予定

1. ニュートンの法則、自由物体図
2. 剛体の回転、つり合い
3. 流体力学
4. 重力、振動、熱、波動の話題
5. レポート課題

参考書

力学　バージャー、オルソン　　培風館

ファインマン物理学　　　岩波書店

力学　ランダウ・リフシッツ　東京図書

Chaps. 4, 5, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17

力学 mechanics

動力学 dynamics, kinetics 静力学 statics
空間 space 真空 vacuum
物質 matter 物質、実質 substance 物質、材料 material

媒質 medium
物体 body 物体、対象 object
位置 position 変位 displacement

速度 velocity 加速度 acceleration
長さ lengh 高さ height 幅、広さ width
力 force 仕事 work 運動量 momentum
エネルギー energy

運動 (位置) エネルギー kinetic (potential) energy
仕事率 power 強度 intensity

保存 conservation　保存力 conservative force
力積、衝撃 impulse　衝突 collision
運動 motion
作用 action　反作用 reaction　相互作用 interaction
質量 mass　重さ weight
重力 gravity, gravitation
重力加速度 acceleration due to gravity
質量中心 center of mass　重心 center of gravity
比重 specific gravity
慣性 inertia　慣性モーメント moment of inertia
質点 particle, mass (material) point, point object
剛体 rigid body

角運動量 angular momentum　角速度 angular velocity
ラジアン radian
密度 density　(液体の)濃度 concentration
量 quantity　質 quality
(固有の)性質 property　固有の proper
次元 dimension
体積 volume　容積、かさ bulk　表面 surface
立方体 cube　正方形 square　球 sphere　半径 radius
桁 orders of magnitude　有効数字 significant figures
図 figure
精度 precision　確度 accuracy　不確定 uncertainty
相対的な relative　絶対的な absolute

積 product　スカラー(ベクトル)積 scalar (vector) product
微分 derivative　積分 integral, integration
有限の finite　無限の infinite　無限小の infinitesimal
変数 variable　定数 constant
正の positive　負の negative
整数 integer　逆数 reciprocal
偶数 even number　奇数 odd number
分数 fraction　分母 denominator　分子 numerator
等式、方程式 equation
(準拠)座標系 frame of reference
慣性座標系 inertial frame of reference
参照、参考文献 reference
右手系 right-handed system　座標 coordinate

法則 law　原理 principle
定義 definition　(判断)基準 criterion
仮説 hypothesis　推測、憶測 speculation
近似 approximation
実験 experiment　理論 theory　単位 unit
正味の(風袋を除いた) net
瞬時の、瞬間の instantaneous　同時の simultaneous
平衡 equilibrium
定常の、静止の stationary　過渡的な transient
状態 state　条件 condition
環境 surroundings, circumstance
水平の horizontal　垂直の vertical
垂直の、直角をなす perpendicular
法線の、基準の normal

まさつ friction　動的な kinetic　静的な static
流体(気体＆液体) fluid
相 phase　気体 gas　液体 liquid　固体 solid
張力 tension　抵抗 resistance
弾性の elastic　塑性の、形を造る plastic
比(率) ratio　効率 efficiency　係数 coefficient
微視的な microscopic　巨視的な macroscopic
過程 process　依存性 dependence
閾(しきい)値 threshold
研究する investigate, examine, research, study
解答、溶液 solution　警告、注意 caution
時計回りの clockwise　反時計回りの counterclockwise

大きい力士と小さい力士ががっぷり四つに組むと
小さい力士は苦しい。　なぜか？

重心運動での座標ベクトルに対応する
回転運動での角座標ベクトルがないのはなぜ？

猫は逆さまで落とされても空中で回転して立つ。
角運動量は保存されているのか？

コマが首振り運動（歳差運動）するのはなぜ？

野球のバッティング：真芯に当てるとは？

地球の自転速度が遅くなると月はどうなるか？

ビリヤード：押し球、引き球とは？

恐竜の歩く速度を化石から推定するには？

温度が上昇すると固体は膨張する。なぜか？

湖の水は表面から凍る。なぜか？

醤油がまっすぐに落ちないで容器を伝わるのはなぜか？

なぜ飛行機は空を飛べる？揚力とは？

徳永研HP
講義のページ

http://www.rs.kagu.tus.ac.jp/eiji/
lecture.html

光学、電磁気学（特に電磁波）、光物性に
関する疑問はこちらで

ニュートンの運動方程式の積分

$$F = ma$$

運動量保存

$$\int F dt = m \int \frac{dv}{dt} dt = mv - mv_0 = \Delta p$$

エネルギー保存

$$F = m \frac{dv}{dt}$$

$$Fv = mv \frac{dv}{dt}$$

$$F \frac{dx}{dt} dt = mv \frac{dv}{dt} dt$$

$$\int F dx = \int mv dv$$

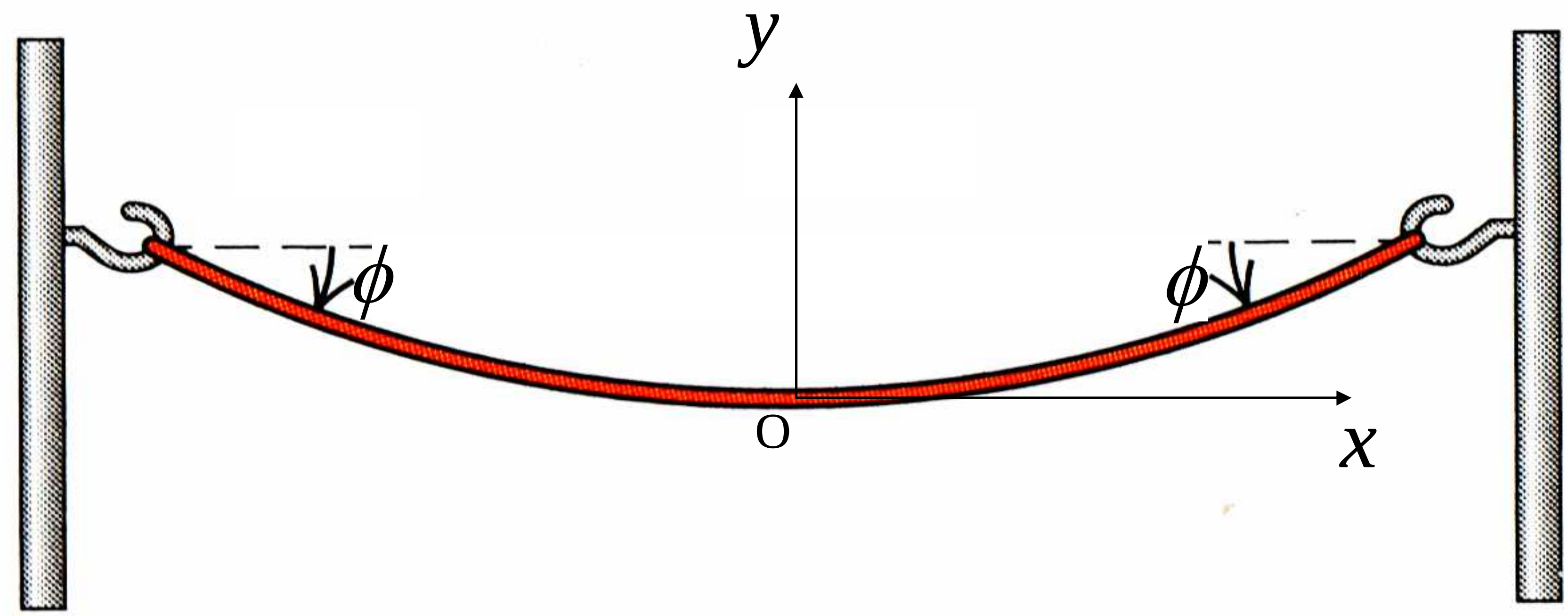
$$\frac{1}{2} mv^2 - \int F dx = E$$

懸垂線(catenary)(A Rope with Mass.)

We have a clothesline with uniform density attached to two poles. The clothesline has a mass *M*, and each end is at the same height making an angle ϕ with horizontal. The acceleration due to gravity is *g*.

(a) What is the tension at the ends of the clothesline?

(b) What is the tension at the lowest point?



University Physics

解答

$$(a) \quad 2T\sin\phi = Mg \qquad T = \frac{Mg}{2\sin\phi}$$

$$(b) \quad t = T\cos\phi = \frac{Mg\cos\phi}{2\sin\phi} = \frac{Mg}{2\tan\phi}$$

懸垂線を求める

λ : 線密度

$$s=\int_0^x ds$$

$$T_x \sin\theta_x = \lambda s g$$

$$T_x \cos\theta_x = t$$

$$\frac{dy}{dx}=\tan\theta_x$$

これらを解く

$$\frac{dy}{dx}=\tan\theta_x=\frac{\lambda g}{t}s=\frac{\lambda g}{t}\int_0^x ds=\frac{\lambda g}{t}\int_0^x\sqrt{dx^2+dy^2}=\frac{\lambda g}{t}\int_0^x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

$$\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx}=\frac{\lambda g}{t}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=a\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\quad \frac{dy}{dx}=p\quad \frac{dp}{dx}=a\sqrt{1+p^2}$$

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=adx\quad \log_e(p+\sqrt{p^2+1})=ax+C\quad x=0\text{のとき}p=0\quad \therefore C=0$$

$$\log_e(p+\sqrt{p^2+1})=ax\quad e^{ax}=p+\sqrt{p^2+1}\quad (e^{ax}-p)^2=p^2+1\quad e^{2ax}-2e^{ax}p-1=0$$

$$\frac{dy}{dx}=p=\frac{e^{2ax}-1}{2e^{ax}}=\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}\quad y=\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2a}\text{(懸垂線)}\quad a=\frac{\lambda g}{t}$$

4. Newton's laws

First law

4.2 A body acted on by no net force moves with constant velocity (which may be zero) and zero acceleration.

Second law

4.3 ?

Third law

4.5 ?

4.6 Free-body diagram（自由物体図）

運動を考察する物体のみを取り出して、当物体に他の物体から働くすべての力を描いたもの

当物体が他の物体に及ぼす力は描かない

作用･反作用のペアが共に現れることはない

慣性力は含まない

5.105 The Monkey and Bananas Problem

5.122 Moving Wedge

剛体の運動

教科書「力学」の対応ページも示す

大きい力士と小さい力士ががっぷり四つに組むと
小さい力士は苦しい。　なぜか？

恐竜の歩く速度を化石から推定するには？

猫は逆さまで落とされても空中で回転して立つ。
角運動量は保存されているのか？ p.176

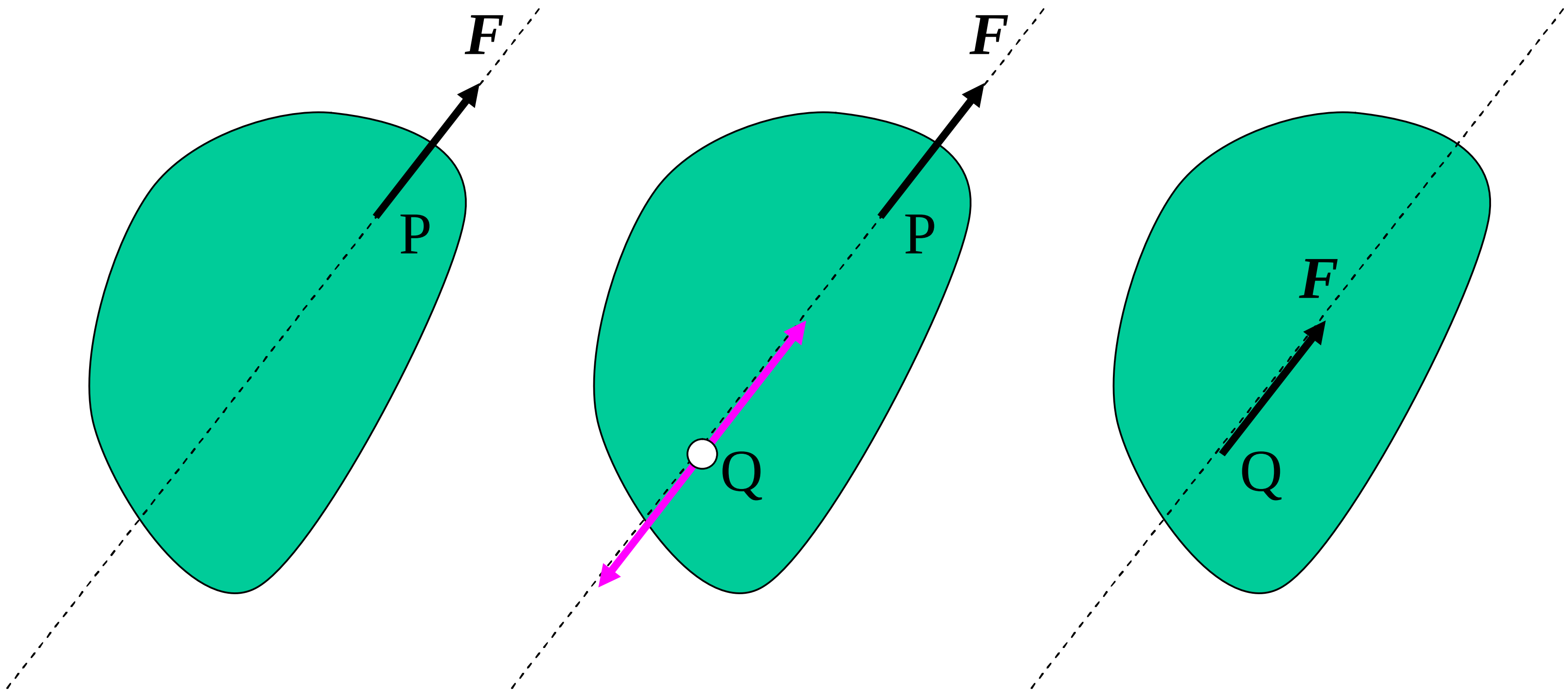
コマが首振り運動（歳差運動）するのはなぜ？ p.184

野球のバッティング：真芯に当てるとは？ p.183

ビリヤード：押し球、引き球とは？ p.180

地球の自転速度が遅くなると月はどうなるか？ p.154

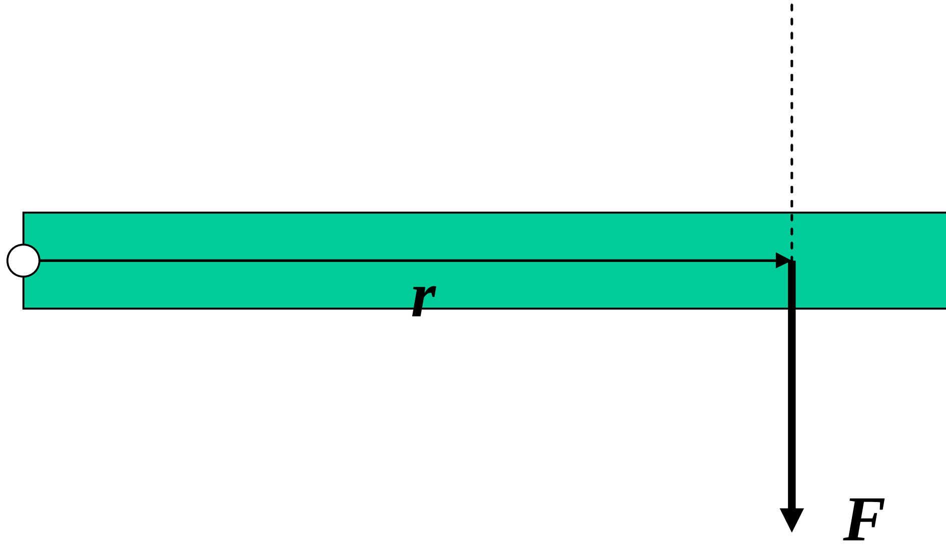
剛体にはたらく力の特徴



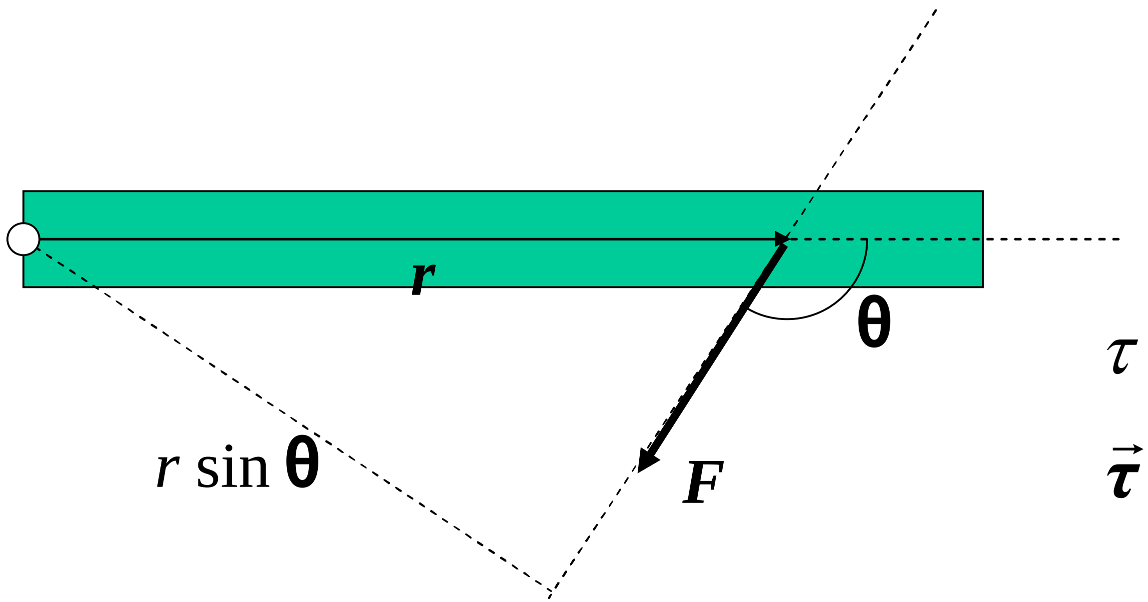
剛体にはたらく任意の1つの力は、作用点が作用線上のどこにあってもそのはたらきは同じ

力のモーメント(トルク)

p.158



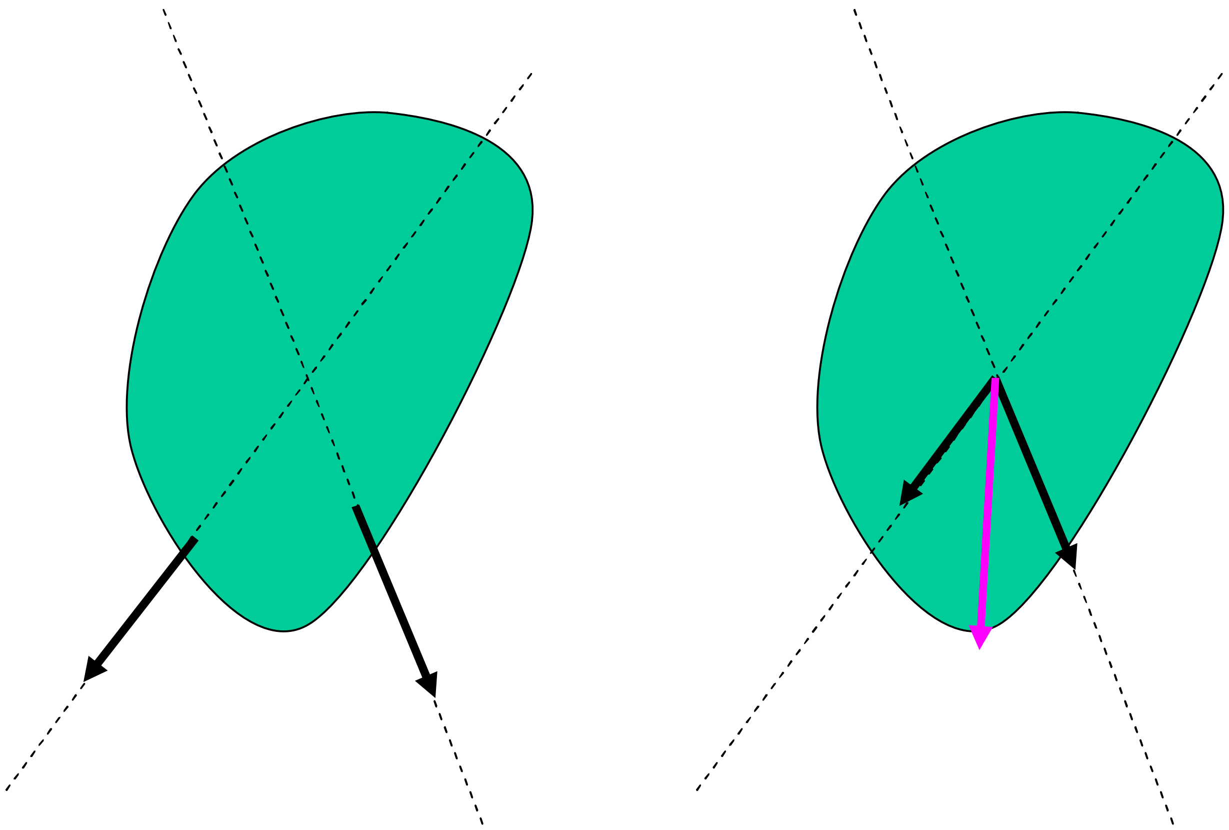
$$\tau = rF$$



$$\tau = (r\sin\theta)F$$

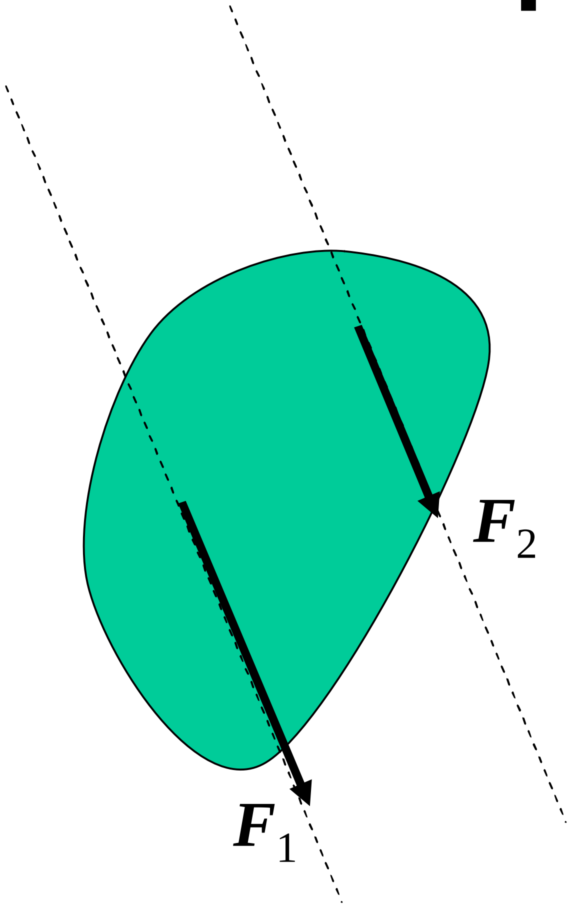
$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{F}}$$

