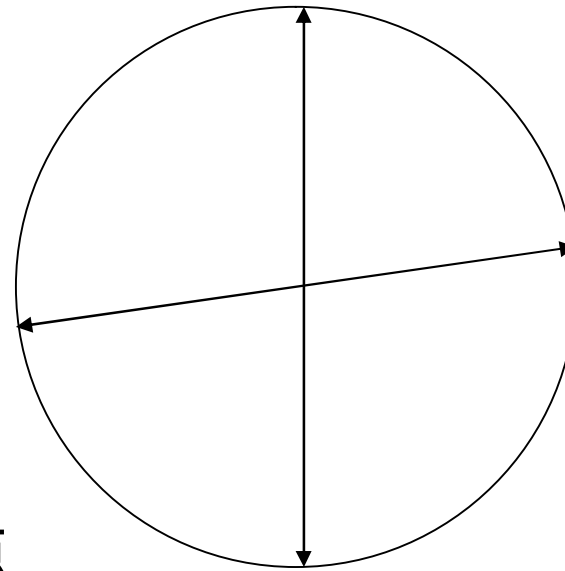
ドーナツ表面と
空洞の表面を貼り合わせる

直方体の3つの向かい合う面を貼り合わせる(同一視)

射影空間の可能性もある



1個の球体の表面のすべての点をちょうど裏側の点と貼り合わせる



貼り合わせる

1次元球面 $x^2 + y^2 = R^2$

2次元球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

3次元球面 $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2$

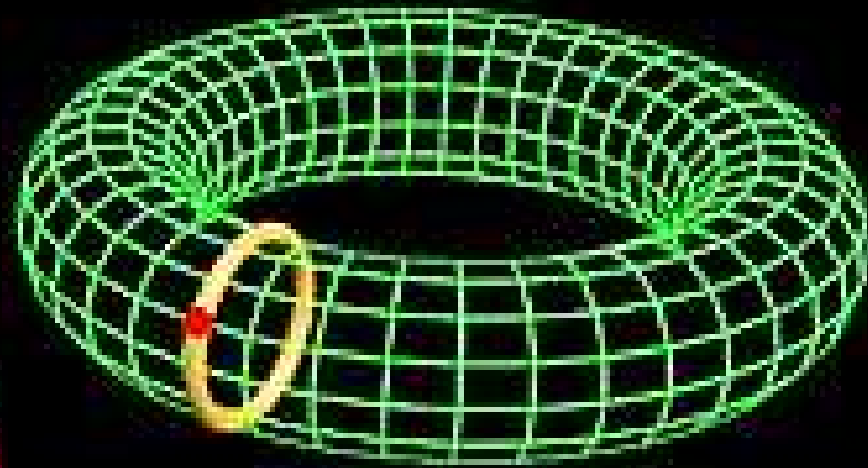
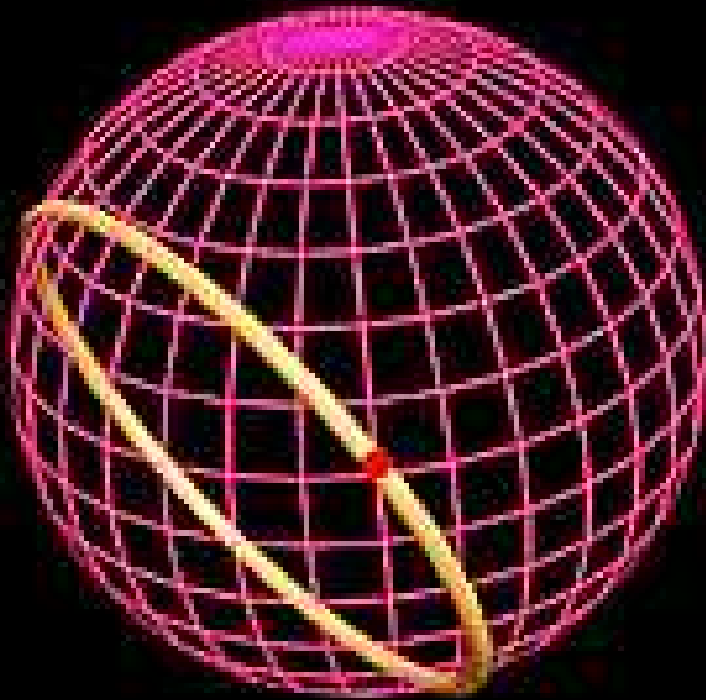
2次元トーラス、3次元トーラス