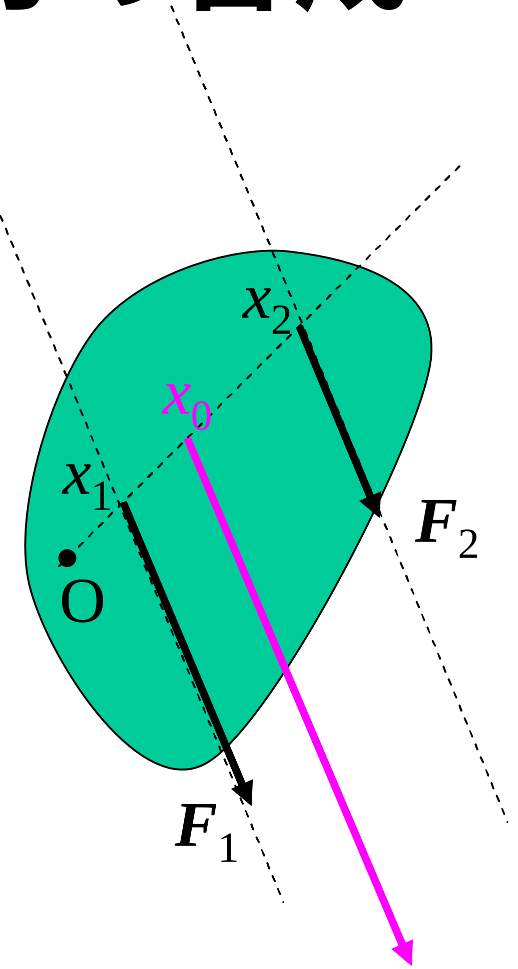
力の合成



2つの力の作用線が交わる場合、合力はベクトルの和

平行力の合成





合力$F=F_1+F_2$

合力の作用線は？

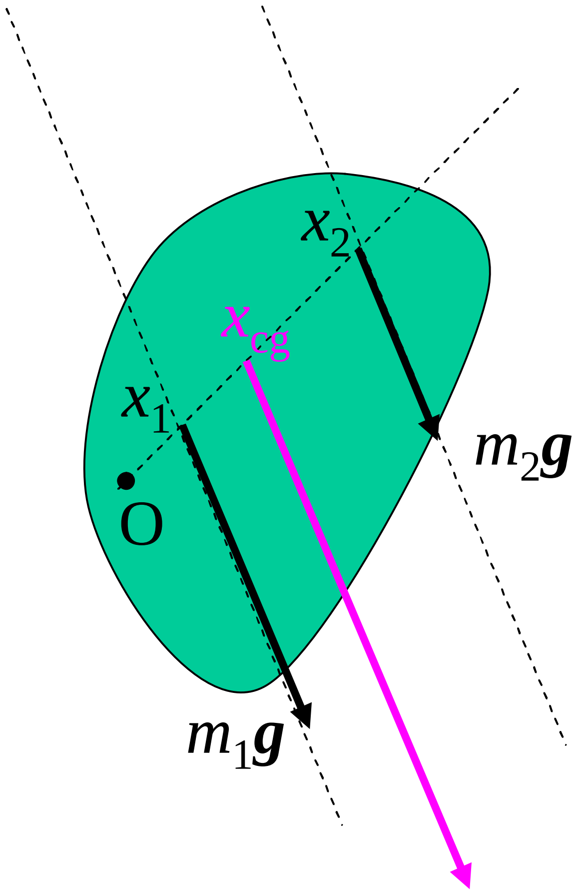
O**のまわりの力のモーメントが等しい**

$$x_0(F_1+F_2) = x_1F_1+x_2F_2$$

重心　(質量中心)

p.147

center of gravity　　center of mass



$$x_{cg}(m_1 g + m_2 g) = x_1 m_1 g + x_2 m_2 g$$

$$x_{cg} = \frac{m_1 x_1 g + m_2 x_2 g}{m_1 g + m_2 g}$$

一般に

$$\vec{\boldsymbol{r}}_{cm} = \frac{m_1\vec{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\vec{\boldsymbol{r}}_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i \vec{\boldsymbol{r}}_i}{\sum_i m_i}$$

$\vec{g}$ が物体中のすべての点で等しければ

$$\vec{\boldsymbol{r}}_{cg} = \vec{\boldsymbol{r}}_{cm}$$

重力のモーメント（トルク） p.160

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \sum_i \vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\boldsymbol{r}}_1 \times m_1 \vec{\boldsymbol{g}} + \vec{\boldsymbol{r}}_2 \times m_2 \vec{\boldsymbol{g}} + \cdots$$

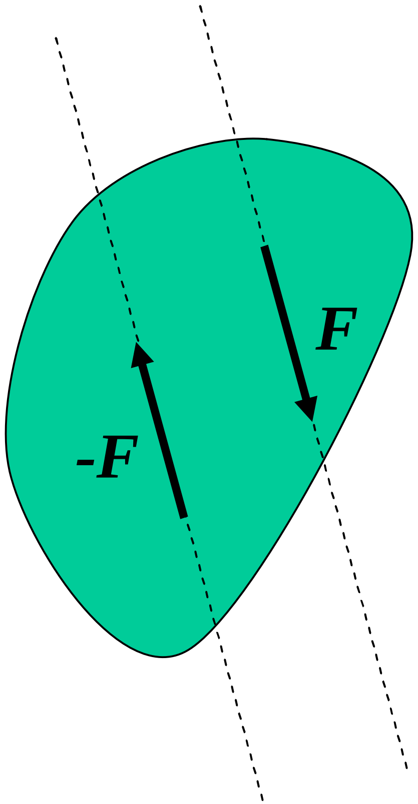
$$= (m_1 \vec{\boldsymbol{r}}_1 + m_2 \vec{\boldsymbol{r}}_2 + \cdots) \times \vec{\boldsymbol{g}}$$

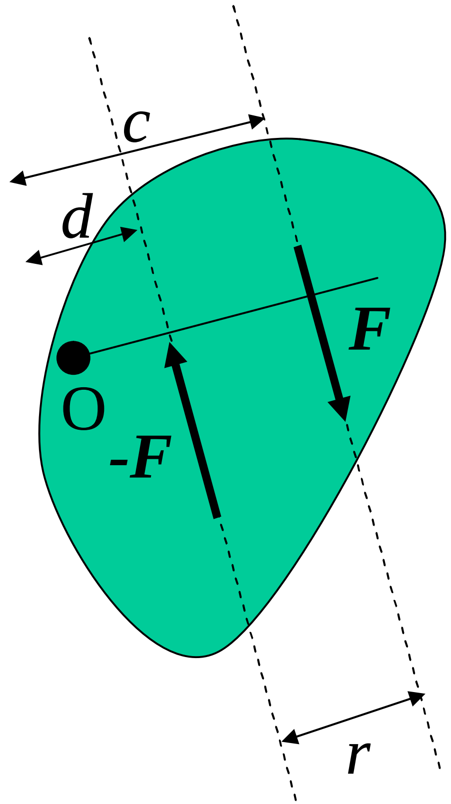
$$= \left(\frac{\sum_i m_i \vec{\boldsymbol{r}}}{\sum_i m_i} \right) \times \left(\sum_i m_i \right) \vec{\boldsymbol{g}}$$

$$= \vec{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{cm}} \times M \vec{\boldsymbol{g}}$$

剛体にはたらく重力によるトルクは、質量中心に全重量が集中しているとして計算してよい

偶力
(大きさが同じで逆向き平行な２力)





$$\tau = cF - dF = rF$$

偶力のモーメント

剛体の平衡

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \qquad \sum_i \vec{\tau}_i = 0$$ （あらゆる点のまわりで）

ただし、 $\sum_i \vec{F}_i = 0$ ならば回転に関する釣り合いの式は

任意の1点の周りの式のみに減らせる

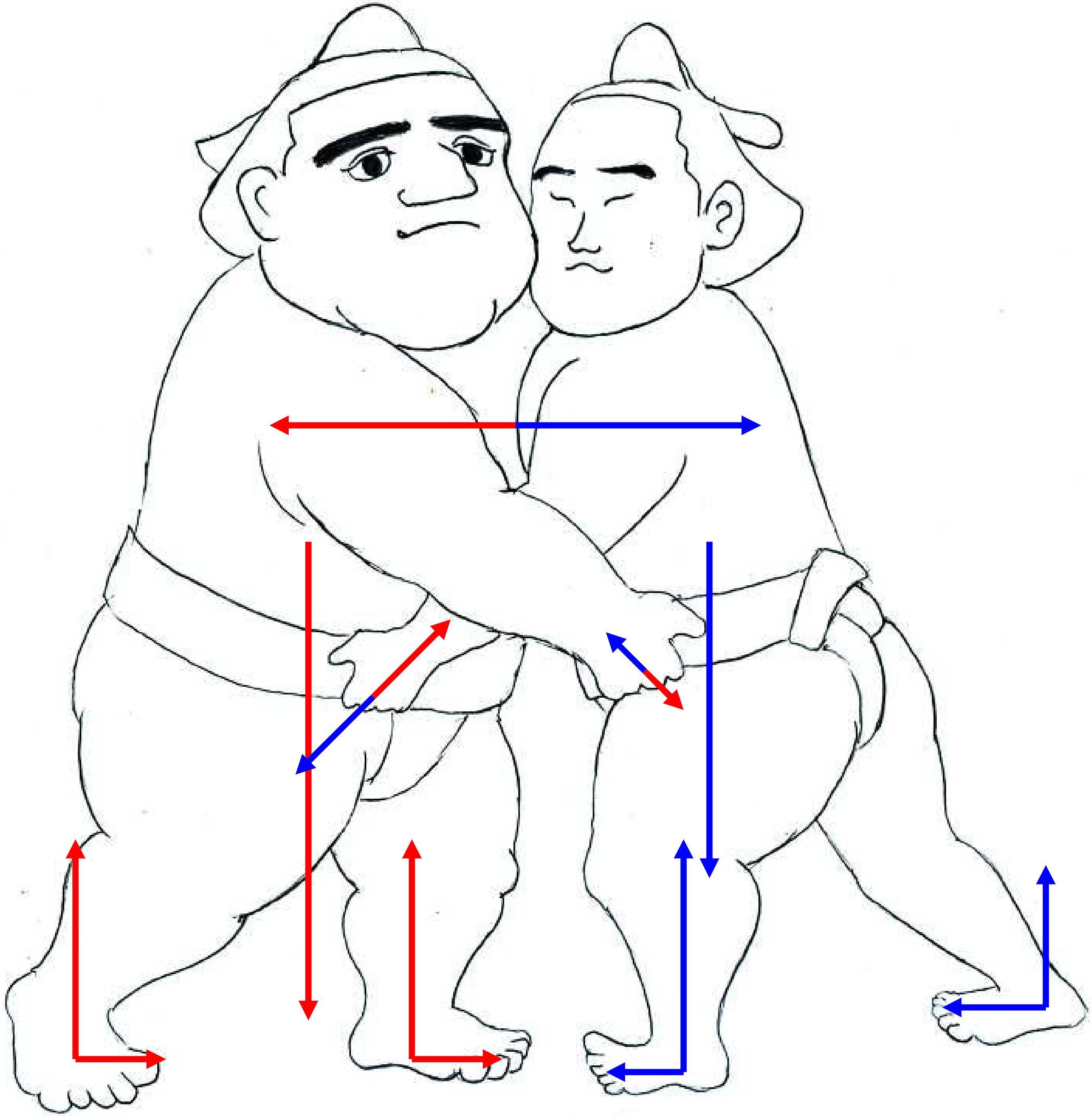
∵ ある点 $\vec{r}_0$ のまわりで $\sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{F}_i = 0$ が成り立ち、

かつ $\sum_i \vec{F}_i = 0$ ならば

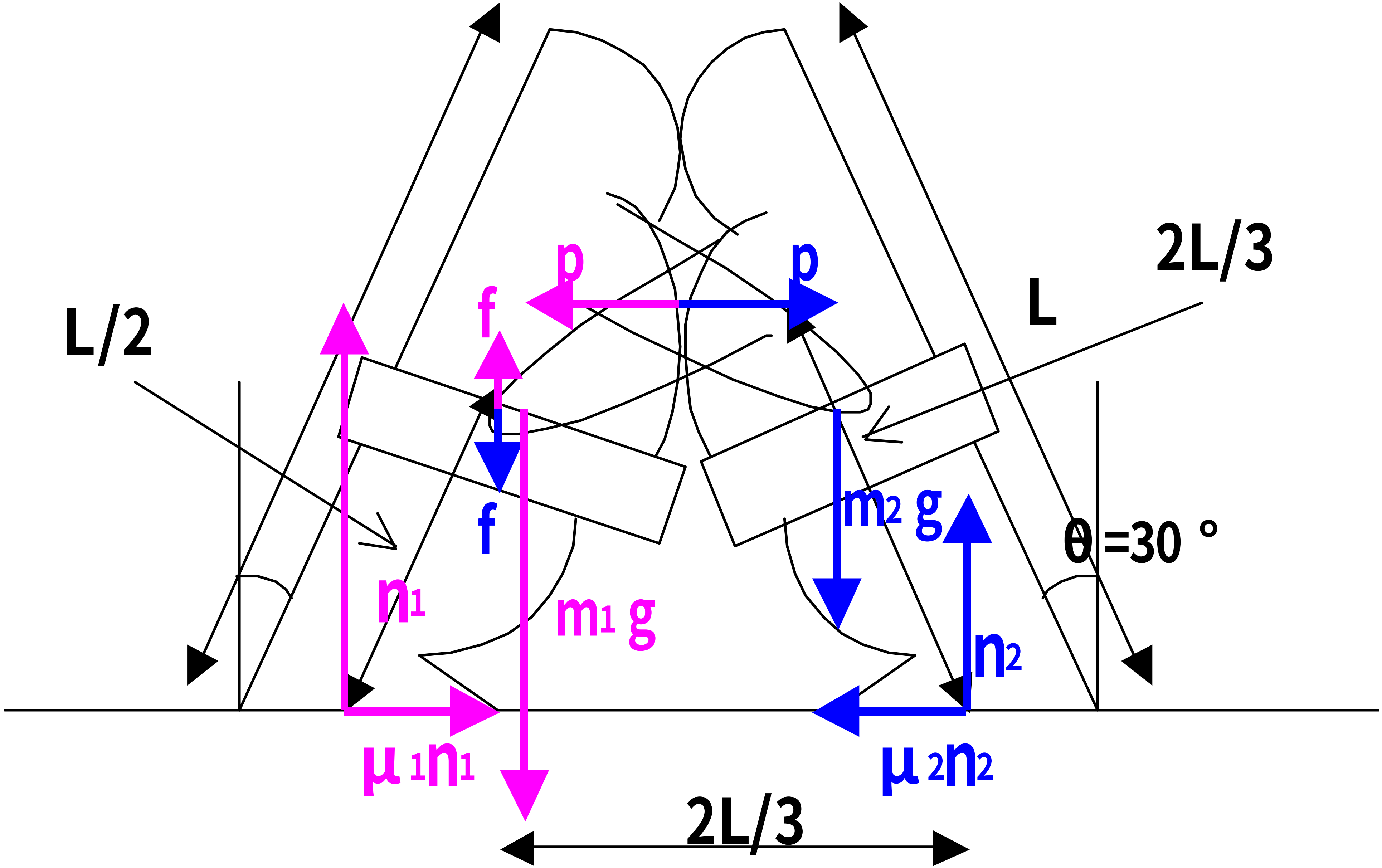
$$\sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{F}_i + \vec{r}_0 \times \sum_i \vec{F}_i = 0$$

任意の点のまわりで $\sum_i \vec{\tau}_i = 0$ が成り立つ

大きい力士と小さい力士ががっぷり四つに
組むと小さい力士は苦しい。　なぜか？



がっぷり四つの力士

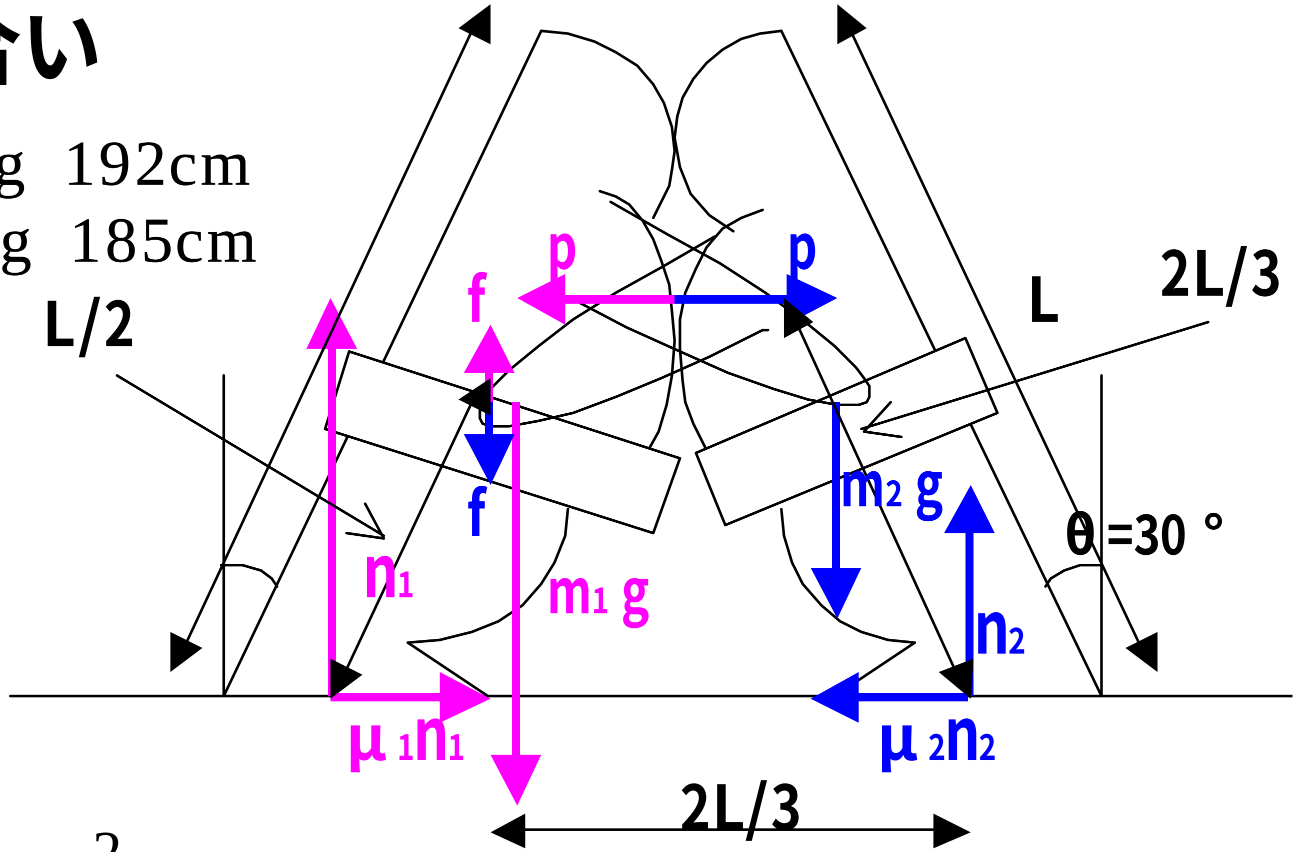


力士のつり合い

武蔵丸 $m_1 = 237\text{kg} \quad 192\text{cm}$

朝青龍 $m_2 = 137\text{kg} \quad 185\text{cm}$

$L = 190\ \text{cm}$



$$\begin{cases} m_1 g - f = n_1 \\ P = \mu_1 n_1 \le \mu_s n_1 \\ \dfrac{L}{2}\sin 30^\circ \times (m_1 g - f) = \dfrac{2}{3} L \cos 30^\circ \times P \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_2 g + f = n_2 \\ P = \mu_2 n_2 \le \mu_s n_2 \\ \dfrac{L}{2}\sin 30^\circ \times m_2 g + \dfrac{2}{3} L \times f = \dfrac{2}{3} L \cos 30^\circ \times P \end{cases}$$

$P = 90.8\ \text{kg}$

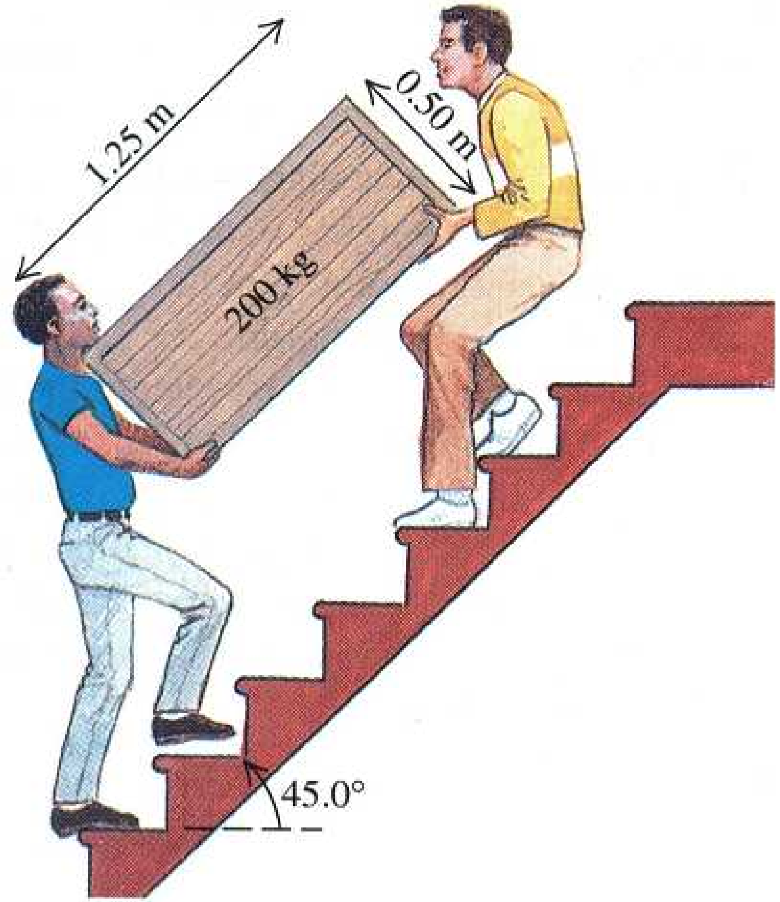
$n_1 = 209.7\,\text{kg}$

$n_2 = 164.3\,\text{kg}$

$f = 27.3\,\text{kg}$

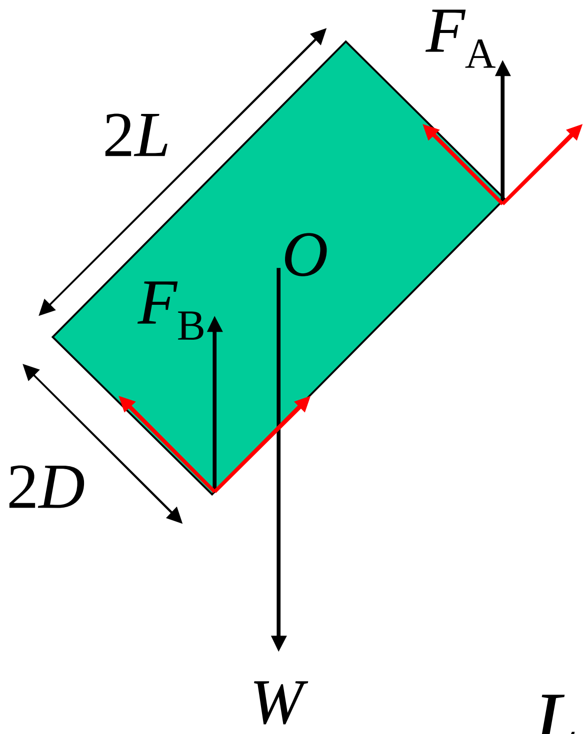
問題1:どちらが楽？(11.71)

Two friends are carrying a 200-kg crate up a flight of stairs. The crate is 1.25 m long and 0.50 m high, and its center of gravity is at its center. The stairs make a 45 ° angle with respect to the floor. The crate also is carried at a 45 ° angle, so that its bottom side is parallel to the slope of the stairs. If the force each person applies is vertical, what is the magnitude of each of these forces? Is it better to be the person above or below on the stairs?