有限だが果てがない

N次元多様体 局所的にN次元ユークリッド空間と同相な空間
座標系を導入できる図形

空間の構造をその空間内で確かめるには

ポアンカレ予想



端のない閉じた{平面}の住人が平面の外に出ないでその平面世界の形を知る方法にはロープが使える。
では {3次元立体空間} では？

ポアンカレ予想をわかりやすく 言い換えると

地球にロープでつながれたロケットを発射。
地球に戻ってきたときに、ロープの両端を持って
手元に手繰り寄せて、ロープを回収できるか？
(任意の経路について)

3次元球面	OK
3次元トーラス	不可
射影空間	不可

回収できたとき、空間は3次元球面と同相か？

宇宙の可能な構造 - 3次元多様体 - の分類

なぜ高次元多様体か---力学系

ばねでつながれた質量 m の質点の1次元運動

ニュートンの運動方程式は以下のようにも書ける

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} \quad \text{ハミルトニアン}$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad \text{ハミルトンの正準方程式(解析力学)}$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q$$

2次元位相空間内の (q, p) の軌跡

2次元位相空間内の (q, p) の軌跡

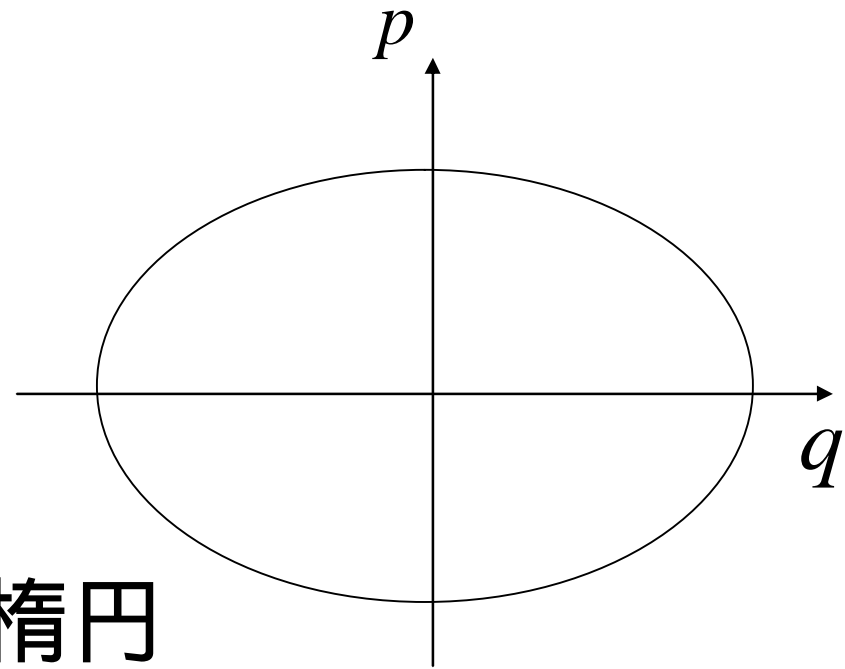
$$\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} = E \text{ (運動の積分) とすると}$$

$$q = \sqrt{\frac{E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \theta)$$

$$p = \sqrt{mE} \cos(\omega t + \theta)$$

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{2E/m\omega^2} = 1 \text{ の楕円}$$

(1次元多様体)



太陽の重力場での惑星の2次元運動

4次元位相空間内の $(r, \theta, p_r, p_\theta)$ の軌跡

$$H(r, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{p_r^2 + p_\theta^2}{2m} - \frac{GmM}{r} = E \quad \text{運動の積分}$$

(エネルギー保存)