University Physics

問題1:どちらが楽？(11.71)



$$W = F_A + F_B$$

Oのまわり

$$L\frac{F_A}{\sqrt{2}} + D\frac{F_A}{\sqrt{2}} + D\frac{F_B}{\sqrt{2}} = L\frac{F_B}{\sqrt{2}}$$

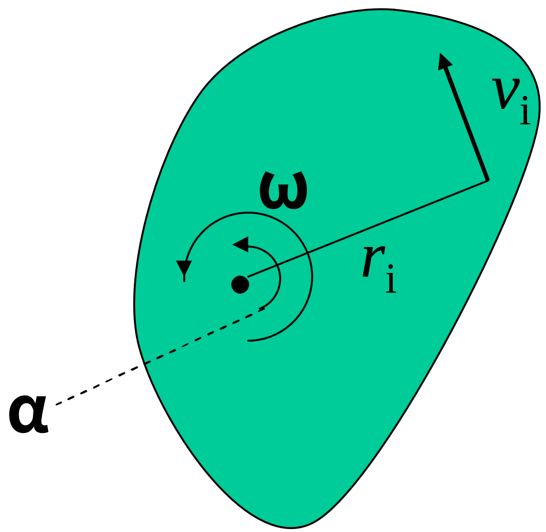
$$F_A = \frac{L-D}{2L}W = \frac{0.75}{1.25\times 2}\times 200\times 9.8 = 588(\mathrm{N})$$

$$F_B = \frac{L+D}{2L}W = \frac{1.75}{1.25\times 2}\times 200\times 9.8 = 1372(\mathrm{N})$$

剛体の回転

剛体が固定軸の周りに回転するとき、剛体の各部分はいずれも固定軸を中心とする円運動をする。

このときの円運動の半径は注目する部分ごとに違うが、角速度はすべての部分に共通である。



$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$v_i = r_i \omega$$

$$a^{\mathrm{rad}}{}_i = r_i \omega^2$$

$$a^{\mathrm{tan}}{}_i = r_i \alpha$$

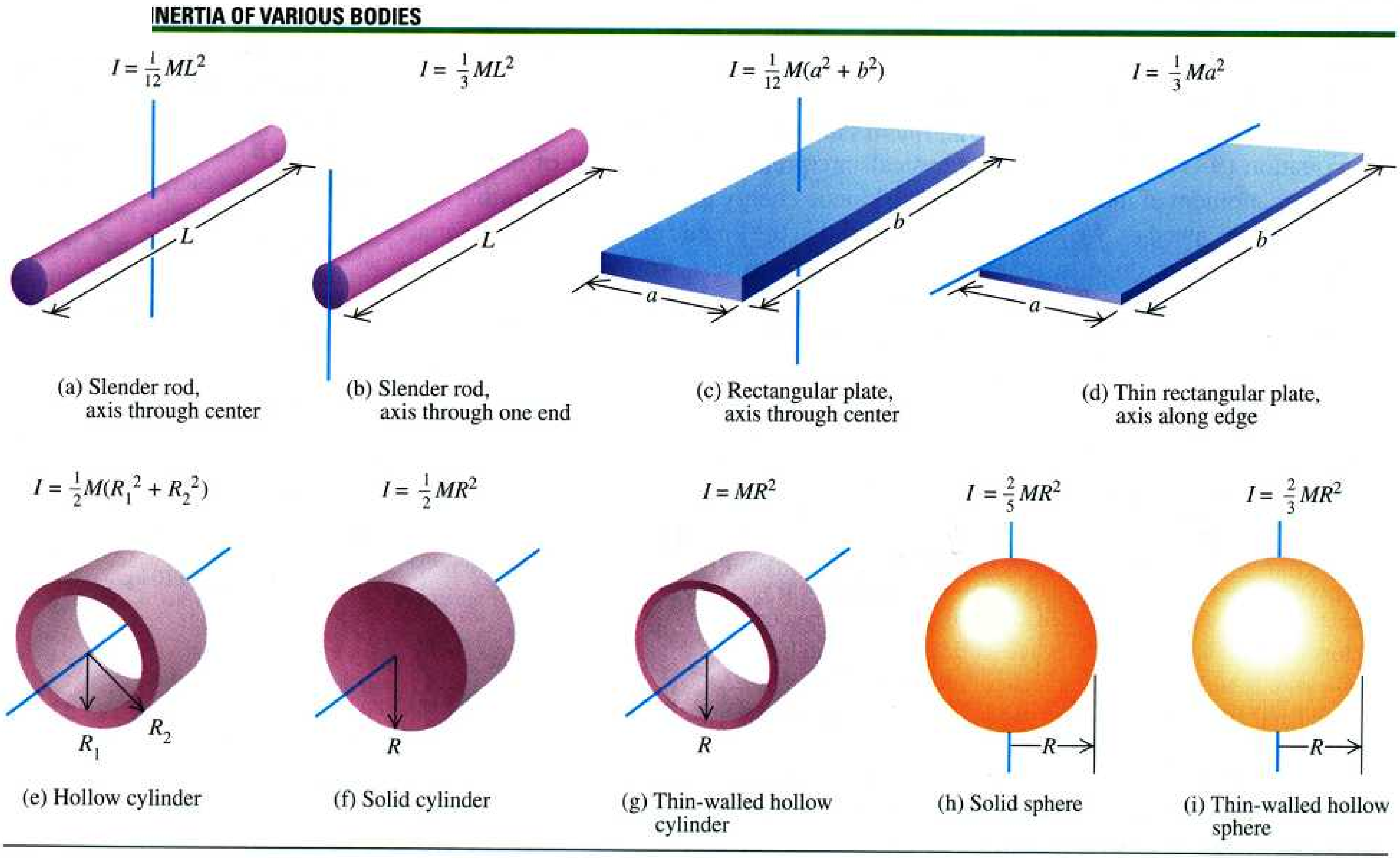
回転の運動エネルギー

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2}m_1{v_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2}^2 + \frac{1}{2}m_3{v_3}^2 + \cdots \\
&= \frac{1}{2}m_1{r_1}^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_2{r_2}^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_3{r_3}^2\omega^2 + \cdots \\
&= \frac{1}{2}(m_1{r_1}^2 + m_2{r_2}^2 + m_3{r_3}^2 + \cdots)\omega^2 \\
&= \frac{1}{2}I\omega^2
\end{aligned}
$$

慣性モーメント

$$
\begin{aligned}
I &= m_1{r_1}^2 + m_2{r_2}^2 + m_3{r_3}^2 + \cdots \\
&= \sum_i m_i{r_i}^2 = \int r^2 dm = \int r^2 \rho\, dV
\end{aligned}
$$

慣性モーメント



(a) Slender rod, axis through center

(b) Slender rod, axis through one end

(c) Rectangular plate, axis through center

(d) Thin rectangular plate, axis along edge

(e) Hollow cylinder

(f) Solid cylinder

(g) Thin-walled hollow cylinder

(h) Solid sphere

(i) Thin-walled hollow sphere

University Physics

注意

慣性モーメントは、回転軸を指定しないと決まらない。
また、剛体の質量中心が回転軸から距離 R にあるとき、そこに
すべての質量が集中しているとして計算してはいけない。

質量M、長さLの一様な棒の端を通り棒に垂直な軸の周りの
慣性モーメント

$$I = \frac{1}{3}ML^2$$

もし、質量中心にすべての質量が集中しているとして計算すると、

$$I = M(L/2)^2 = \frac{1}{4}ML^2 \neq \frac{1}{3}ML^2$$

平行軸定理（Steinerの定理） p.171

$$I = I_{\mathrm{cm}} + Md^2$$

M : 剛体の質量

I_{cm} : 質量中心（center of mass）を通る軸の周りの慣性モーメント

I : その軸から d だけ離れた平行な軸の周りの慣性モーメント

例： 質量M、長さLの一様な棒の質量中心を通り、棒に垂直な軸の周りの慣性モーメント

$$I_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{12}ML^2$$

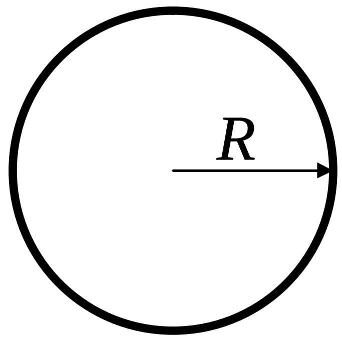
棒の端を通り、棒に垂直な軸の周りの慣性モーメント

$$I = I_{\mathrm{cm}} + M(L/2)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

問題2：慣性モーメント

1) Find the moment of inertia of a uniform slender rod with mass M and length L about an axis perpendicular to the rod and passing through its center of mass.

2) Find the moment of inertia of a uniform thin ring with mass M and radius R about an axis through its circumference and perpendicular to the plane of the ring.



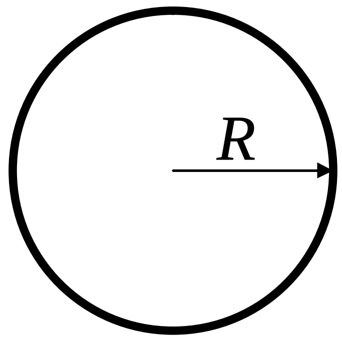
問題2：慣性モーメント

1) 質量M、長さLの一様な棒の質量中心を通り棒に垂直な軸の周りの慣性モーメントを計算せよ。

$$\int r^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} r^2 \rho\, dr = \rho \left[r^3/3 \right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{M}{L}\frac{L^3}{12} = \frac{1}{12}ML^2$$

2) 質量M、半径Rの一様な輪について、輪の円周上の点を通り輪（の作る平面）に垂直な軸の周りの慣性モーメントを求めよ。

輪の中心を通る垂直軸のまわり



$$I_{\mathrm{cm}} = \int r^2 dm = R^2 \int_0^{2\pi} \rho R d\theta = R^2 \int_0^{2\pi} \frac{M}{2\pi R} R d\theta = MR^2$$

$$I = I_{\mathrm{cm}} + MR^2 = 2MR^2$$

回転の運動方程式

p.166

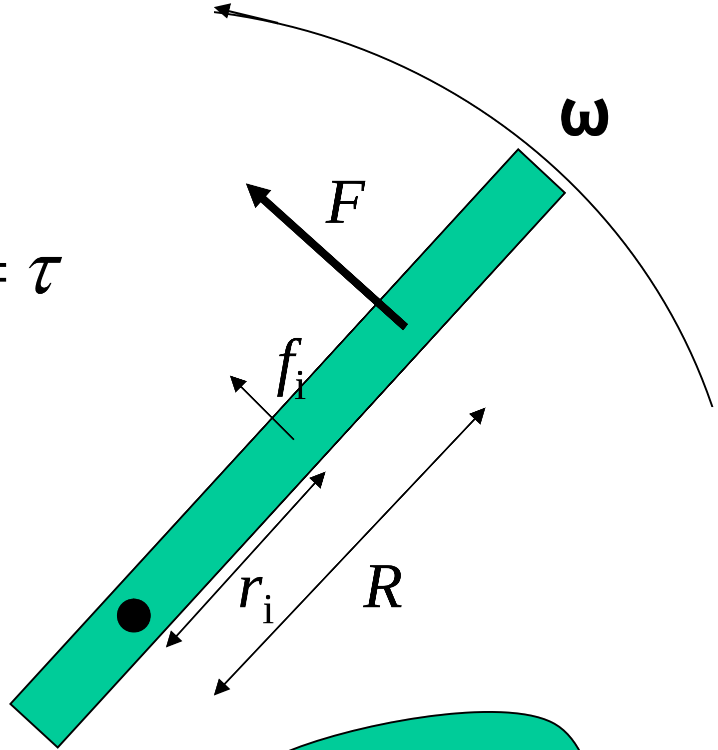
$$f_i = m_i a_i = m_i r_i \alpha$$

$$r_1 f_1 + r_2 f_2 + r_3 f_3 + \cdots = RF = \tau$$

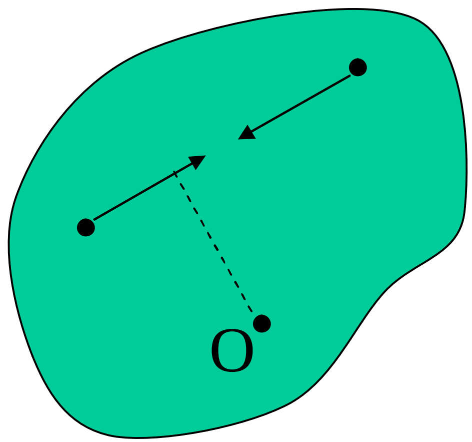
$$m_1 r_1{}^2 \alpha + m_2 r_2{}^2 \alpha + m_3 r_3{}^2 \alpha + \cdots = \tau$$

$$I\alpha = \tau$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = \tau$$



作用と反作用の法則より、内力による
トルクは打ち消し合うので外力による
トルクのみ考えればよい



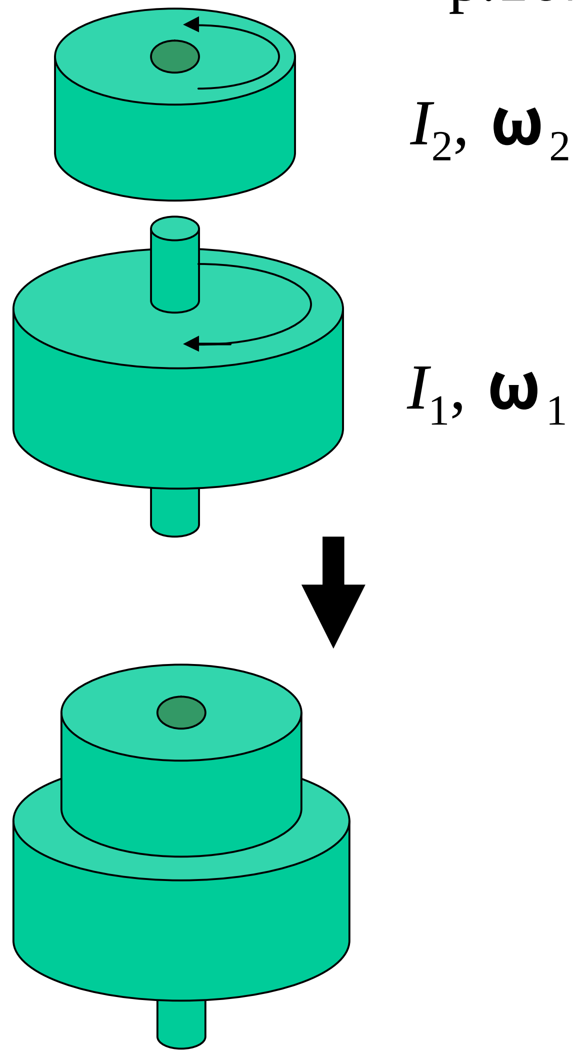
角運動量

p.167

$$I\frac{d\omega}{dt}=\tau$$

$$\frac{d(I\omega)}{dt}=\tau$$

$I\omega$：角運動量



$$\frac{d(I_1\omega_1)}{dt}+\frac{d(I_2\omega_2)}{dt}=\tau_1+\tau_2=0$$

$$\frac{d(I_1\omega_1+I_2\omega_2)}{dt}=0$$

$$I_1\omega_1+I_2\omega_2=\mathrm{const}$$

2つの剛体に外力のモーメントがはたらかないで相互作用だけで回転運動が変化するとき、2つの剛体の角運動量の和は保存

剛体の運動方程式

p.158,164

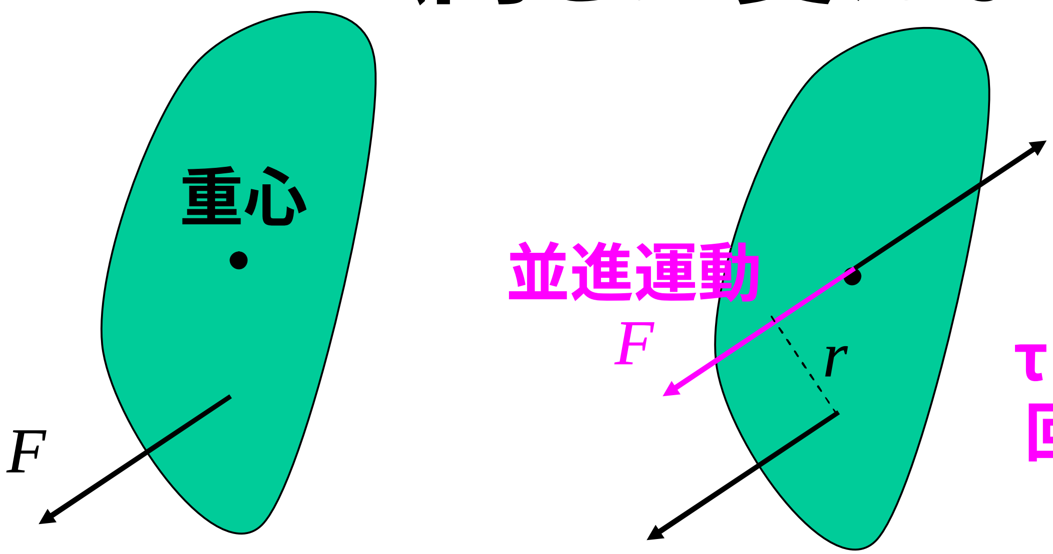
自由度6つ　質量中心(重心)の位置　x, y, z

回転 (配向)　θ, ϕ, ψ

重心に対する運動方程式　$m\dfrac{d^2\vec{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{cm}}}{dt^2} = \sum_j \vec{\boldsymbol{F}}_j$

角運動量に対する運動方程式　$\dfrac{d\vec{\boldsymbol{L}}}{dt} = \sum_j \vec{\boldsymbol{\tau}}_j$

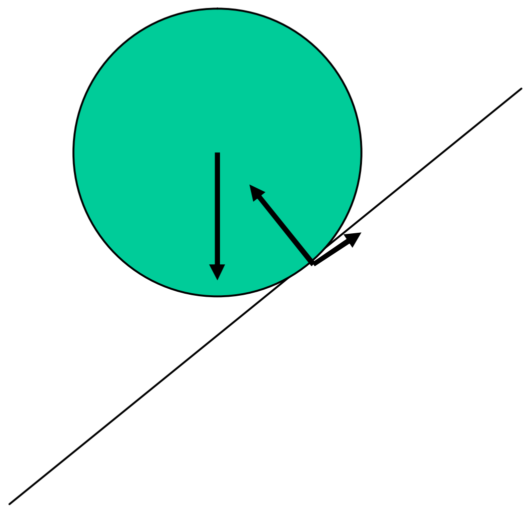
回転軸が平行移動するとき
(向きは変えない)



$\tau = rF$ 偶力のモーメント

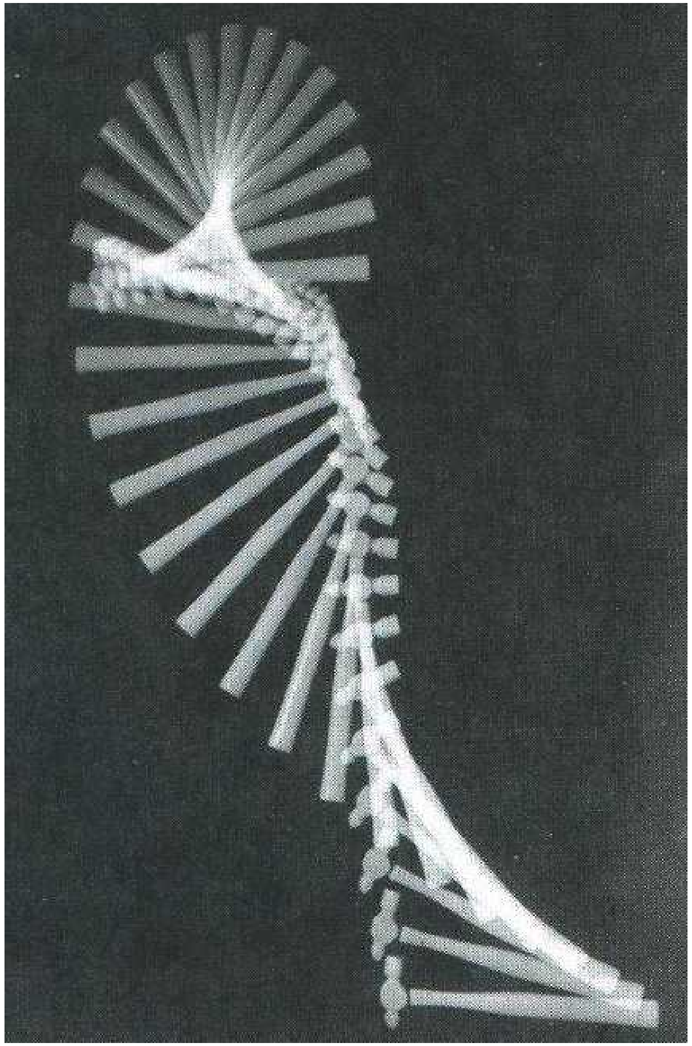
回転運動

$$K = \frac{1}{2} M V_{\mathrm{cm}}{}^{2} + \frac{1}{2} I_{\mathrm{cm}} \omega^{2}$$

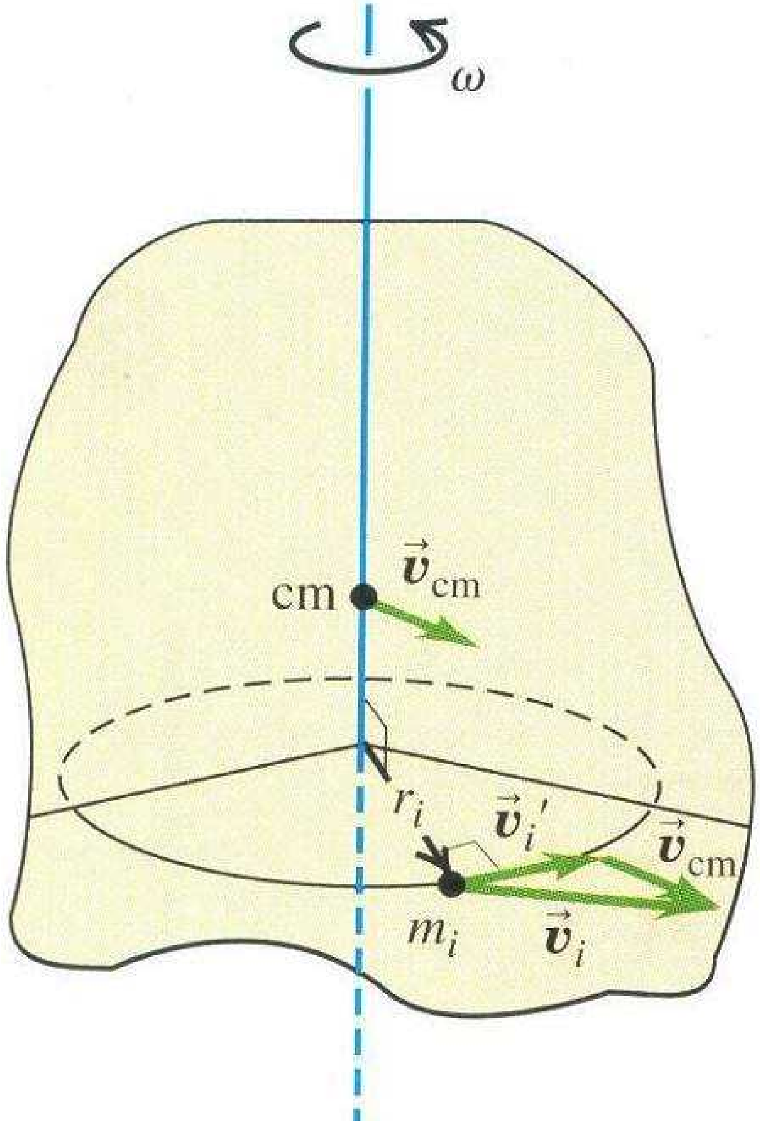


剛体の運動の重心運動と
重心の周りの回転運動への分離

p.158



ハンマーを投げ上げた時の運動



University Physics

運動エネルギーの重心と回転の運動エネルギーへの分解

p.155

$$\vec{\boldsymbol{v}}_i = \vec{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{cm}} + \vec{\boldsymbol{v}}'_i$$

$$K_i = \frac{1}{2} m_i (\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{cm}} + \vec{\boldsymbol{v}}'_i) \cdot (\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{cm}} + \vec{\boldsymbol{v}}'_i)$$

$$= \frac{1}{2} m_i (\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{cm}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{cm}} + 2\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{cm}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}'_i + \vec{\boldsymbol{v}}'_i \cdot \vec{\boldsymbol{v}}'_i)$$

$$= \frac{1}{2} m_i ({v_{\mathrm{cm}}}^2 + 2\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{cm}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}'_i + {v'_i}^2)$$

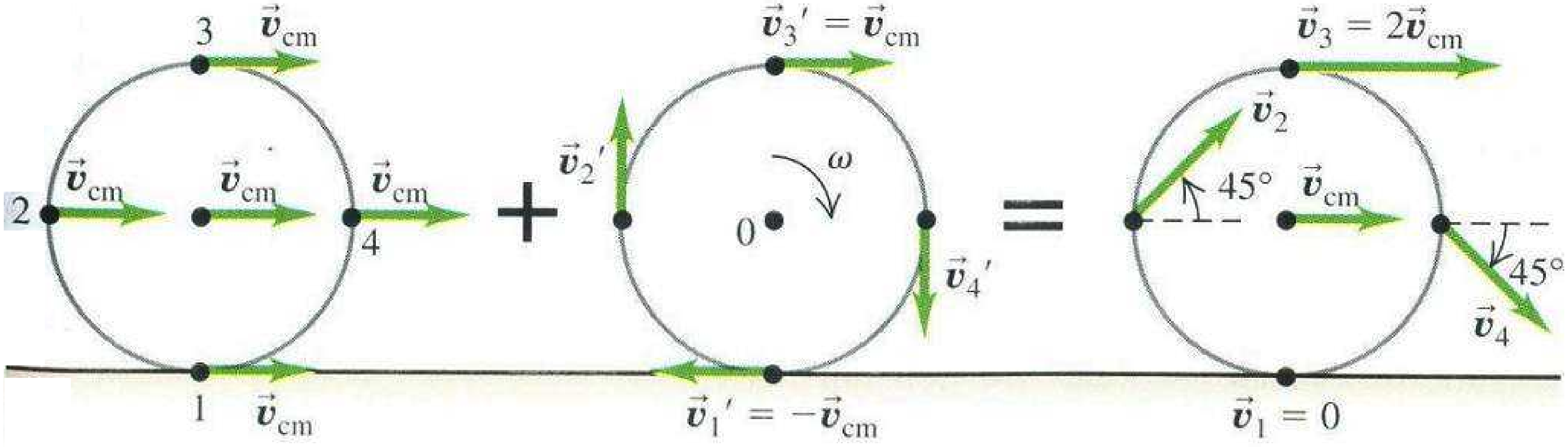
$$K = \sum K_i = \sum \left(\frac{1}{2} m_i {v_{\mathrm{cm}}}^2 \right) + \sum \left(m_i \vec{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{cm}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}'_i \right) + \sum \left(\frac{1}{2} m_i {v'_i}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum m_i \right) {v_{\mathrm{cm}}}^2 + \vec{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{cm}} \cdot \left(\sum m_i \vec{\boldsymbol{v}}'_i \right) + \sum \left(\frac{1}{2} m_i {v'_i}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} M {v_{\mathrm{cm}}}^2 + \frac{1}{2} I_{\mathrm{cm}} \omega^2$$

$$\because \sum m_i \vec{\boldsymbol{v}}'_i = \sum m_i (\vec{\boldsymbol{v}}_i - \vec{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{cm}}) = \sum m_i \vec{\boldsymbol{v}}_i - (\sum m_i) \vec{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{cm}} = 0$$

回転体がすべらないで転がるときの瞬時回転軸



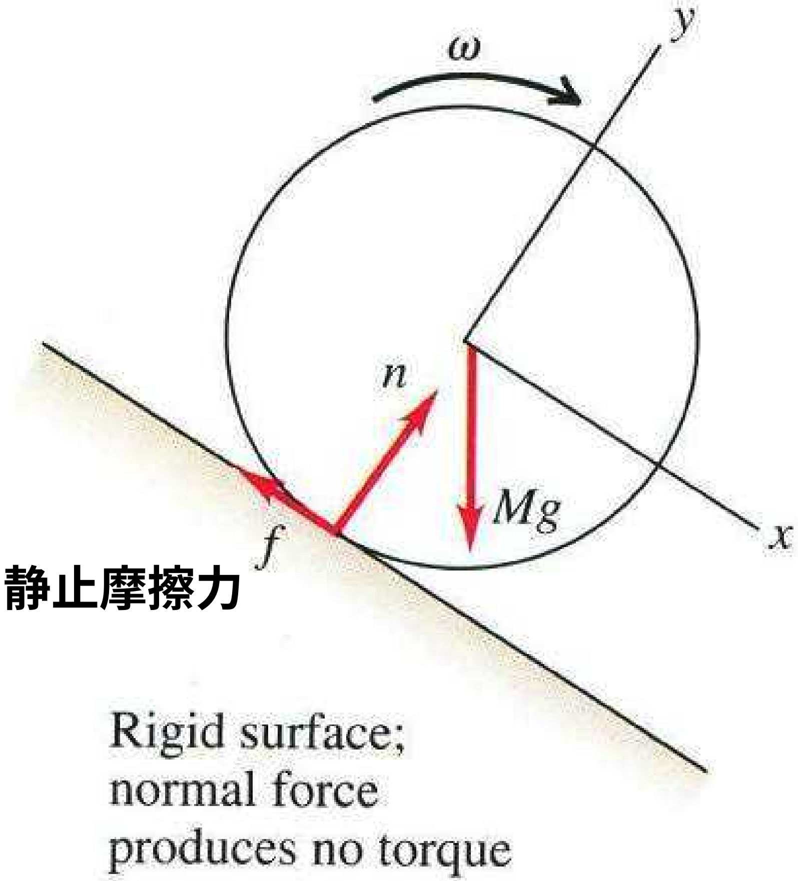
$$I_1 = I_{\mathrm{cm}} + MR^2$$

平行軸の定理

$$K = \frac{1}{2} I_1 \omega^2 = \frac{1}{2} I_{\mathrm{cm}} \omega^2 + \frac{1}{2} MR^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_{\mathrm{cm}} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{\mathrm{cm}}{}^2$$

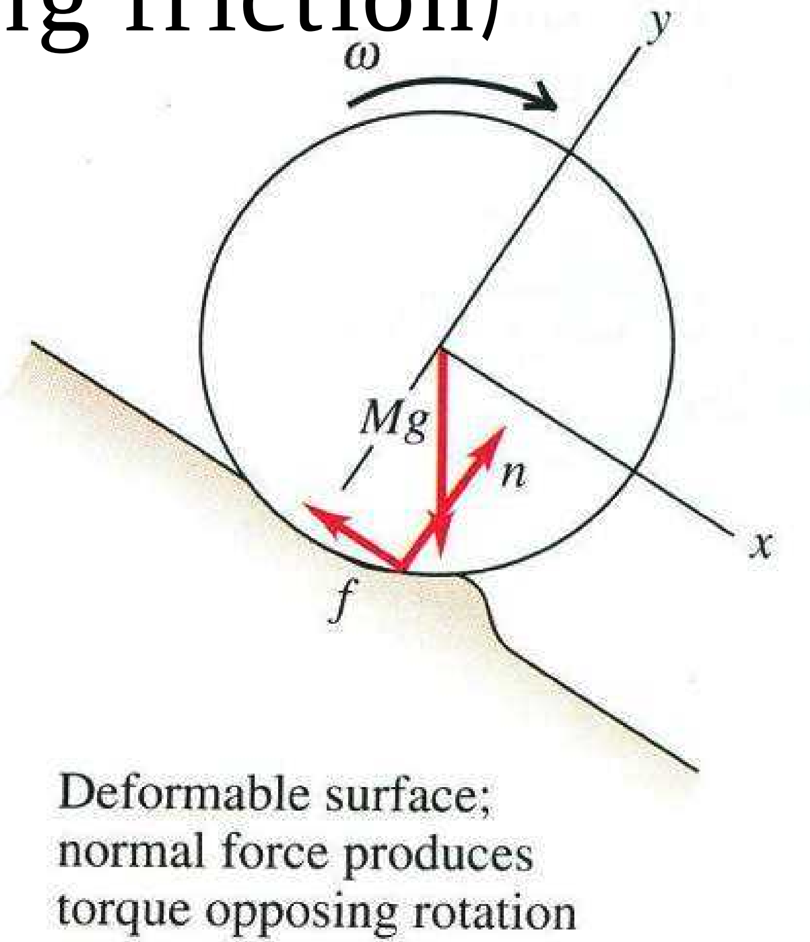
University Physics

転がり摩擦 (rolling friction)



(a)

転がり摩擦なし



(b)

転がり摩擦あり

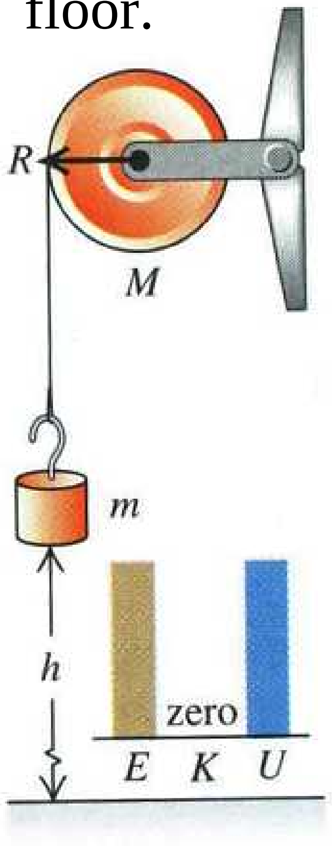
講義では転がり摩擦は無視する。

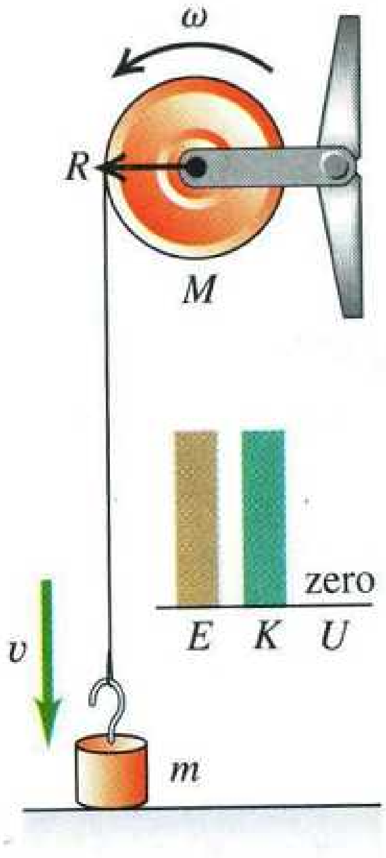
University Physics

固定軸の周りの回転

例題： エネルギー保存

We wrap a light, nonstretching cable around a solid cylinder with mass *M* and radius *R*. The cylinder rotates with negligible friction about a stationary horizontal axis. We tie the free end of the cable to a block of mass *m* and release the block from rest at a distance *h* above the floor. As the block falls, the cable unwinds without stretching or slipping. Find expressions for the speed of the falling block and the angular speed of the cylinder as the block strikes the floor.





$$K + U = \text{const.}$$

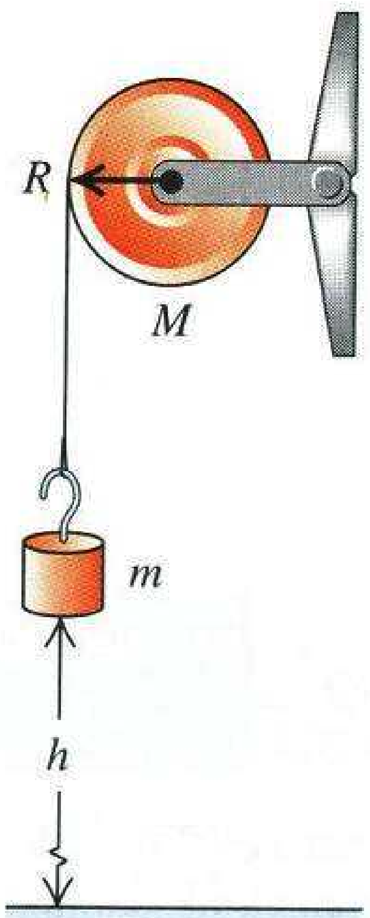
$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 + 0$$

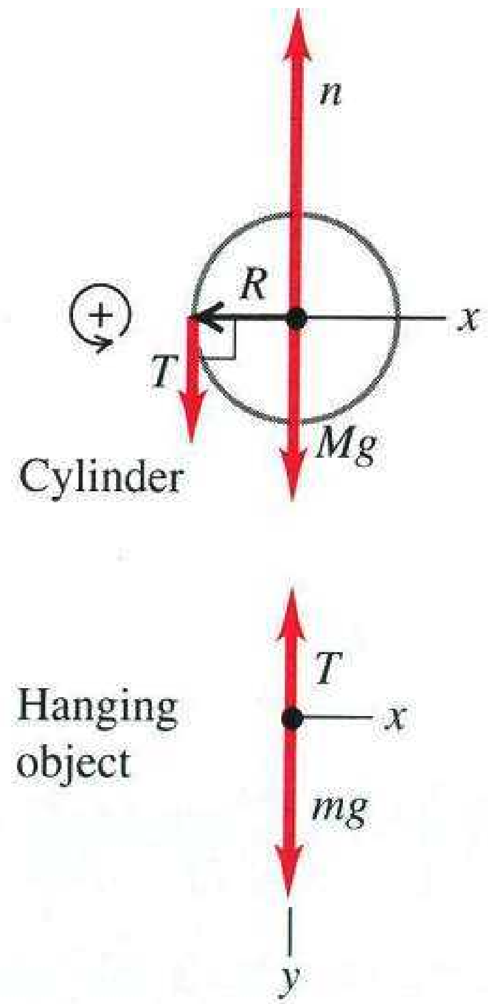
$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + M/2m}}$$

University Physics

例題：運動方程式

What are the acceleration of the falling block and the tension in the cable?





$$mg - T = ma$$

$$RT = I\alpha = \frac{1}{2}MR^2\alpha$$

$$a = R\alpha$$

$$a = \frac{g}{1 + M/2m}$$

$$T = \frac{mg}{1 + 2m/M}$$

University Physics

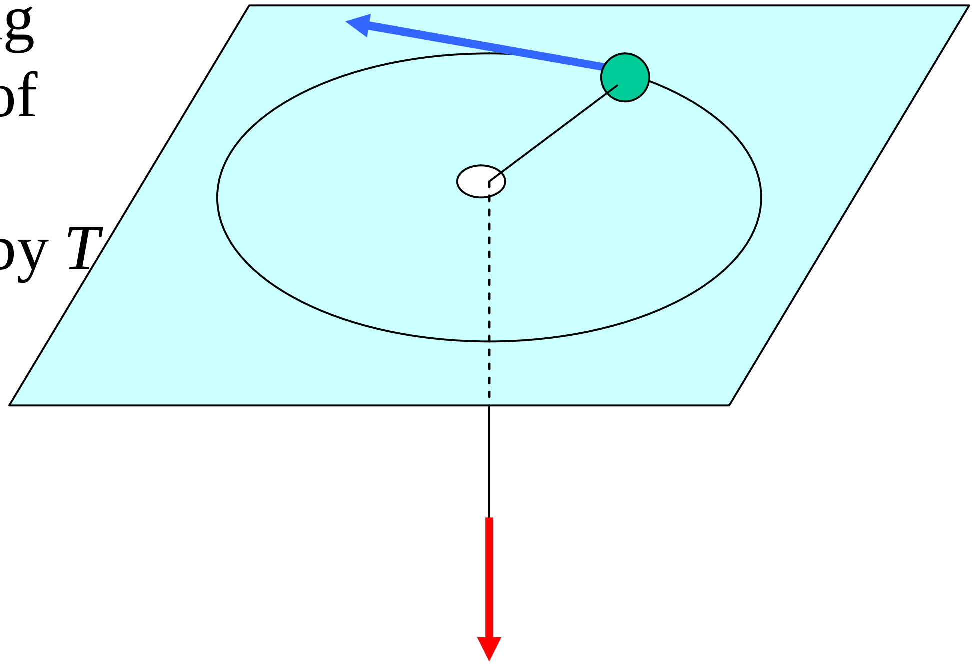
問題3：中心力による運動(10.42,10.103)

A small block on a frictionless, horizontal surface has a mass of m = 0.25kg. It is attached to a massless string passing through a hole in the surface. The block is originally revolving at a distance of r_1 = 0.40 m from the hole with an angular speed of ω_1 = 2.00 rad/s. The string is then slowly pulled from below, reducing the radius of the circle in which the block revolves to r_2 = 0.20 m.

1)What is the new angular speed?

2)Find the change in kinetic energy of the block.

3)Find the tension T in the string as a function of r, the distance of the block from the hole. Then, calculate the work done by T as r changes from r_1 to r_2.



1) **角運動量保存** $I_1 = mr_1{}^2 \quad I_2 = mr_2{}^2$

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \quad \omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 = \frac{r_1{}^2}{r_2{}^2}\omega_1 = \frac{0.40^2}{0.20^2}\times 2.00 = 8.00(\text{rad/s})$$

2) $K_2 - K_1 = \dfrac{1}{2}I_2\omega_2{}^2 - \dfrac{1}{2}I_1\omega_1{}^2$

$$= \frac{1}{2}\times 0.25\times(0.20^2\times 8.00^2 - 0.40^2\times 2.00^2) = 0.24(\text{J})$$

3) $I_1\omega_1 = I\omega \quad \omega = \dfrac{I_1\omega_1}{I} = \dfrac{mr_1{}^2}{mr^2}\omega_1 = \dfrac{r_1{}^2}{r^2}\omega_1$

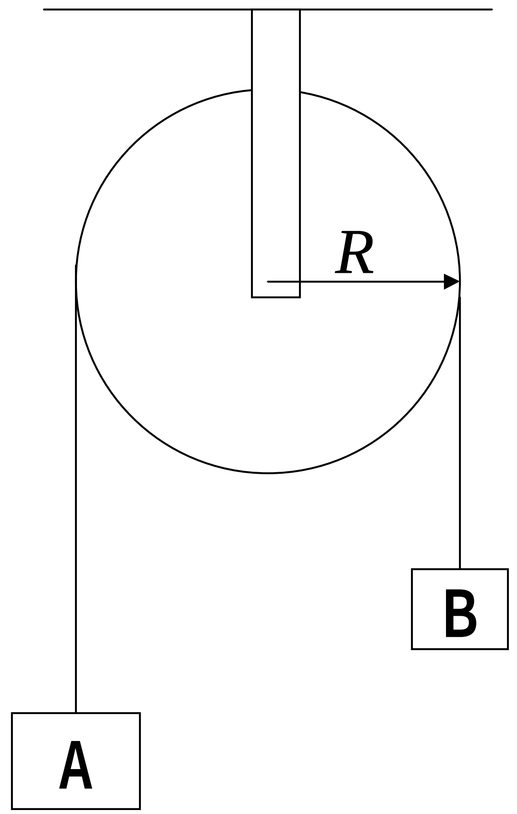
$$T(r) = m\frac{v^2}{r} = mr\omega^2 = mr\left(\frac{r_1{}^2}{r^2}\omega_1\right)^2 = \frac{mr_1{}^4\omega_1{}^2}{r^3}$$

$$W = \int_{r_1}^{r_2}\{-T(r)\}dr = \int_{r_1}^{r_2}\left\{-\frac{mr_1{}^4\omega_1{}^2}{r^3}\right\}dr = mr_1{}^4\omega_1{}^2\left[\frac{r^{-2}}{2}\right]_{r_1}^{r_2}$$

$$= \frac{mr_1{}^4\omega_1{}^2}{2}\left(\frac{1}{r_2{}^2} - \frac{1}{r_1{}^2}\right) = \frac{mr_2{}^2\omega_2{}^2}{2} - \frac{mr_1{}^2\omega_1{}^2}{2} = K_2 - K_1 = 0.24(\text{J})$$

問題4：運動方程式(10.67)
Atwood's Machine

Find the linear acceleration a of blocks A and B, the angular acceleration α of the wheel C, and the tension T_A and T_B in each side of the cord if there is no slipping between the cord and the surface of the wheel. The masses of blocks A and B are m_A and m_B, respectively. The wheel has moment of inertia I and radius R.



$$a_{\mathrm{A}} = a_{\mathrm{B}} = a$$

未知数4つ　$a, \alpha, T_{\mathrm{A}}, T_{\mathrm{B}}$

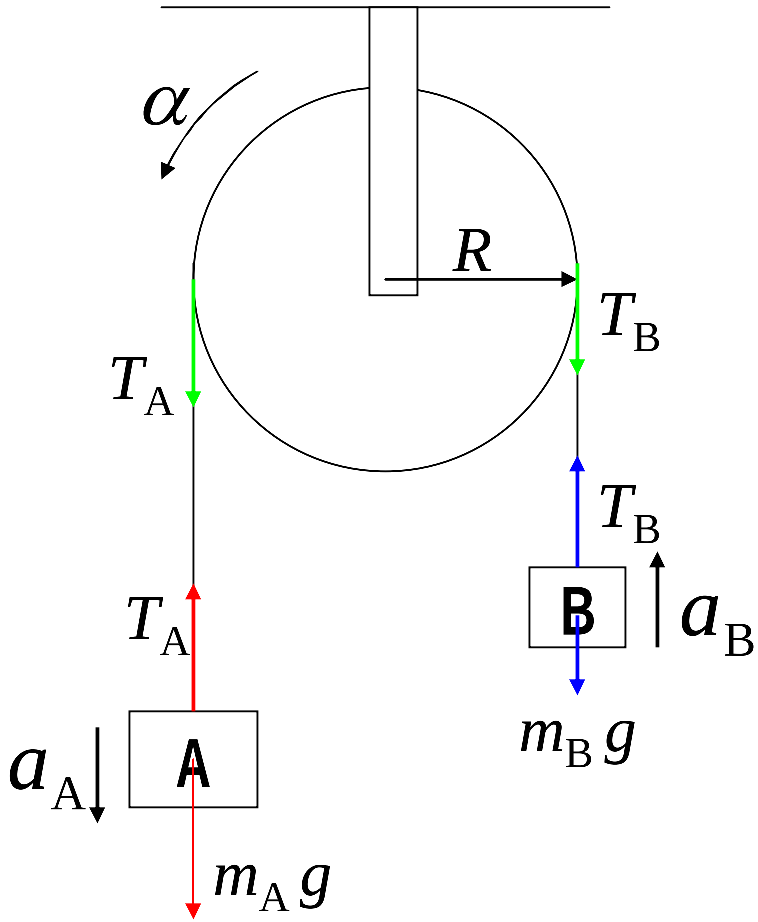
$$m_{\mathrm{A}} a = m_{\mathrm{A}} g - T_{\mathrm{A}}$$

$$m_{\mathrm{B}} a = T_{\mathrm{B}} - m_{\mathrm{B}} g$$

$$I\alpha = (T_{\mathrm{A}} - T_{\mathrm{B}})R$$

$$R\alpha = a$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{m_{\mathrm{A}} - m_{\mathrm{B}}}{I/R^2 + m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}} g \\[2ex] \alpha = \dfrac{a}{R} \\[2ex] T_{\mathrm{A}} = m_{\mathrm{A}}(g - a) = \dfrac{I/R^2 + 2m_{\mathrm{B}}}{I/R^2 + m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}} m_{\mathrm{A}} g \\[2ex] T_{\mathrm{B}} = m_{\mathrm{B}}(a + g) = \dfrac{I/R^2 + 2m_{\mathrm{A}}}{I/R^2 + m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}} m_{\mathrm{B}} g \end{cases}$$



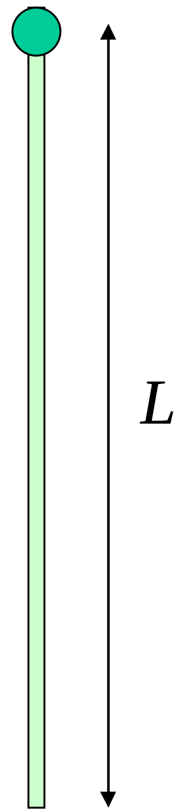
問題5：バランスを取るには？(10.66)

Attached to one end of a long, thin, uniform rod of length L and mass M is a small blob of clay of the same mass M.

1)Locate the position of the center of mass of the system of rod and clay.

2)You carefully balance the rod on a frictionless tabletop so that it is standing vertically, with the end *without* the clay touching the table. If the rod is now tipped so that it is a small angle θ away from the vertical, determine its angular acceleration at this instant. Assume that the end without the clay remains in contact with the tabletop.

3)You again balance the rod on the frictionless tabletop so that it is standing vertically, but now the end of the rod *with* the clay is touching the table. If the rod is again tipped so that it is a small angle θ away from the vertical, determine its angular acceleration at this instant. Assume that the end with the clay remains in contact with the tabletop.