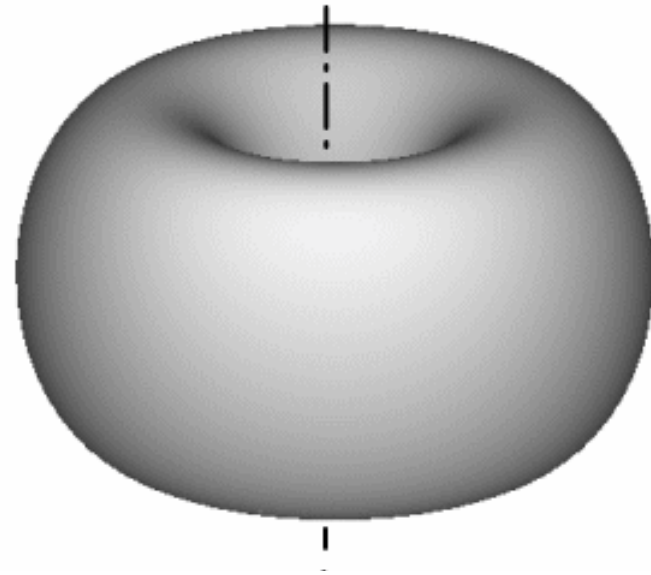
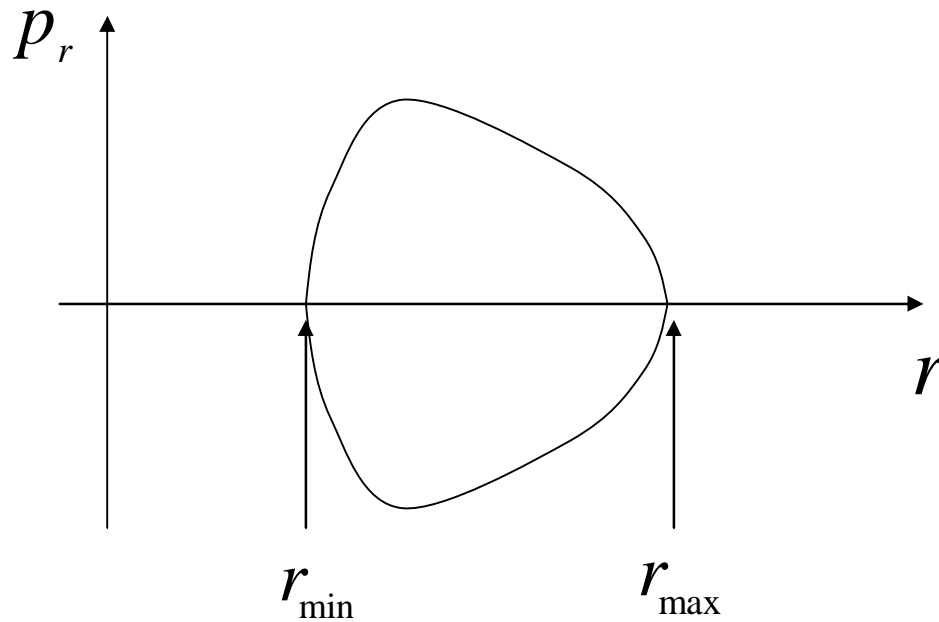
$$L = rp_\theta \quad \text{運動の積分} \quad (\text{角運動量保存})$$

$$H(r, \theta, p_r) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r} = E$$

3次元空間内の2次元曲面(トーラス)上の軌道

$$H(r, \theta, p_r) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r} = E$$

3次元空間内の2次元曲面(トーラス)上の軌道



$$\frac{p_r^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r} = E$$

三体問題

互いに重力を及ぼす 3 つの天体の運動

18次元位相空間

$(q_{1x}, q_{1y}, q_{1z}, q_{2x}, q_{2y}, q_{2z}, q_{3x}, q_{3y}, q_{3z}, p_{1x}, p_{1y}, p_{1z}, p_{2x}, p_{2y}, p_{2z}, p_{3x}, p_{3y}, p_{3z})$

内の軌跡

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$i = 1, 2, 3, \dots, 18$ 10個の運動の積分が存在