University Physics

1) おもりのある端から$L/4$（右図）。

2) 角度θ傾いたとき、重力によるトルクは

$$\tau = (3L/4)(2Mg)\sin\theta = (3Mg\,L/2)\sin\theta$$

$$I\alpha = \tau$$

$$I = ML^2 + (1/3)ML^2 = (4/3)ML^2$$

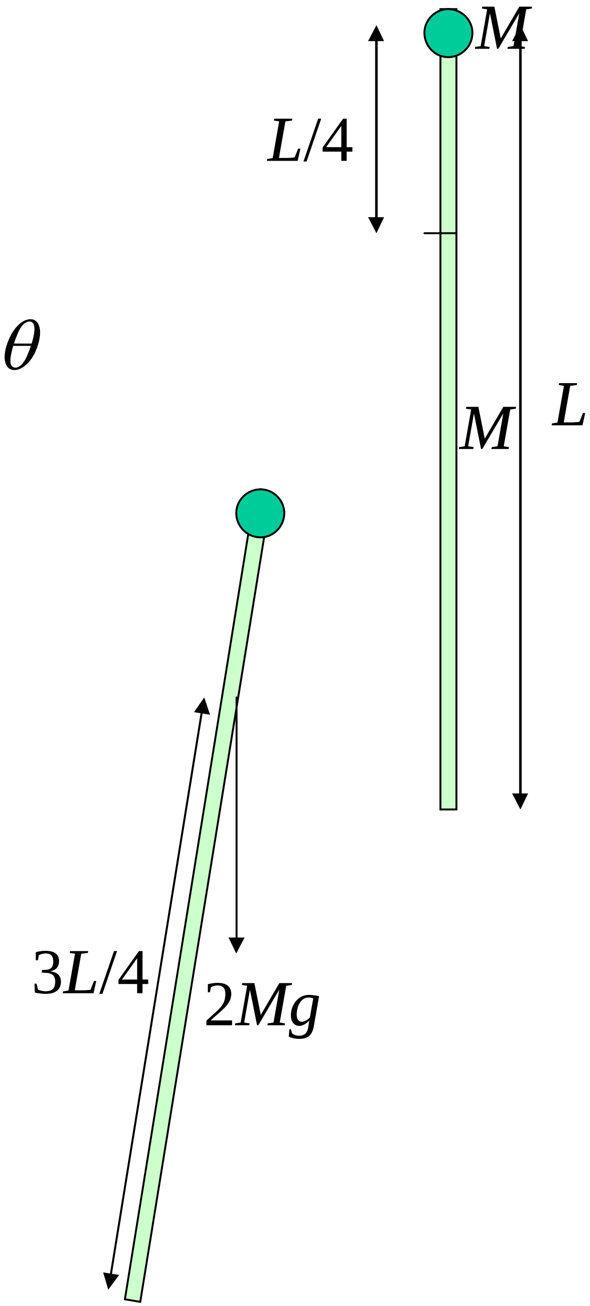
$$\alpha = (9g/8L)\sin\theta$$

3)

$$(L/4)(2Mg)\sin\theta = (Mg\,L/2)\sin\theta$$

$$I = (1/3)ML^2$$

$$\alpha = (3g/2L)\sin\theta$$

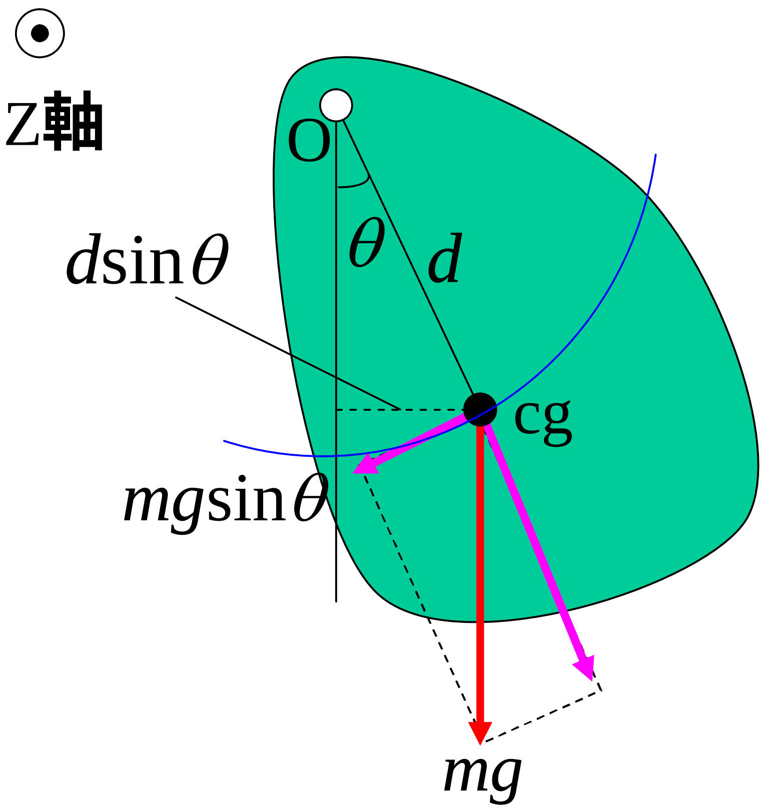


実体振り子 (物理振り子、剛体振り子)

physical pendulum

p.168

回転軸Oの周りの慣性モーメント I
Oから重心(cg)までの距離 d



$$I\alpha_z = \tau_z$$

$$\tau_z = -(mg)(d\sin\theta)$$

$$\tau_z = -(mgd)\theta$$

$$\alpha_z = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgd}{I}\theta$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

質量を無視できる長さdの細い棒の
先端の質量mの質点　$I=md^2$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{md^2}} = \sqrt{\frac{g}{d}}$$

単振り子
Simple pendulum

恐竜の歩く速度を化石から推定するには？

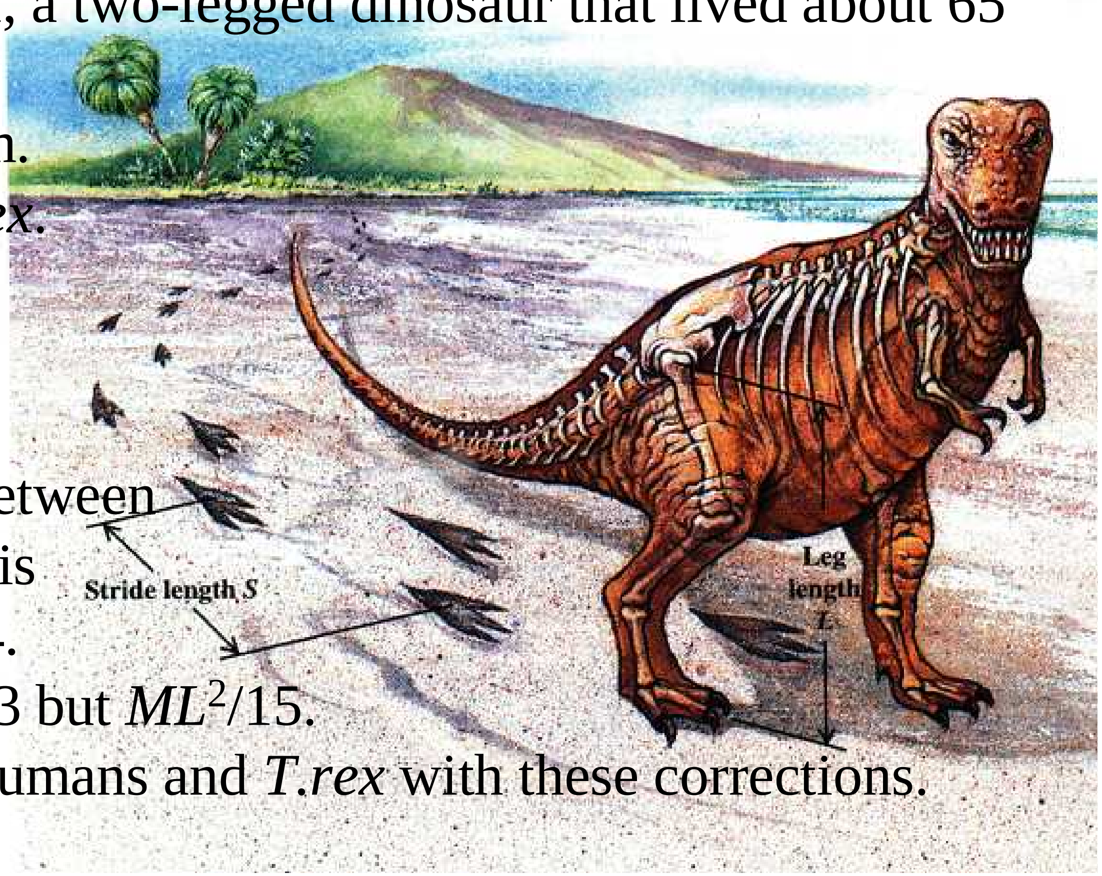
問題6： 動物の自然な歩行速度(Ex.14.10)

All walking animals, including humans, have a natural walking pace, a number of steps per minute that is more comfortable than a faster or slower pace. Suppose that this pace corresponds to the oscillation of the leg as a physical pendulum.

1)How does this pace depend on the length *L* of the leg from hip to foot. Treat the leg as a uniform rod pivoted at the hip joint.

2)Fossil evidence shows that *T.rex*, a two-legged dinosaur that lived about 65 million years ago, had a leg length L=3.1m and a stride length S=4.0m. Estimate the walking speed of *T.rex*.

3)A uniform rod isn't a very good model for a leg. The legs of many animals are tapered; there is more mass between hip and knee than between knee and foot. The center of mass is not $L/2$ from the hip, but about $L/4$. The moment of inertia is not $ML^2/3$ but $ML^2/15$. Reestimate the walking speed of humans and *T.rex* with these corrections.



University Physics

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{ML^2/3}{MgL/2}}=2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}=2\pi\sqrt{\frac{2\times 3.1}{3\times 9.8}}=2.9\,[\mathrm{s}]$$

$$v=S/T=4.0/2.9=1.4\,[\mathrm{m/s}]=5.0\,[\mathrm{km/h}]$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{ML^2/15}{MgL/4}}=4\pi\sqrt{\frac{L}{15g}}$$

恐竜 $L=3.1\ \mathrm{m}, S=4.0\ \mathrm{m}$

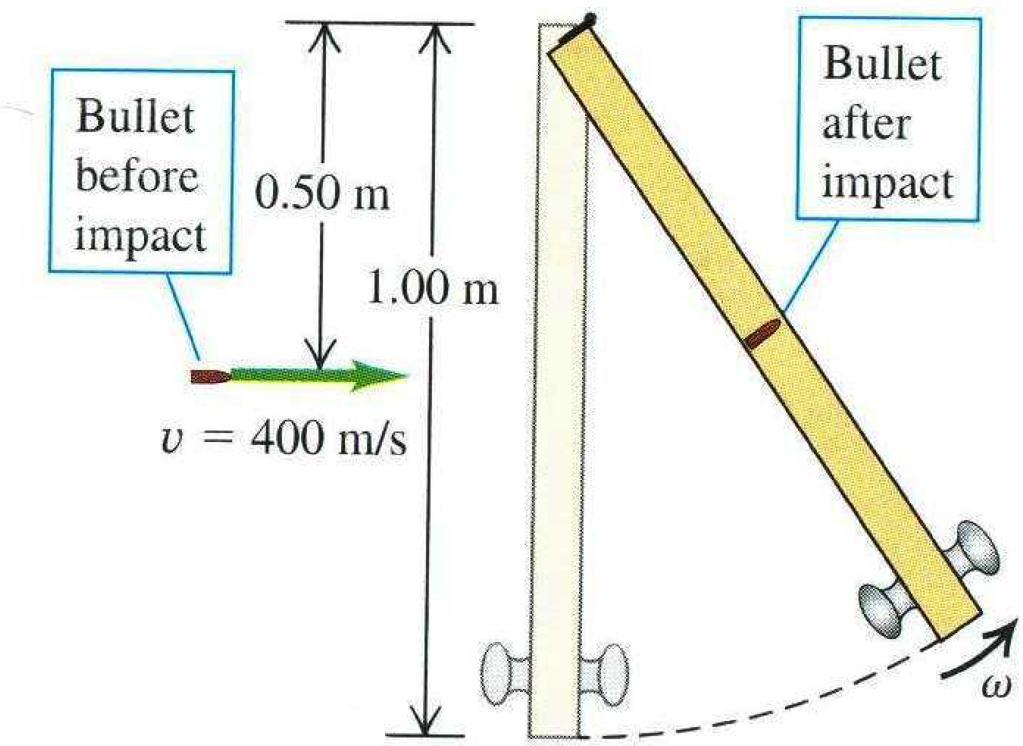
$$T=4\pi\sqrt{\frac{3.1}{15\times 9.8}}=1.8\,[\mathrm{s}]\quad v=S/T=4.0/1.8=2.2\,[\mathrm{m/s}]=7.9\,[\mathrm{km/h}]$$

ヒト $L=1.0\ \mathrm{m}, S=1.0\ \mathrm{m}$

$$T=4\pi\sqrt{\frac{1.0}{15\times 9.8}}=1.0\,[\mathrm{s}]\quad v=S/T=1.0/1.0=1.0\,[\mathrm{m/s}]=3.6\,[\mathrm{km/h}]$$

問題7：角運動量保存(Ex. 10.12)

A door 1.0 m wide, of mass 15 kg, can rotate freely about a vertical axis through its hinges. A bullet with a mass of 10 g and a speed of 400 m/s strikes the center of the door, in a direction of perpendicular to the plane of the door, and embeds itself there. Find the door's angular speed. Is kinetic energy conserved?



衝突前の全角運動量

$$L = mv\ell = (0.010\ \text{kg})(400\ \text{m/s})(0.50\ \text{m}) = 2.0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$$

衝突後の全角運動量　$I\omega$　**ここで**

$$I = I_{\text{door}} + I_{\text{bullet}}$$

$$I_{\text{door}} = Md^2/3 = (15\ \text{kg})(1.0\ \text{m})^2/3 = 5.0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_{\text{bullet}} = M\ell^2 = (0.010\ \text{kg})(0.50\ \text{m})^2 = 0.0025\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$\omega = L/I$$

$$= (2.0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})/(5.0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 + 0.0025\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)$$

$$= 0.40\ \text{rad/s}$$

参考：衝突前後の運動エネルギーの変化

$$K_1 = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0.010\ \text{kg})(400\ \text{m/s})^2 = 800\ \text{J}$$

$$K_2 = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(5.0025\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(0.40\ \text{rad/s})^2 = 0.40\ \text{J}$$

剛体の平面運動
(回転軸が向きを変えない)

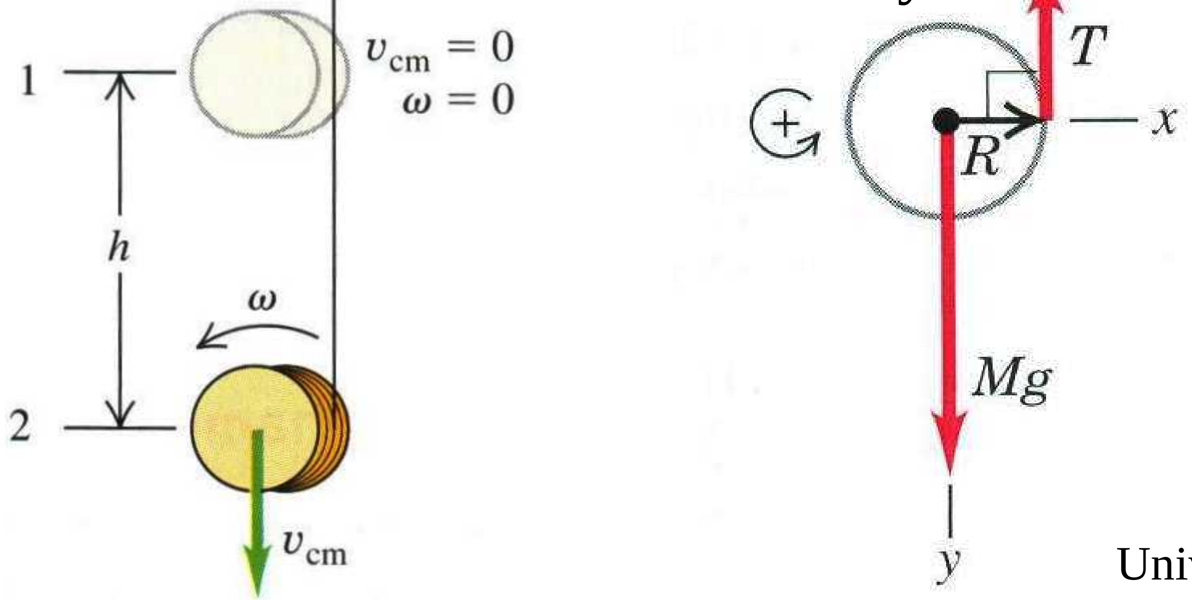
問題8：ヨーヨー(Ex.10.4,10.6)

A primitive yo-yo is made by wrapping a massless string several times around a solid cylinder with mass M and radius R. You hold the end of the string stationary while releasing the cylinder with no initial motion. The string unwinds but does not slip or stretch as the cylinder descends and rotates.

1) Find the speed v_{cm} of the center of mass of the cylinder after it has descended a distance h.

2) Find the downward acceleration of the cylinder and the tension in the string.

3) Find the acceleration and the tension when the cylinder is ascending.



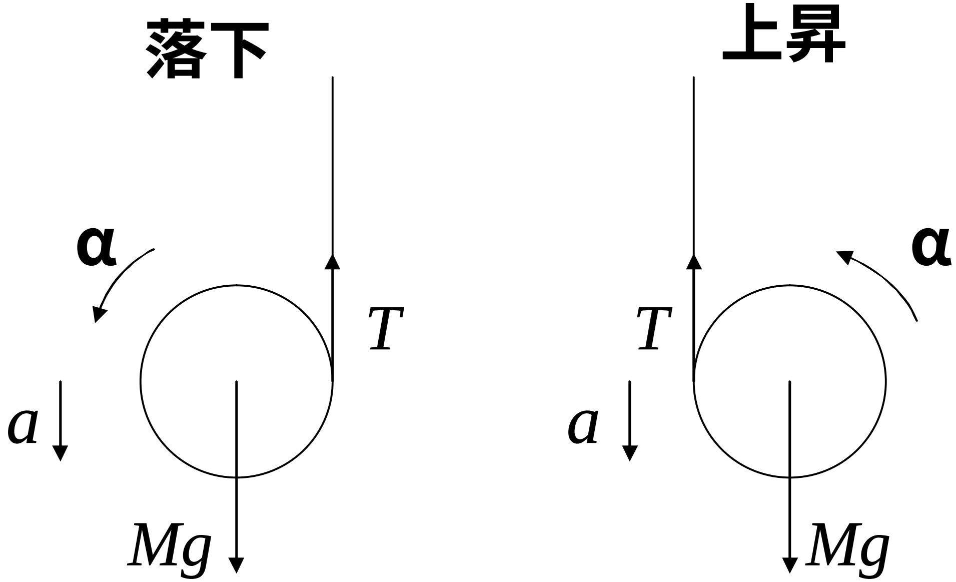
University Physics

1) $$K_2=\frac{1}{2}M{v_{\mathrm{cm}}}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v_{\mathrm{cm}}}{R}\right)=\frac{3}{4}M{v_{\mathrm{cm}}}^2$$

$$K_1+U_1=K_2+U_2$$

$$0+Mgh=\frac{3}{4}M{v_{\mathrm{cm}}}^2+0$$

$$v_{\mathrm{cm}}=\sqrt{\frac{4}{3}gh}$$



2) $$\begin{cases} Ma=Mg-T \\ I\alpha=TR \\ a=R\alpha \end{cases}$$

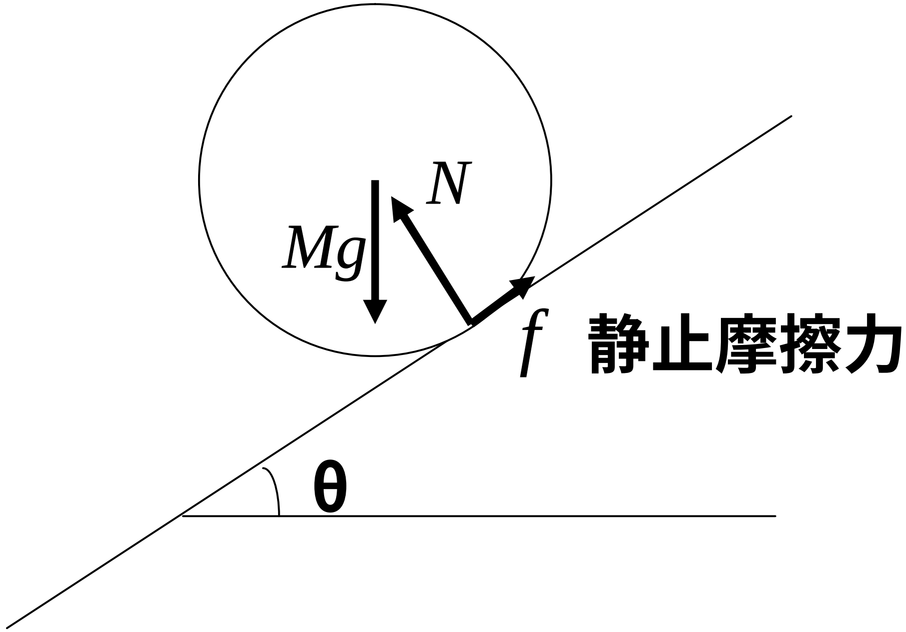
$I=\frac{1}{2}MR^2$より　$a=\frac{2}{3}g$,　$T=\frac{1}{3}Mg$,　$\alpha=\frac{2}{3}\frac{g}{R}$

3) **右図のように向きを定義すると** $\begin{cases} Ma=Mg-T \\ I\alpha=-TR \\ a=-R\alpha \end{cases}$　$a=\frac{2}{3}g$,　$T=\frac{1}{3}Mg$,　$\alpha=-\frac{2}{3}\frac{g}{R}$

問題9：斜面

p.178

質量 M、半径 r、中心軸の周りの慣性モーメント I の円板が、水平面から角度θ傾いた斜面に沿ってすべらずに転がり落ちるときの、斜面に沿っての重心の加速度 a を求めよ。



注意：すべらないで転がる限り、各瞬間に円板の接点は斜面に対して静止している。従ってはたらく摩擦力は静止摩擦力である。

$$\begin{cases} Ma = Mg\sin\theta - f \\ I\alpha = rf \\ a = r\alpha \end{cases}$$

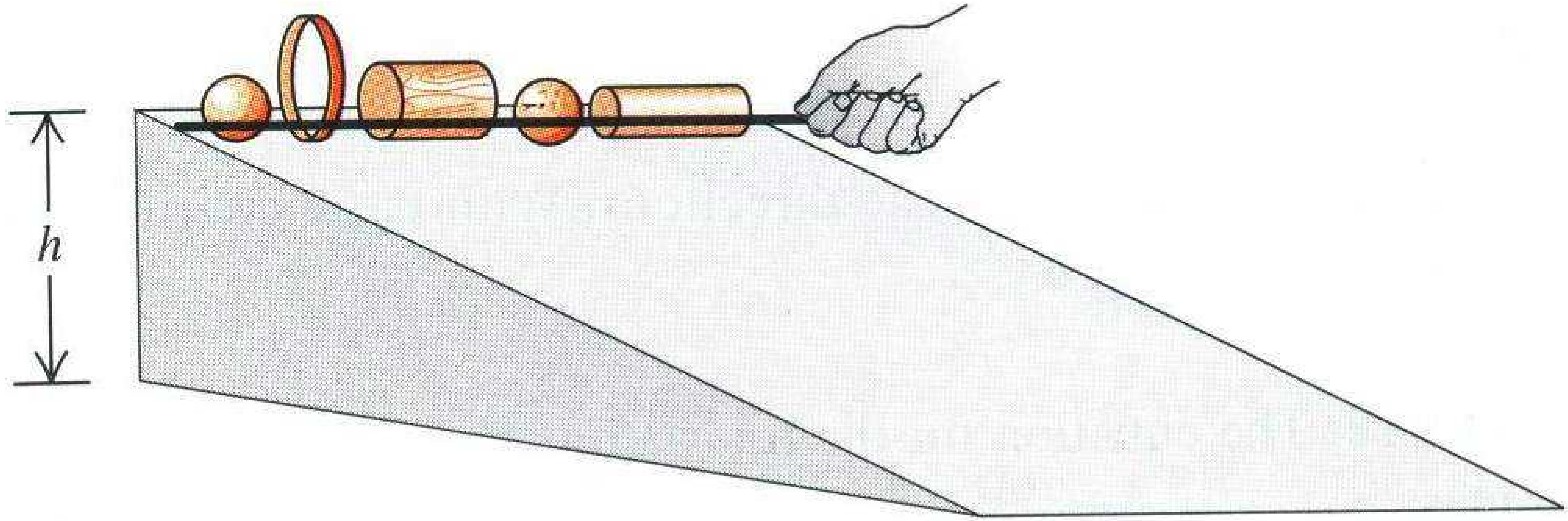
$$a = \frac{Mg\sin\theta}{M + I/r^2}$$

$I = \frac{1}{2}Mr^2$(円柱、円板)のとき$a = \frac{2}{3}g\sin\theta$

$I = \frac{2}{5}Mr^2$(球)のとき$a = \frac{5}{7}g\sin\theta$

問題10：　回転体の斜面レース(Ex.10.5)

Various round rigid bodies are released from rest at the top of an inclined plane. They roll down the incline without slipping. Which body reaches the bottom of the incline first, and why?



University Physics

回転体の慣性モーメント

cを定数として　$I_{\mathrm{cm}} = cMR^2$ と表せる

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$0 + Mgh = \frac{1}{2}M{v_{\mathrm{cm}}}^2 + \frac{1}{2}cMR^2\left(\frac{v_{\mathrm{cm}}}{R}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}(1+c)M{v_{\mathrm{cm}}}^2$$

$$v_{\mathrm{cm}} = \sqrt{\frac{2gh}{1+c}}$$

結果は回転体の質量M、半径Rによらない

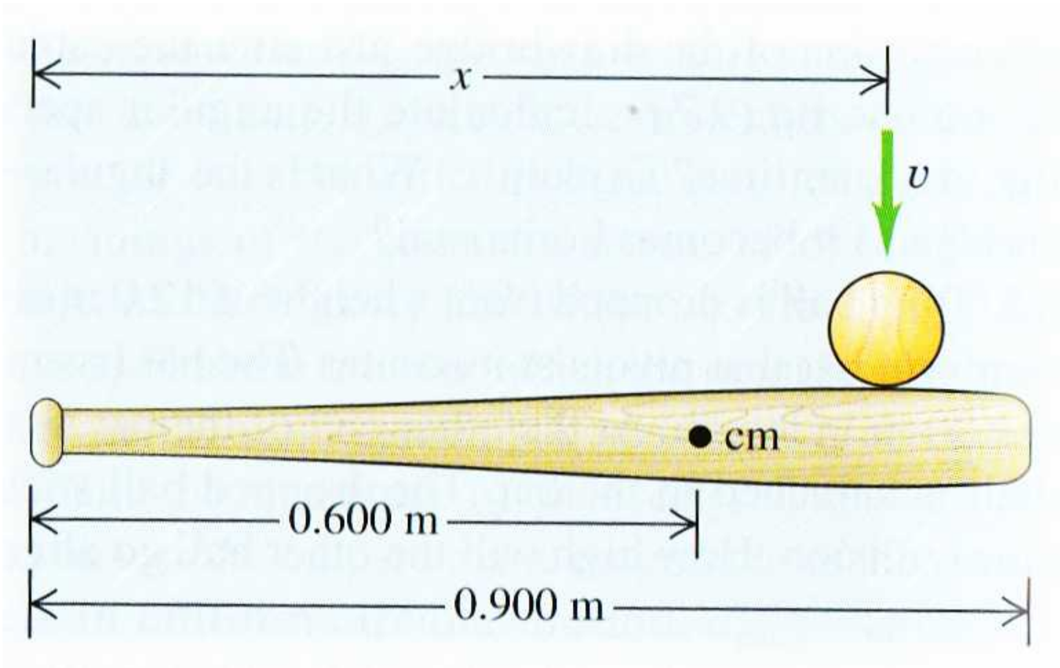
順位　1. (一様) 球　2. (一様) 円柱　3. (薄い) 球殻　4. (薄い) 円筒

$c = 2/5$　$c = 1/2$　$c = 2/3$　$c = 1$

問題11　バットの芯（衝撃の中心） 10.99

center of percussion

A baseball bat rests on a frictionless, horizontal surface. The bat has a length of 0.90 m, a mass of 0.80 kg, and its center of mass is 0.60 m from the handle end of the bat.The moment of inertia of the bat about its center of mass is 0.053 kg･m^2. The bat is struck by a baseball traveling perpendicular to the bat. The impact applies an impulse $J = \int_{t_1}^{t_2} F dt$ at a point a distance x from the handle end of the bat. What must x be so that the handle end of the bat remains at rest as the bat begins to move?

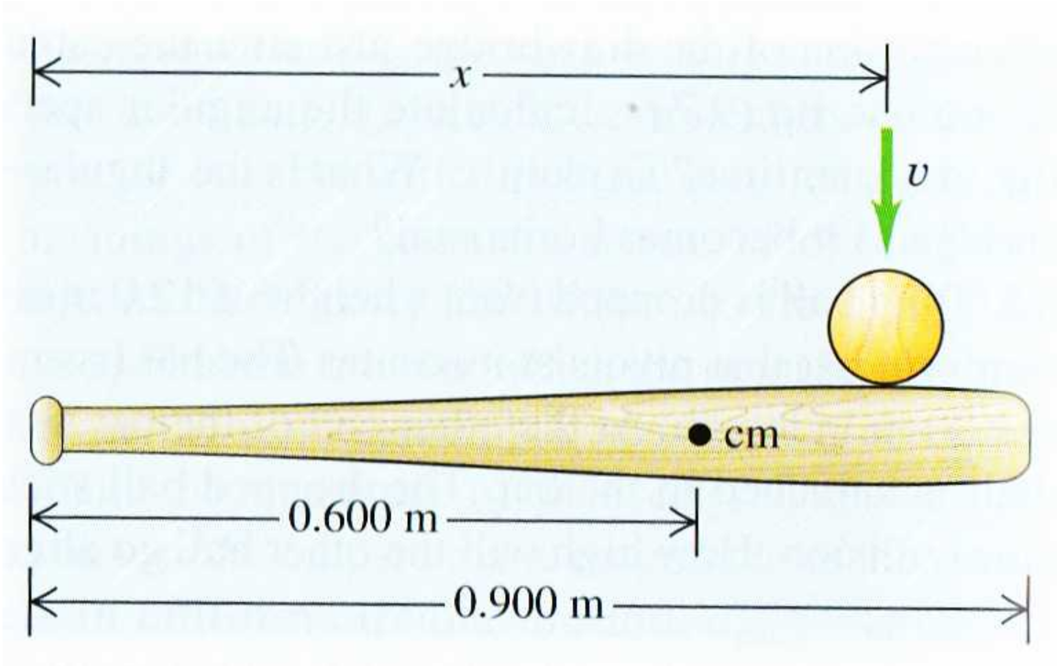


University Physics

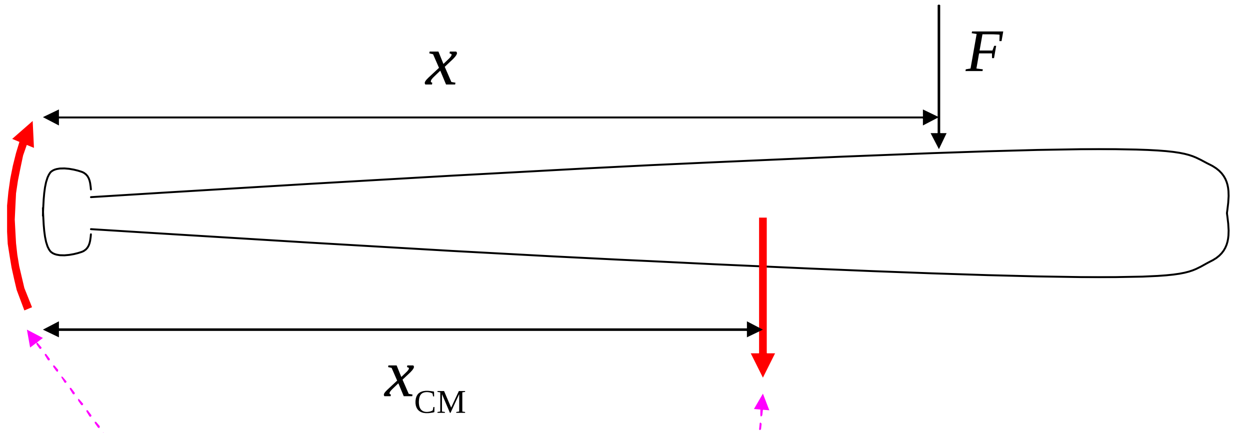
問題11　バットの芯（衝撃の中心） 10.99

center of percussion

Hint: Consider the motion of the center of mass and the rotation about the center of mass. Find *x* so that these two motions combine to give *v*=0 for the end of the bat just after the collision. Also, note that integration of Eq.(10.29) gives $\Delta L = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum \tau \right) dt$. The point on the bat you have located is called the *center of percussion*. Hitting a pitched ball at the center of percussion of the bat minimizes the “sting” the batter experiences on the hands.



University Physics



質量M

慣性モーメントI

ボールと衝突後のバットの重心の速度v_{CM}

重心の回りの角速度ω

$$J = \int F dt = M v_{\mathrm{CM}}$$

$$L = I\omega = \int (x - x_{\mathrm{CM}}) F dt = (x - x_{\mathrm{CM}}) M v_{\mathrm{CM}}$$

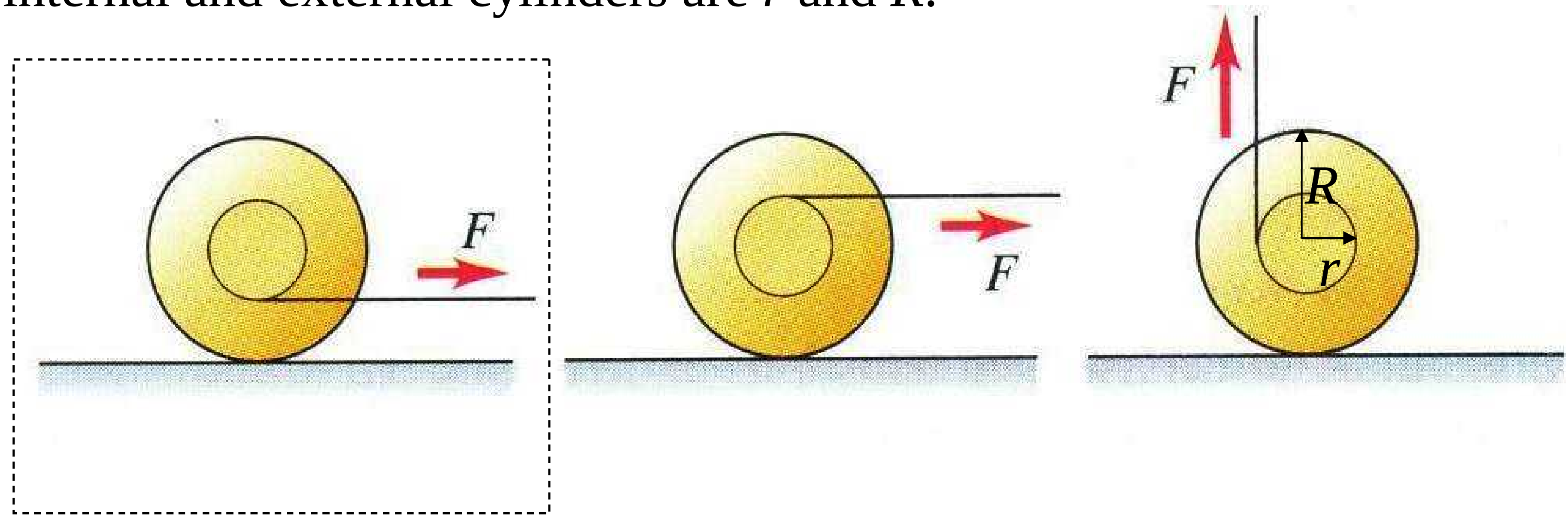
静止する条件　$x_{\mathrm{CM}}\omega - v_{\mathrm{CM}} = 0$

より、$x = \dfrac{I + M x_{\mathrm{CM}}{}^2}{M x_{\mathrm{CM}}} = x_{\mathrm{CM}} + \dfrac{I}{M x_{\mathrm{CM}}} = 0.6 + \dfrac{0.053}{0.8 \cdot 0.6} = 0.71\mathrm{m}$

問題12：水平面のヨーヨー

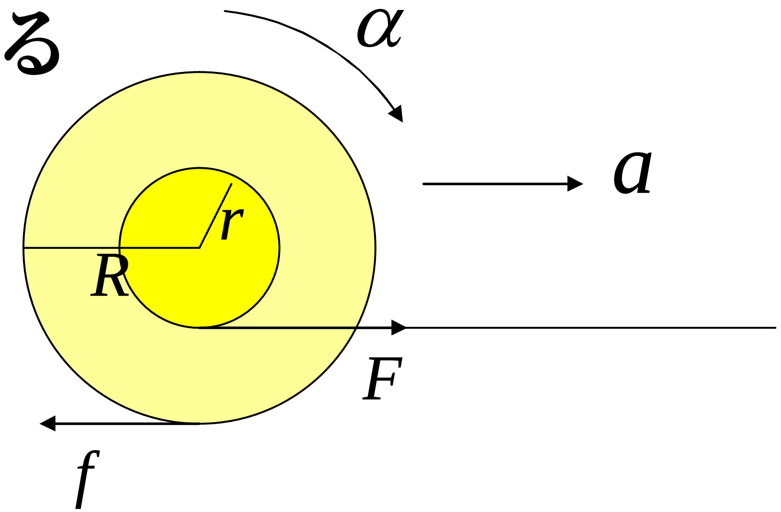
Figure shows three identical yo-yos initially at rest on a horizontal surface. For each yo-yo, the string is pulled in the direction shown. In each case, there is sufficient friction for the yo-yo to roll without slipping. Draw the free-body diagram for each yo-yo. In what direction will each yo-yo rotate?

Find the acceleration of each yo-yo, by assuming that the mass and the moment of inertia of the yo-yo are M and I, and that the radii of the internal and external cylinders are r and R.



University Physics

図のように正の向きをとる



$$\begin{cases} Ma = F - f \\ I\alpha = Rf - rF \\ R\alpha = a \end{cases}$$

$$a = \frac{(R-r)F}{MR + I/R} \quad (>0\text{なので右向きに動く})$$

参考

$$f = \frac{MRr + I}{MR^2 + I} F < F$$

図と違う向きをとっても、式の
符号を正しく設定すれば解ける

問題13：すべり運動 10.101

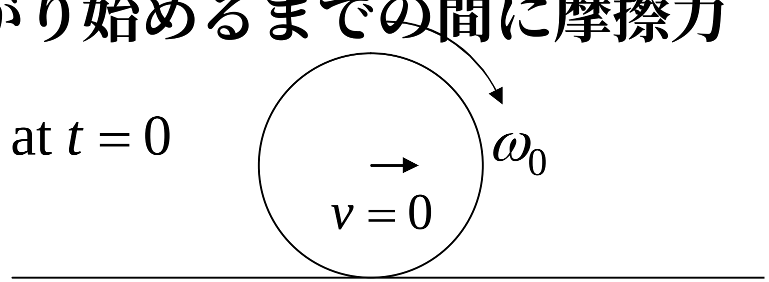
回転体が水平面をすべらないで回転するとき、摩擦力は無視できて、並進加速度aと角加速度αはゼロ、並進速度vと角速度ωは一定と置ける。すべらないで転がるという条件から、回転体の半径をrとすると$v=r\omega$、$a=r\alpha$が成り立つ。もし、この条件が満たされない初期条件で回転体を水平面に置くと、この2つの等式が成り立つようになるまで回転体はすべり運動を起こし、動摩擦力が働く。

角速度ω_0で回転している、質量M、半径Rの円柱を動摩擦係数がμの水平面に静かに置くと、円柱は$\omega=\omega_0$、$v=0$の初期条件で運動を始める。

1）このとき、円柱の並進加速度aと角加速度αを求めよ。

2）すべらないで転がる条件$v=r\omega$が満たされるまでの円柱の移動距離を求めよ。

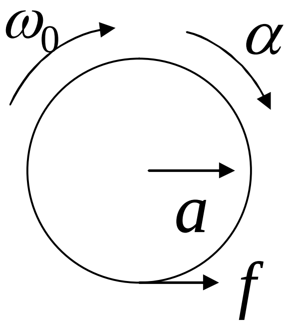
3）水平面に置いてから、すべらないで転がり始めるまでの間に摩擦力によって円柱にされた仕事を求めよ。



University Physics

1) $I = \dfrac{1}{2}MR^2$

$$\begin{cases} Ma = f \\ I\alpha = -Rf \\ N = Mg \\ f = \mu_k N \end{cases}$$



$$\begin{cases} a = \mu_k g \\ \alpha = -\dfrac{2\mu_k g}{R} \end{cases}$$

2) $t = T$ に $v = R\omega$ となる

$$\begin{cases} v = R\omega \\ v = 0 + aT \\ \omega = \omega_0 + \alpha T \end{cases}$$

$$T = \frac{R\omega_0}{3\mu_k g}$$

$$d = \frac{1}{2}aT^2 = \frac{R^2\omega_0{}^2}{18\mu_k g}$$

3) **エネルギー保存** $\begin{cases} \dfrac{1}{2}I\omega_0{}^2 + W = \dfrac{1}{2}I\omega^2 + \dfrac{1}{2}Mv^2 \\ v = R\omega \end{cases}$

$$W = -\frac{1}{6}MR^2\omega_0{}^2$$

剛体の空間（3次元）運動
（回転軸が向きを変える）

3次元空間での回転

無限小回転角 $d\phi$

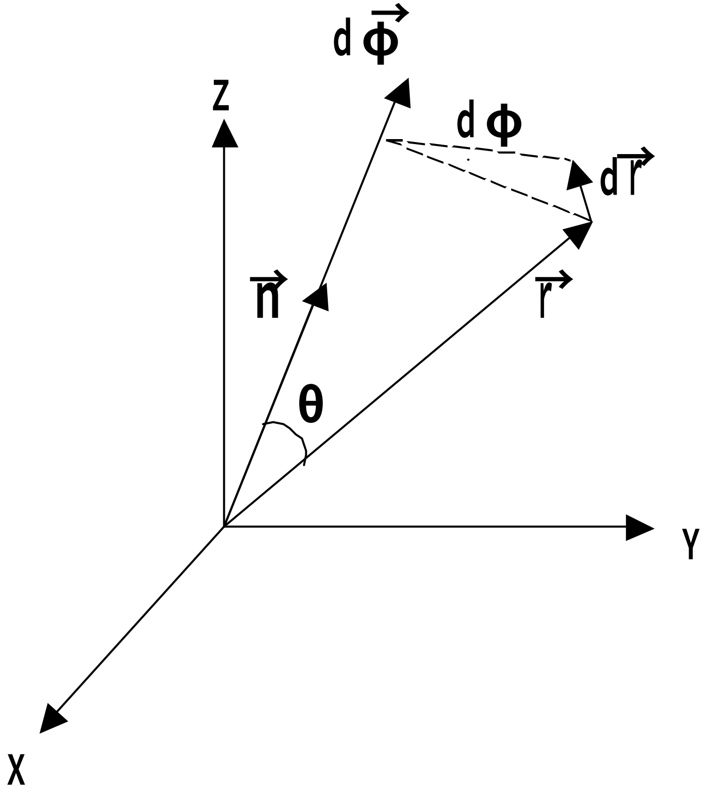
$$dr = r\sin\theta\, d\phi$$

$$d\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{r}}\,d\phi$$

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} = \vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{r}}\,\frac{d\phi}{dt}$$

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \vec{\boldsymbol{n}}\omega = \vec{\boldsymbol{n}}\frac{d\phi}{dt}$$

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{\omega}}\times\vec{\boldsymbol{r}}$$



3次元空間での角運動量

p.156

$$I\frac{d\omega}{dt}=\tau$$

$$\frac{d(I\omega)}{dt}=\tau$$

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{L}}}{dt}=\frac{d(I\vec{\boldsymbol{\omega}})}{dt}=\vec{\boldsymbol{\tau}}=\vec{\boldsymbol{r}}\times\vec{\boldsymbol{F}}$$

$\vec{\boldsymbol{L}}\equiv\vec{\boldsymbol{r}}\times\vec{\boldsymbol{p}}=\vec{\boldsymbol{r}}\times m\vec{\boldsymbol{v}}$: 角運動量と定義すると

$$\frac{d(\vec{\boldsymbol{L}})}{dt}=\frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}\times m\vec{\boldsymbol{v}}+\vec{\boldsymbol{r}}\times m\frac{d\vec{\boldsymbol{v}}}{dt}=\vec{\boldsymbol{r}}\times m\vec{\boldsymbol{a}}=\vec{\boldsymbol{r}}\times\vec{\boldsymbol{F}}$$

$$\vec{\boldsymbol{L}}=\sum_i\vec{\boldsymbol{r}}_i\times\vec{\boldsymbol{p}}_i$$

慣性テンソル

一般には I はスカラーでなくテンソル

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$より、$\vec{L} \equiv \vec{r} \times m(\vec{\omega} \times \vec{r})$

剛体では$\sum_i \vec{r}_i \times m_i(\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$

$\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$で計算

$$I = \begin{pmatrix} I_{XX} & I_{XY} & I_{XZ} \\ I_{YX} & I_{YY} & I_{YZ} \\ I_{ZX} & I_{ZY} & I_{ZZ} \end{pmatrix}$$

$I_{XX} = \sum_i m_i({y_i}^2 + {z_i}^2)$　慣性モーメント

$I_{XY} = -\sum_i m_i x_i y_i$　慣性乗積

問：Iの成分がこのように
なることを確認せよ

$L_j = \sum_k I_{jk}\omega_k$　一般に$\vec{\omega}$と$\vec{L}$の向きは異なる

一般の回転の運動方程式

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{L}}}{dt}=\frac{d(I\vec{\boldsymbol{\omega}})}{dt}=\vec{\boldsymbol{\tau}}$$

$$\frac{dL_j}{dt}=\frac{d(I_{jk}\omega_k)}{dt}=\tau_j$$

固定軸の周りの回転、または回転軸が向きを変えない場合、
I が一定となり簡単。しかし、回転軸が剛体の対称軸に一致しないときは、一般に$\vec{L}$ と$\vec{\omega}$ の向きは異なり、$\vec{\omega}$ は時間とともに向きを変える。$\vec{\omega}$ を一定にするには外力によるトルクが必要である ($\vec{L}$ が向きを変えるので)。
静止座標系のI は回転軸の時間変化に伴って変化するので、上式を解くのは困難。そこで、物体とともに回転する座標系を用いる。

剛体のオイラーの運動方程式

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{L}}}{dt} = \frac{\delta\vec{\boldsymbol{L}}}{\delta t} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{L}} = \vec{\boldsymbol{\tau}}$$

$\dfrac{\delta}{\delta t}$ は剛体とともに回転する座標系での時間微分

剛体に固定した座標軸をうまく選べば、慣性乗積をすべてゼロにできる（慣性主軸）。このとき

$$L_1 = I_{11}\omega_1 \equiv I_1\omega_1 \quad L_2 = I_{22}\omega_2 \equiv I_2\omega_2 \quad L_3 = I_{33}\omega_3 \equiv I_3\omega_3$$

Eulerの運動方程式

$$\begin{cases} I_1 \dfrac{\delta\omega_1}{\delta t} + (I_3 - I_2)\omega_3\omega_2 = \tau_1 \\ I_2 \dfrac{\delta\omega_2}{\delta t} + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 = \tau_2 \\ I_3 \dfrac{\delta\omega_3}{\delta t} + (I_2 - I_1)\omega_2\omega_1 = \tau_3 \end{cases}$$

重心運動		角運動	
座標	$\vec{r}$	角座標	$\vec{\theta}$ (回転軸の方向不変)
速度	$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$	角速度	$\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\theta}}{dt}$
加速度	$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$	角加速度	$\vec{\alpha} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{\theta}}{dt^2}$
質量	M	慣性モーメント	$I = \sum_i m_i r_i^2$
力	$\vec{F}$	トルク	$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$
運動量	$\vec{p} = M\vec{v}$	角運動量	$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i = I\vec{\omega}$
運動エネルギー	$T = \dfrac{1}{2} M v^2$		$K = \dfrac{1}{2} I\omega^2$
運動方程式	$\dfrac{d\vec{p}}{dt} = M\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$		$\dfrac{d\vec{L}}{dt} = I\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \sum \vec{\tau}$

角座標ベクトル $\vec{\theta}$ が定義できるのは回転軸の方向が変わらない場合のみ

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \qquad\qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

…

$$\vec{p} = M\vec{v} = \text{const.} \qquad\qquad \vec{L} = I\vec{\omega} = \text{const.}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \frac{\vec{p}}{M}t = \vec{r}_0 + \vec{v}t \qquad\qquad \vec{\theta} = \vec{\theta}_0 + \frac{\vec{L}}{I}t = \vec{\theta}_0 + \vec{\omega}t$$