18次元空間内の8次元曲面 (= 8次元多様体) 上

の軌跡

一般相対性理論

質量によって4次元時空間(多様体)がゆがむ

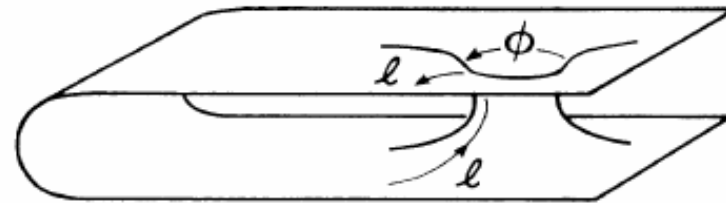
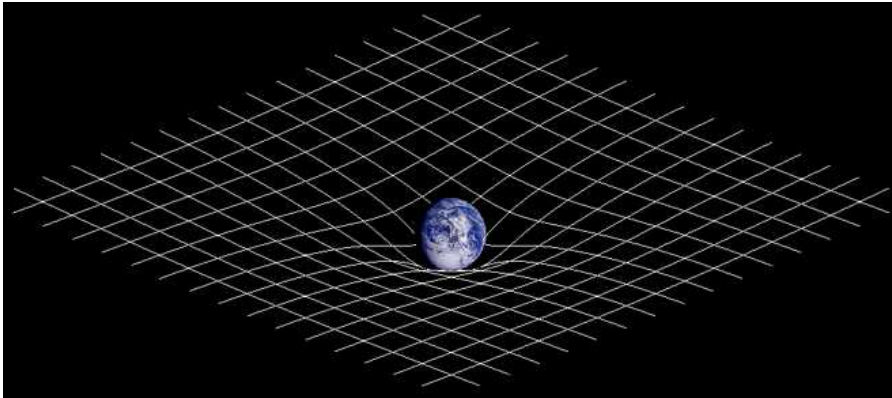


FIG. 1. A wormhole and the external universe at a specific moment of time, embedded in a fictitious higher-dimensional space.

ブラックホール 時空間に開いた穴？ ホワイトホールへ？

(超)弦理論

物質の基本的単位は、大きさが無限に小さなゼロ次元の点粒子ではなく1次元の広がりをもつ弦である

10次元時空。

通常の3次元に時間を加えた4次元に加えて、残りの6次元は量子レベルで巻き上げられていて小さなエネルギーでは観測できない。

トポロジーの成果

不動点定理 (解の存在定理に応用)

例 地球表面の風の世界 少なくとも1つは
不動点が存在する。

2次元球面は3次元空間で裏返してできる
(伸縮性があり、自身を通り抜けることができると仮定)

$3(n+1)/2$ より高次元では、 n 次元球面の結び目はできない

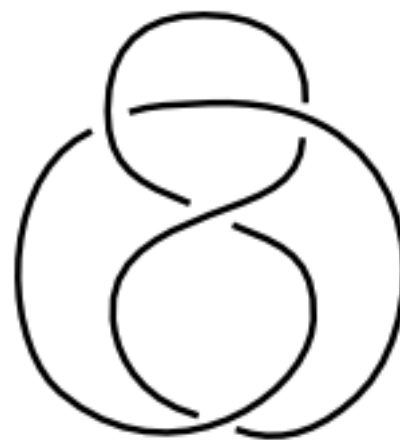
4次元(以上)では、結び目のある紐(ループ、1次元球面)
は存在しない。すべてほどけてしまう