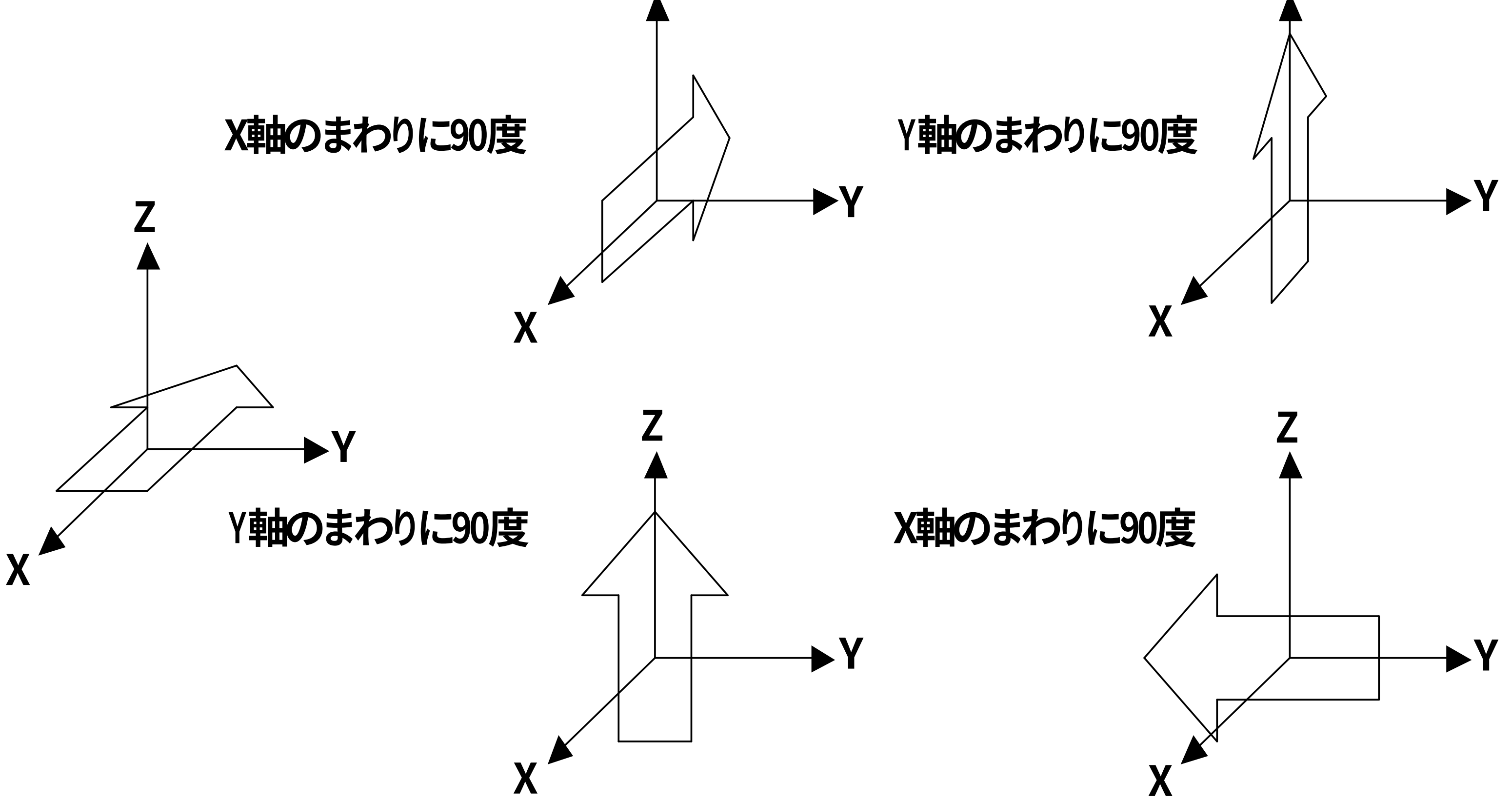
一般には $\vec{\omega}$ は任意の方向を取れるので $\vec{\theta}$ は $\vec{\omega}$ の時間積分として表せない

$\vec{L} = 0$ **から** $\vec{\theta} = \text{const.}$ **とはできない**

もし$\vec{\theta}$が$\vec{\omega}$の時間積分として表せるなら

$$\theta_X(t) - \theta_X(0) = \int_0^t \omega_X(t')dt' \qquad \vec{\boldsymbol{\omega}} = \begin{pmatrix} \omega_X(t) \\ \omega_Y(t) \\ \omega_Z(t) \end{pmatrix} \qquad \vec{\boldsymbol{\theta}}(t) = \begin{pmatrix} \theta_X(t) \\ \theta_Y(t) \\ \theta_Z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi/2 \\ \pi/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

しかし



X,Y,Z軸のまわりの回転

X，Y，Z軸まわりの回転 $\theta_X, \theta_Y, \theta_Z$

$$\Theta_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_X & -\sin\theta_X \\ 0 & \sin\theta_X & \cos\theta_X \end{pmatrix}$$

$$\Theta_Y = \begin{pmatrix} \cos\theta_Y & 0 & \sin\theta_Y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_Y & 0 & \cos\theta_Y \end{pmatrix}$$

$$\Theta_Z = \begin{pmatrix} \cos\theta_Z & -\sin\theta_Z & 0 \\ \sin\theta_Z & \cos\theta_Z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

無限小回転 $\delta\theta_X, \delta\theta_Y, \delta\theta_Z$

$$\Delta\Theta_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta\theta_X \\ 0 & \delta\theta_X & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta\Theta_Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \delta\theta_Y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\delta\theta_Y & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta\Theta_Z = \begin{pmatrix} 1 & -\delta\theta_Z & 0 \\ \delta\theta_Z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

無限小回転のベクトル

X軸、Y軸のまわりに　$\delta\theta_X, \delta\theta_Y$　無限小回転

$$\Delta\Theta_X \Delta\Theta_Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta\theta_X \\ 0 & \delta\theta_X & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \delta\theta_Y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\delta\theta_Y & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \delta\theta_Y \\ 0 & 1 & -\delta\theta_X \\ -\delta\theta_Y & \delta\theta_X & 1 \end{pmatrix} = \Delta\Theta_Y \Delta\Theta_X$$

2次の微小量 $\delta\theta_X \delta\theta_Y$ を無視

$$\Delta\Theta_X \Delta\Theta_Y \Delta\Theta_Z = \begin{pmatrix} 1 & -\delta\theta_Z & \delta\theta_Y \\ \delta\theta_Z & 1 & -\delta\theta_X \\ -\delta\theta_Y & \delta\theta_X & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\delta\theta_Z & \delta\theta_Y \\ \delta\theta_Z & 0 & -\delta\theta_X \\ -\delta\theta_Y & \delta\theta_X & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \delta\theta_X \\ \delta\theta_Y \\ \delta\theta_Z \end{pmatrix}$$

無限小回転のベクトル $\Delta\vec{\theta}$ を定義できる

一方　有限の回転では

$$\Theta_X \Theta_Y = \begin{pmatrix} \cos\theta_Y & 0 & \sin\theta_Y \\ \sin\theta_X \sin\theta_Y & \cos\theta_X & -\sin\theta_X \cos\theta_Y \\ -\sin\theta_Y \cos\theta_X & \sin\theta_X & \cos\theta_X \cos\theta_Y \end{pmatrix} \neq \Theta_Y \Theta_X$$

ベクトル $\vec{\theta}$ は定義できない

ベクトルの無限小回転　と　ベクトル積

$$\Delta\vec{\boldsymbol{r}} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta\theta_Z & \delta\theta_Y \\ \delta\theta_Z & 0 & -\delta\theta_X \\ -\delta\theta_Y & \delta\theta_X & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta\theta_Z y + \delta\theta_Y z \\ \delta\theta_Z x - \delta\theta_X z \\ -\delta\theta_Y x + \delta\theta_X y \end{pmatrix} \equiv \Delta\vec{\boldsymbol{\theta}} \times \vec{\boldsymbol{r}}$$

$$\left.\frac{\Delta\vec{\boldsymbol{r}}}{\Delta t}\right|_{\Delta t \to 0} = \begin{pmatrix} -\omega_Z y + \omega_Y z \\ \omega_Z x - \omega_X z \\ -\omega_Y x + \omega_X y \end{pmatrix} \equiv \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}$$

$$\frac{\delta\theta_i}{\delta t} \to \omega_i \ \text{ for } \delta t \to 0$$

猫は逆さまで落とされても空中で回転して立つ。
角運動量は保存されているのか？

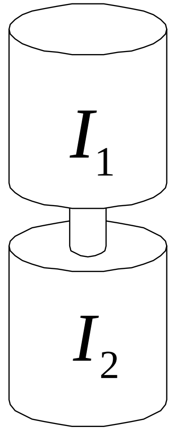
p.176

I が変化する場合　$L=0$ でも回転できる

$$L = I\omega = 2I_0\omega_0 = 0,\ \omega_0 = 0$$

$$L = I_0\omega_0 + I_0\omega_0 = I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = 0$$

$$\theta_1(0) = 0, \theta_2(0) = 0$$



回転軸は一定

$$\begin{array}{cccc} 0 & T & 2T & \end{array}$$

$$\begin{cases} I_1 : I_0 \to \dfrac{I_0}{10} \to 10I_0 \to I_0 \\ I_2 : I_0 \to 10I_0 \to \dfrac{I_0}{10} \to I_0 \end{cases}
\qquad
\begin{cases} \omega_1 : 0 \to 10\omega_i \to -\dfrac{\omega_i}{10} \to 0 \\ \omega_2 : 0 \to -\dfrac{\omega_i}{10} \to 10\omega_i \to 0 \end{cases}$$

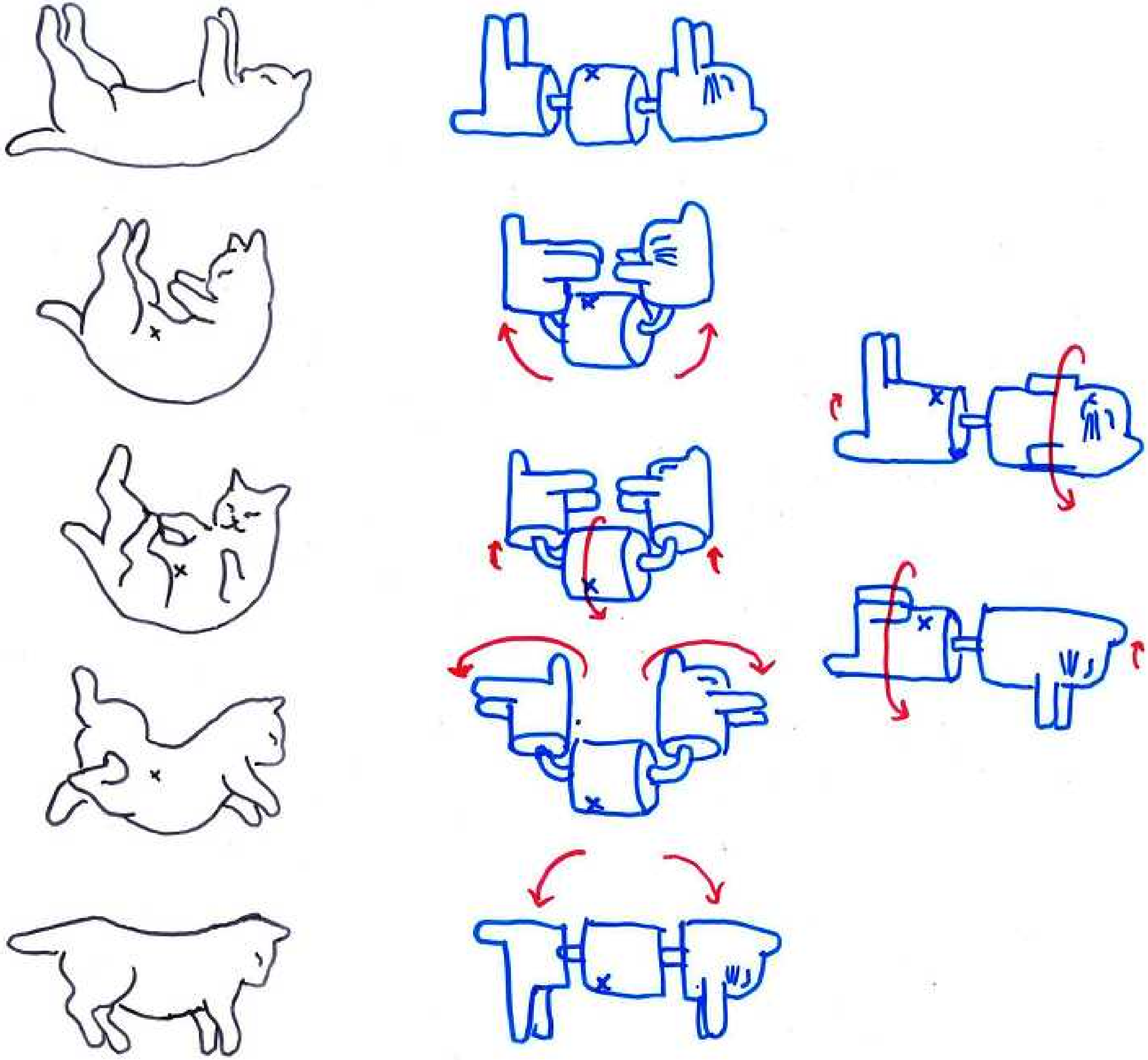
$$\omega_i > 0$$

$$L(0 \to T) = \frac{I_0}{10} \times 10\omega_i + 10I_0 \times (-\frac{\omega_i}{10}) = 0$$

$$L(T \to 2T) = 10I_0 \times (-\frac{\omega_i}{10}) + \frac{I_0}{10} \times 10\omega_i = 0$$

$$\begin{cases} \theta_1(2T) = 10\omega_i T - \dfrac{\omega_i}{10} T = 9.9\omega_i T \\ \theta_2(2T) = -\dfrac{\omega_i}{10} T + 10\omega_i T = 9.9\omega_i T \end{cases}$$

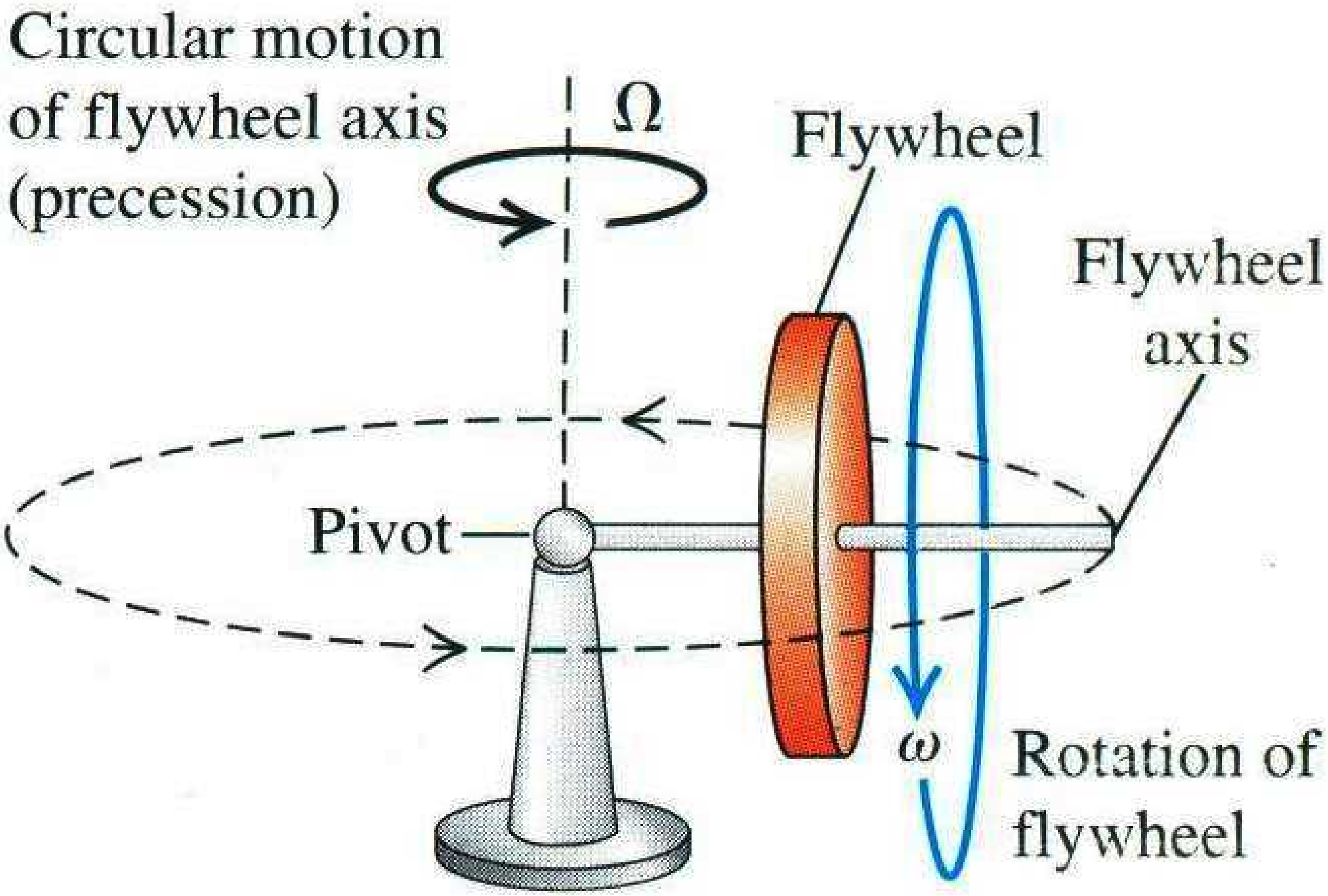
猫の空中での回転



コマが首振り運動（歳差運動）するのはなぜ？

p.184

ジャイロスコープ



はずみ車（地球ごま）が角速度ωで回転しているとき、回転軸を水平にして一端で支えて放すと、はずみ車の回転軸は角速度Ωで歳差運動(precession)**する。**

University Physics

ジャイロ効果

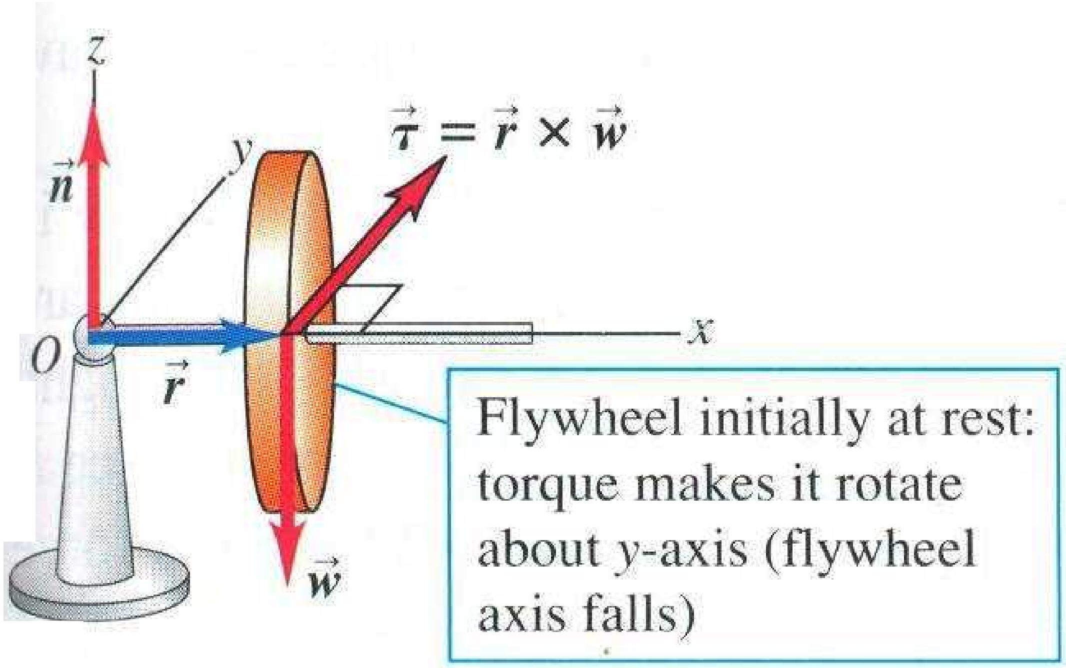
はずみ車を回転軸が水平に静止した状態から手を放すと

1) なぜ下向きでなく横方向に動くのか (歳差運動)

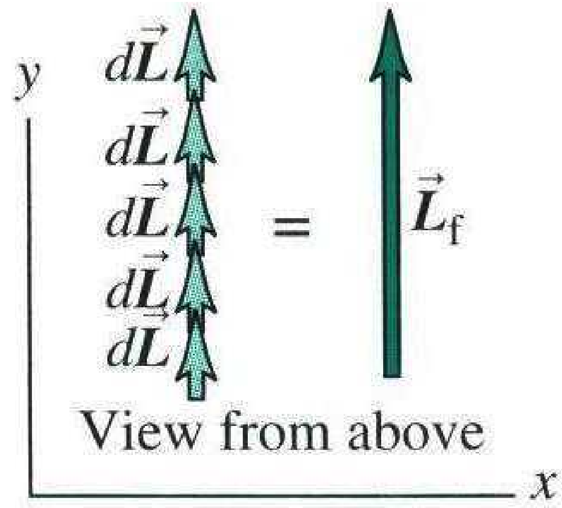
2) その運動エネルギーはどこから？

3) 水平方向にΩで回転するならZ軸方向の角運動量を
持っていなければならない。
しかし$L_z = 0$のはず？

自転していないとき



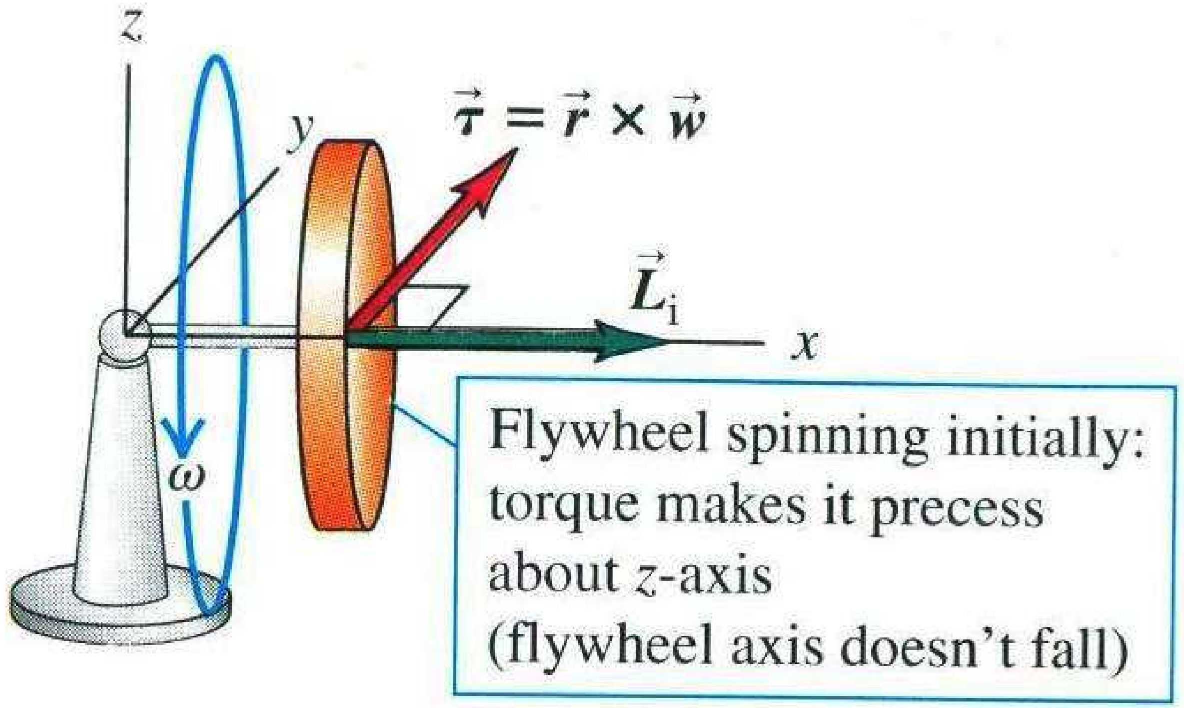
$$d\vec{L} = \vec{\tau}\, dt$$



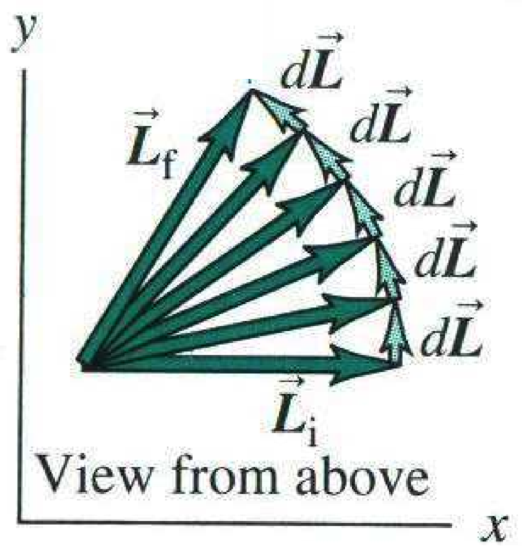
はずみ車（地球ごま）が回転していないとき、はずみ車の軸を水平にして放すと落下する（y軸の周りに回転）。