5次元では2次元球面は結び目を作れない。

3次元空間内の1次元球面(ループ)の 結び目



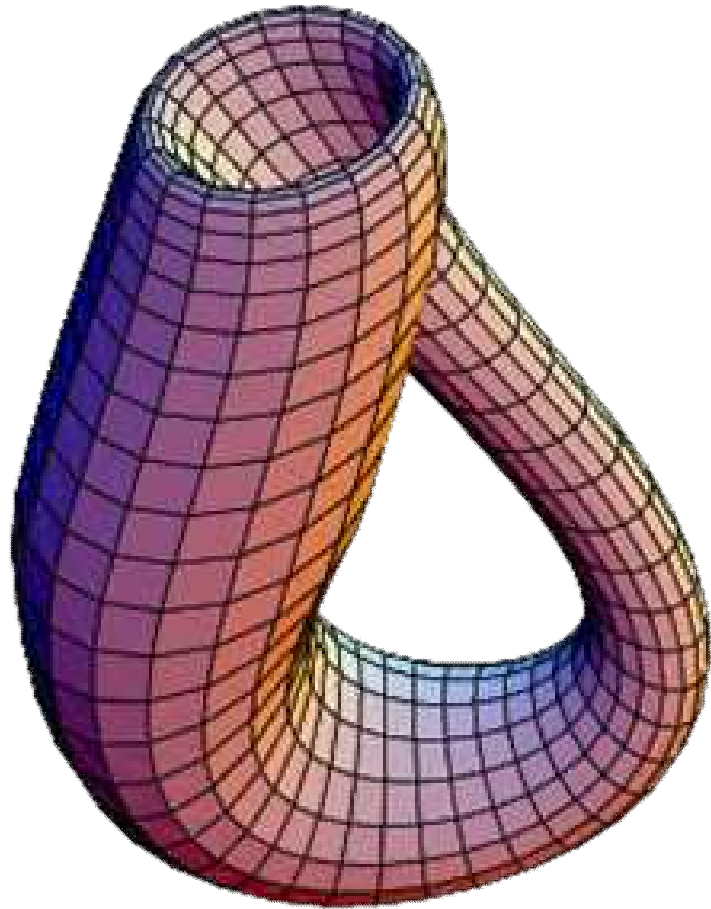
3次元空間の結び目



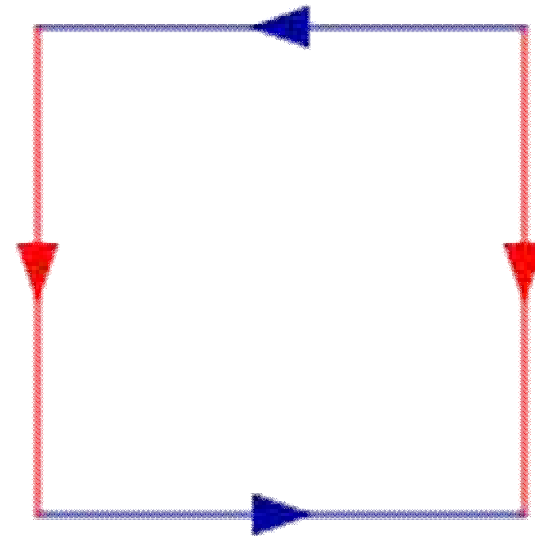
2次元への射影

物理 ひも理論

4次元空間内の2次元球面の結び目



3次元空間への射影



クラインの壺は3次元空間に
埋め込めない
4次元空間が必要
5次元では結び目がほどける

はめ込み immersion は、自己交差 self-intersection を許容した
埋め込み embedding のこと

例: クラインの壺は、4次元空間に埋め込めるが、3次元空間には埋め込めない(はめ込むことはできる)

3次元空間で球面を裏返せるか？(自己交差を許す)

Smale's paradox

参照 Outside In, full video

ポアンカレ予想

4次元以上の空間では解決済(肯定的)

1960	5次元以上	解決
1981	4次元	解決

3次元が最後の難問として残されていた

高次元のように、絡み合いを解く十分な空間の余裕がない
ので困難

3次元、4次元の特殊性

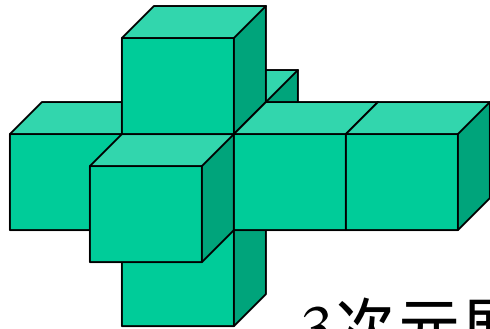
ベクトル積は3次元ではうまく定義できるが、4(～6)次元では定義できない

4元数のベクトル部分(3次元)として定義される
(スカラー部分が内積)

$$\alpha = a + bi + cj + dk$$

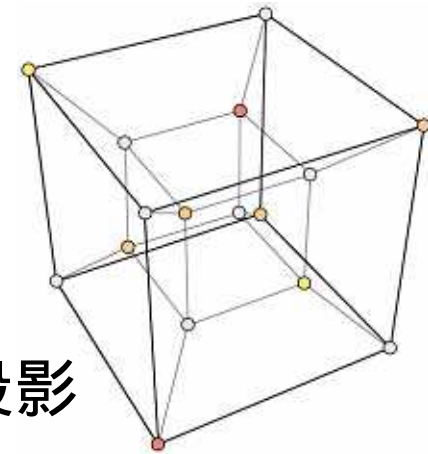
* 2元数 = 複素数

5次元以上の正多面体(正多胞体)は自明なものしかない
3次元の正四面体、立方体、正八面体に対応する3つのみ



3次元展開図

4次元超立方体
(正八胞体)



3次元への投影

ペレルマンの論文

The entropy formula for the Ricci flow
and its geometric applications

Grisha Perelman*

February 1, 2008

Introduction

1. The Ricci flow equation, introduced by Richard Hamilton [H 1], is the evolution equation $\frac{d}{dt}g_{ij}(t) = -2R_{ij}$ for a riemannian metric $g_{ij}(t)$. In his seminal paper, Hamilton proved that this equation has a unique solution for a short time for an arbitrary (smooth) metric on a closed manifold. The evolution equation for the metric tensor implies the evolution equation for the curvature tensor of the form $Rm_t = \Delta Rm + Q$, where Q is a certain quadratic expression of the curvatures. In particular, the scalar curvature R satisfies $R_t = \Delta R + 2|\text{Ric}|^2$, so by the maximum principle its minimum

1 Ricci flow as a gradient flow

1.1. Consider the functional $\mathcal{F} = \int_M (R + |\nabla f|^2)e^{-f}dV$ for a riemannian metric g_{ij} and a function f on a closed manifold M . Its first variation can be expressed as follows:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{F}(v_{ij}, h) &= \int_M e^{-f}[-\Delta v + \nabla_i \nabla_j v_{ij} - R_{ij}v_{ij} \\ &\quad - v_{ij} \nabla_i f \nabla_j f + 2 \langle \nabla f, \nabla h \rangle + (R + |\nabla f|^2)(v/2 - h)] \\ &= \int_M e^{-f}[-v_{ij}(R_{ij} + \nabla_i \nabla_j f) + (v/2 - h)(2\Delta f - |\nabla f|^2 + R)], \end{aligned}$$

where $\delta g_{ij} = v_{ij}$, $\delta f = h$, $v = g^{ij}v_{ij}$. Notice that $v/2 - h$ vanishes identically iff the measure $dm = e^{-f}dV$ is kept fixed. Therefore, the symmetric tensor $-(R_{ij} + \nabla_i \nabla_j f)$ is the L^2 gradient of the functional $\mathcal{F}^m = \int_M (R + |\nabla f|^2)dm$, where now f denotes $\log(dV/dm)$. Thus given a measure m , we may consider the gradient flow $(g_{ij})_t = -2(R_{ij} + \nabla_i \nabla_j f)$ for \mathcal{F}^m . For general m this flow may not exist even for short time; however, when it exists, it is just the Ricci flow, modified by a diffeomorphism. The remarkable fact here is that different choices of m lead to the same flow, up to a diffeomorphism; that is, the choice of m is analogous to the choice of gauge.

殆どの数学者がトポロジーを使ってポアンカレ予想を解こうとしたのに対し、ペレルマンは微分幾何学と物理学の手法を使って解いてみせた。そのため、解の説明を求められてアメリカの壇上に立ったペレルマンの解説を聞いた数学者達は、「まず、ポアンカレ予想を解かれた事に落胆し、それがトポロジーではなく微分幾何学を使って解かれた事に落胆し、そして、その解の解説が全く理解できない事に落胆した」という。なお、証明には熱量・エントロピーなどの物理的な用語が登場する。

(Wikipediaより)

曲率を熱拡散方程式(偏微分方程式)で拡散させて特異点を解消...

参考文献

トポロジカル宇宙

根上生也

ポアンカレ予想

ジョージ・G・スピーロ

ポアンカレ予想を解いた数学者

ドナルド・オシア

高次元の正多面体

一松 信