University Physics

自転しているとき

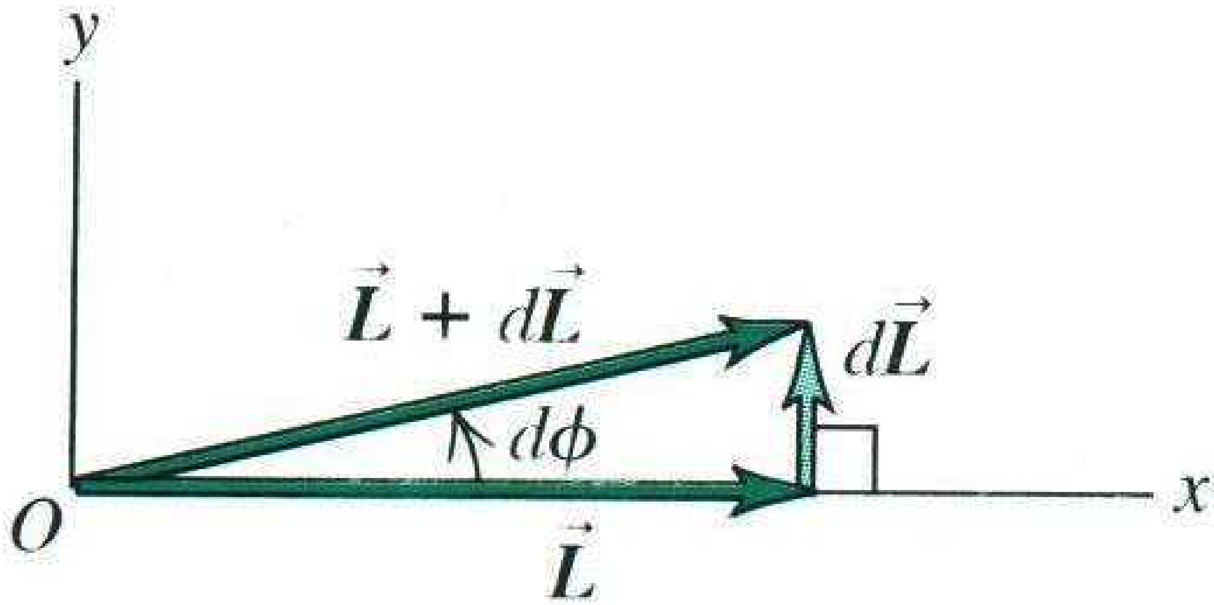


$$d\vec{L} = \vec{\tau}\, dt$$

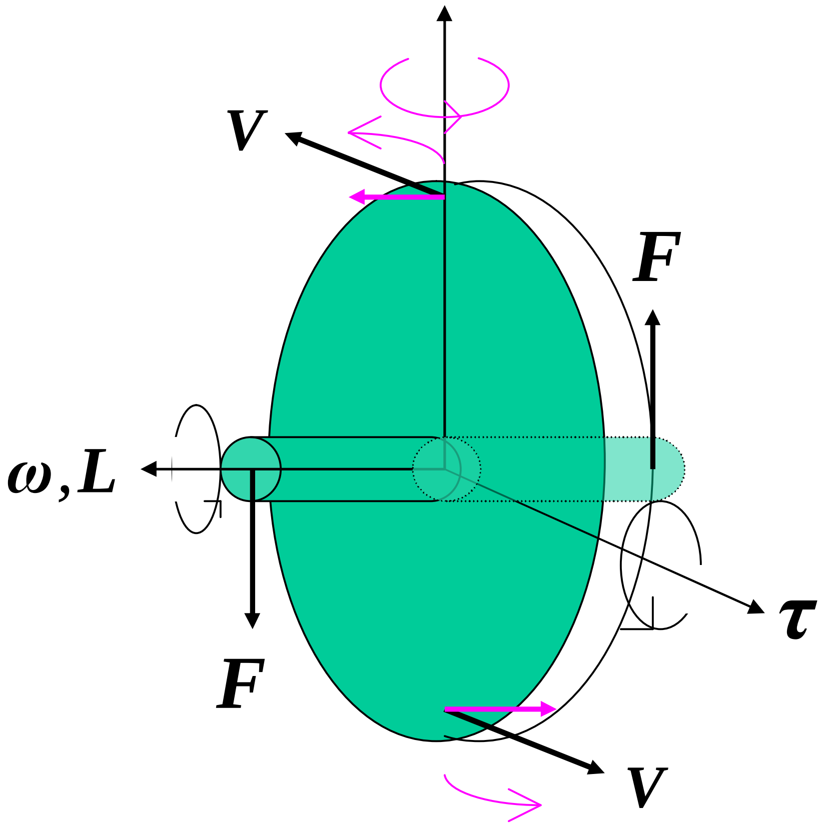


はずみ車（地球ごま）が角速度ωで回転しているとき、回転軸を水平にして一端で支えて放すと、はずみ車の回転軸は角速度Ωで歳差運動(precession)**する（z軸の周りに回転する）。**

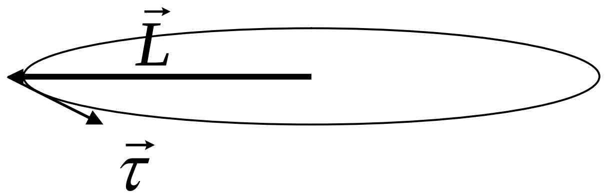
University Physics



$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{|d\vec{L}|/|\vec{L}|}{dt} = \frac{\tau_z}{L_z} = \frac{wr}{I\omega}$$



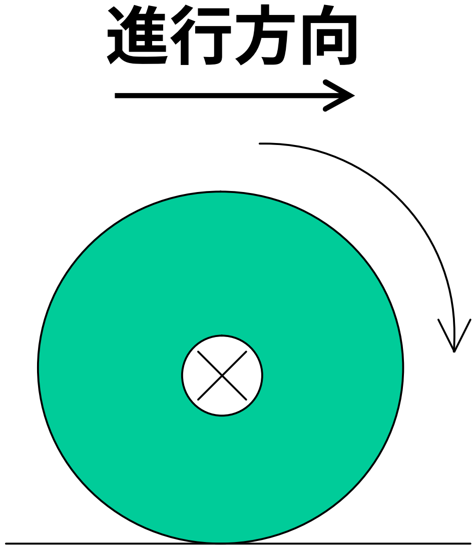
precession (歳差運動)

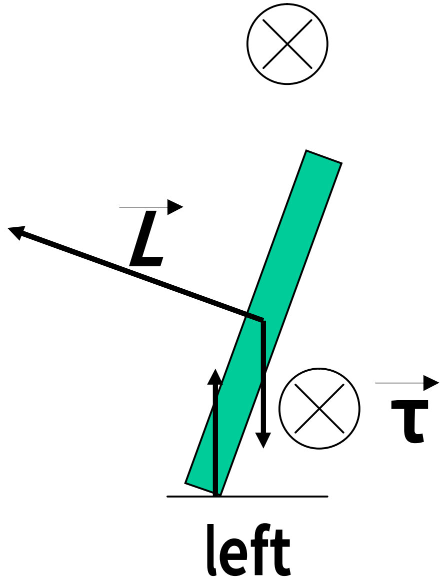


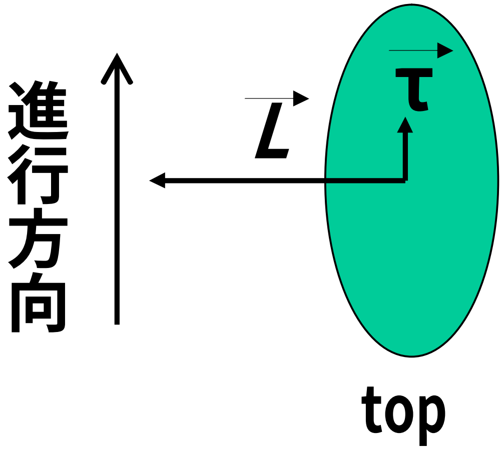
$$\frac{d\vec{\boldsymbol{L}}}{dt} = \vec{\boldsymbol{\tau}}$$

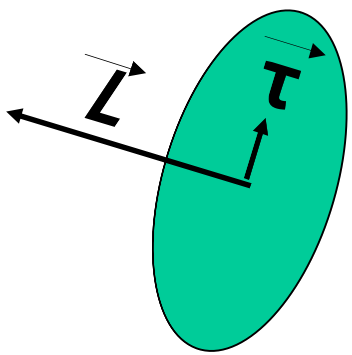
$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\dfrac{d\,|\vec{\boldsymbol{L}}|}{|\vec{\boldsymbol{L}}|}}{dt} = \frac{\tau}{L}$$

自転車 (一輪車)





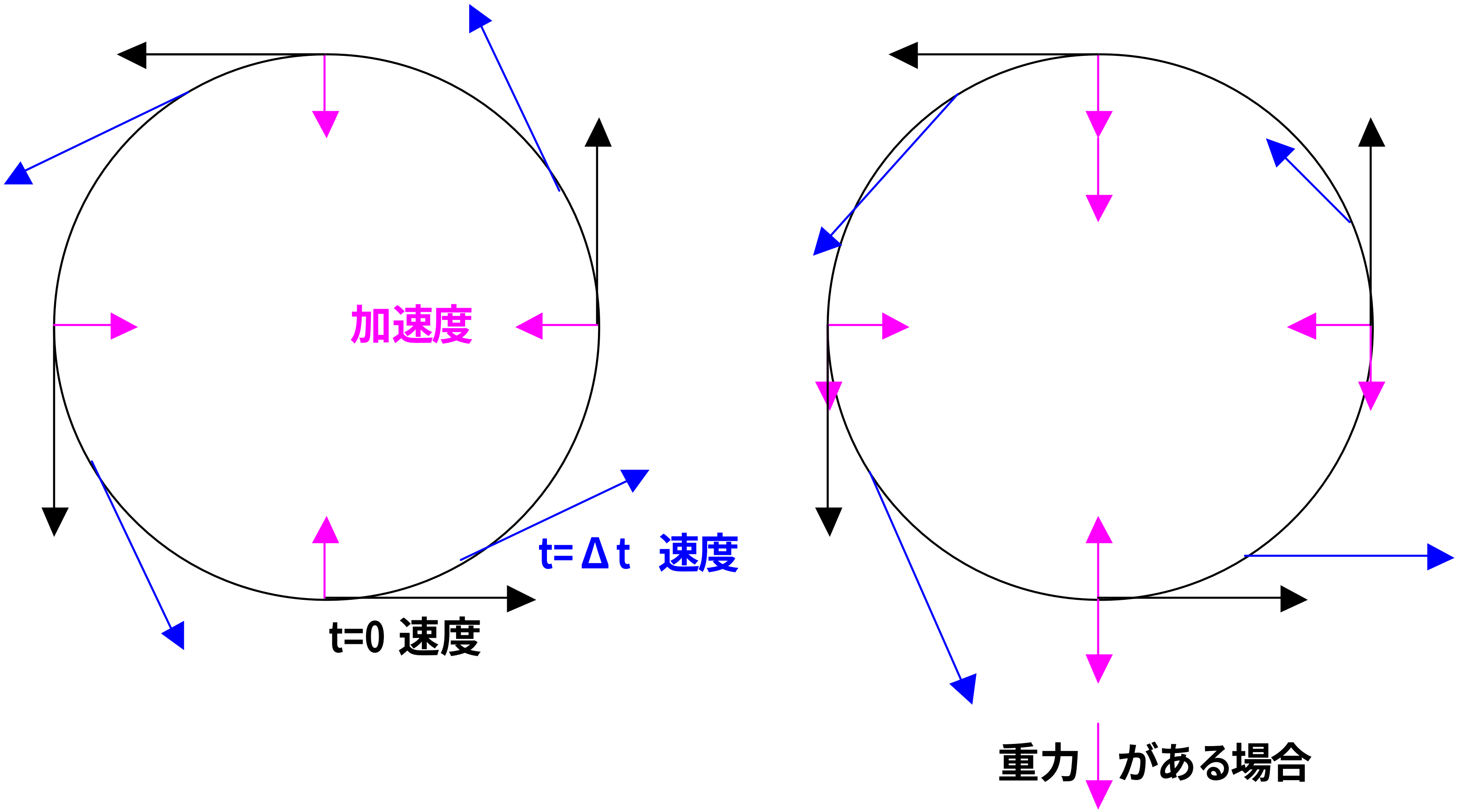




Science **332**, 339(2011)

A bicycle can be self-stable
without gyroscopic or caster effects

力の向きと直角方向へ動く理由 (直観的)

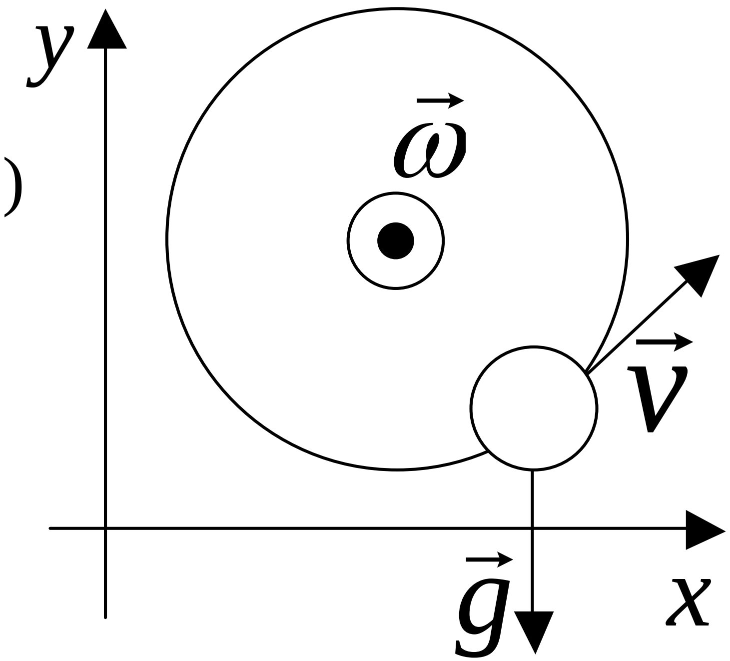


力の向きと直角方向へ動く理由 (数式)

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$\vec{F} = m\vec{\omega} \times \vec{v} + m\vec{g}$$

$$\vec{\omega} = (0,0,\omega) \quad \vec{v} = (v_x, v_y, 0) \quad \vec{g} = (0,-g,0)$$



$$\begin{cases} F_x = ma_x = -m\omega v_y \\ F_y = ma_y = m\omega v_x - mg \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = -\omega v_y \\ \dfrac{dv_y}{dt} = \omega v_x - g \end{cases}$$

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = -\omega \frac{dv_y}{dt} = -\omega^2 (v_x - \frac{g}{\omega})$$

解 $\begin{cases} v_x = V\cos(\omega t + \phi) + \dfrac{g}{\omega} \\ v_y = V\sin(\omega t + \phi) \end{cases}$

回転運動の他に $\langle v_x \rangle_{av} = \dfrac{g}{\omega}$ のドリフト運動

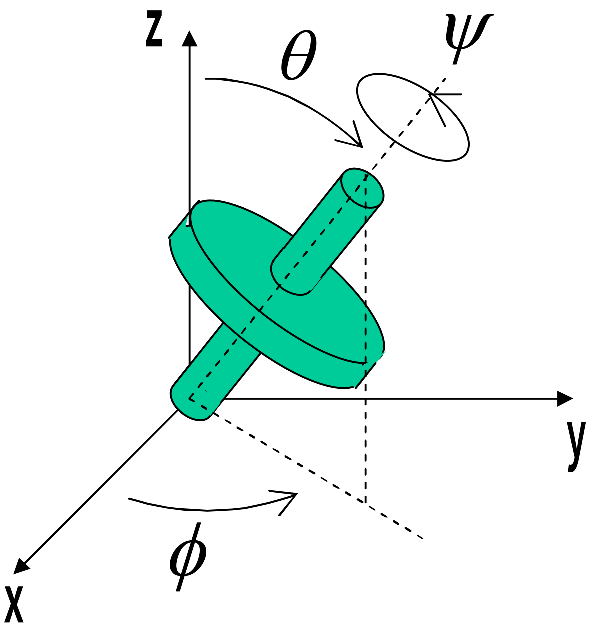
ジャイロ効果

はずみ車を回転軸が水平に静止した状態から手を放すと

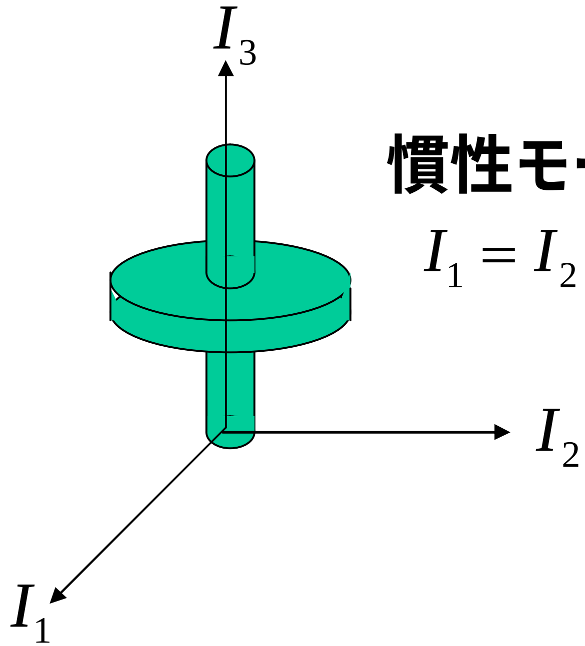
1) なぜ下向きでなく横方向に動くのか（歳差運動）

2) その運動エネルギーはどこから？

3) 水平方向にΩで回転するならZ軸方向の角運動量を持っていなければならない。
しかし$L_z = 0$のはず？

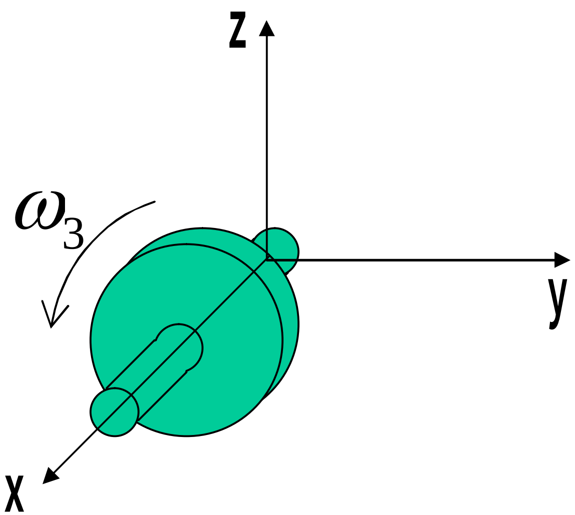


物体に固定した座標



慣性モーメント

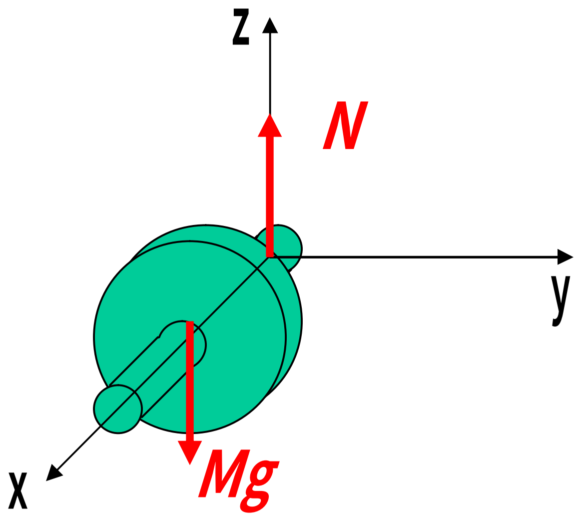
$$I_1 = I_2 = I > I_3$$

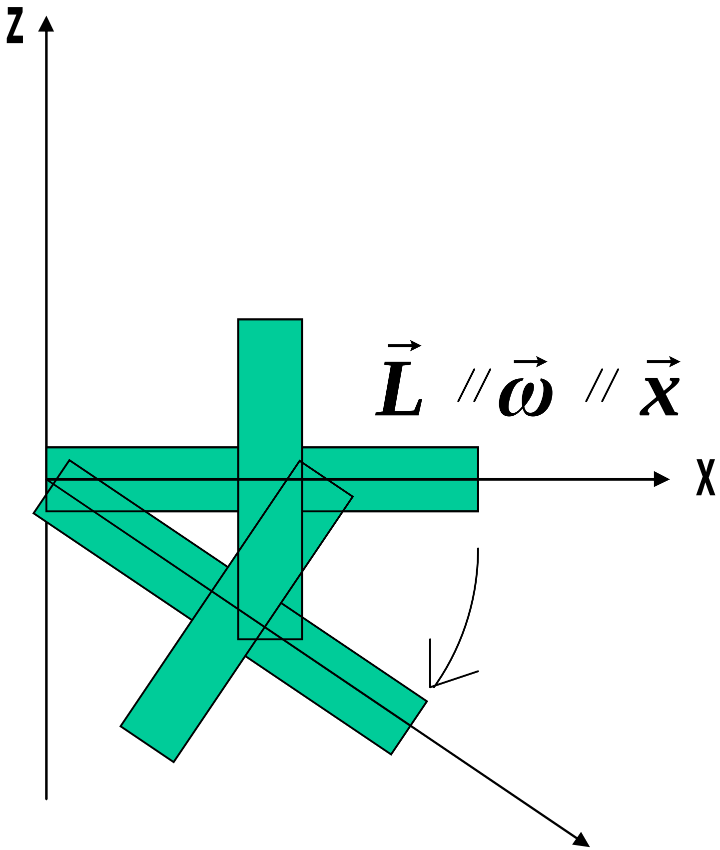


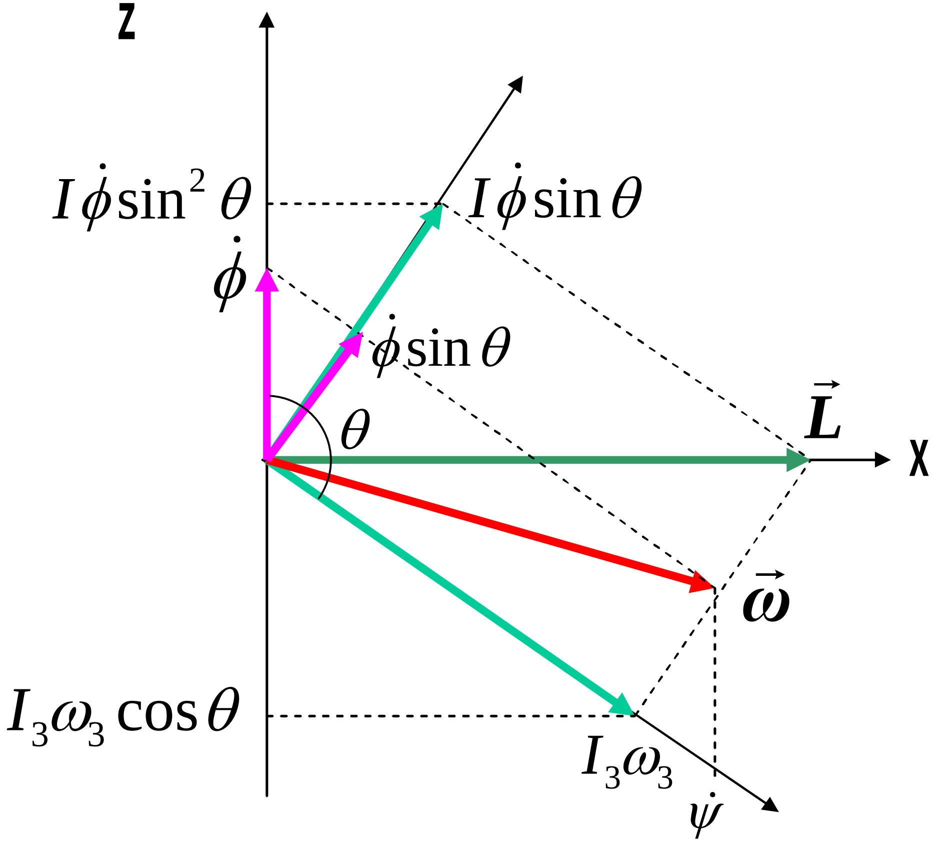
$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\dot{\psi} = \omega_3 \quad \dot{\phi} = \dot{\theta} = 0$$

$$L_3 = I_3\omega_3 \quad L_z = 0$$







$$L_z = I\dot{\phi}\sin^2\theta + I_3\omega_3\cos\theta = \mathrm{const}(=0)$$

図はI_3=1, I =2**で作画**

角運動量とエネルギーの保存

$$\begin{cases} L_Z = I\dot{\phi}\sin^2\theta + I_3\omega_3\cos\theta \\ E = \dfrac{1}{2}I\left(\dot{\phi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) + \dfrac{1}{2}I_3\omega_3^2 + Mg\ell\cos\theta \end{cases}$$

初期条件（$t=0$）

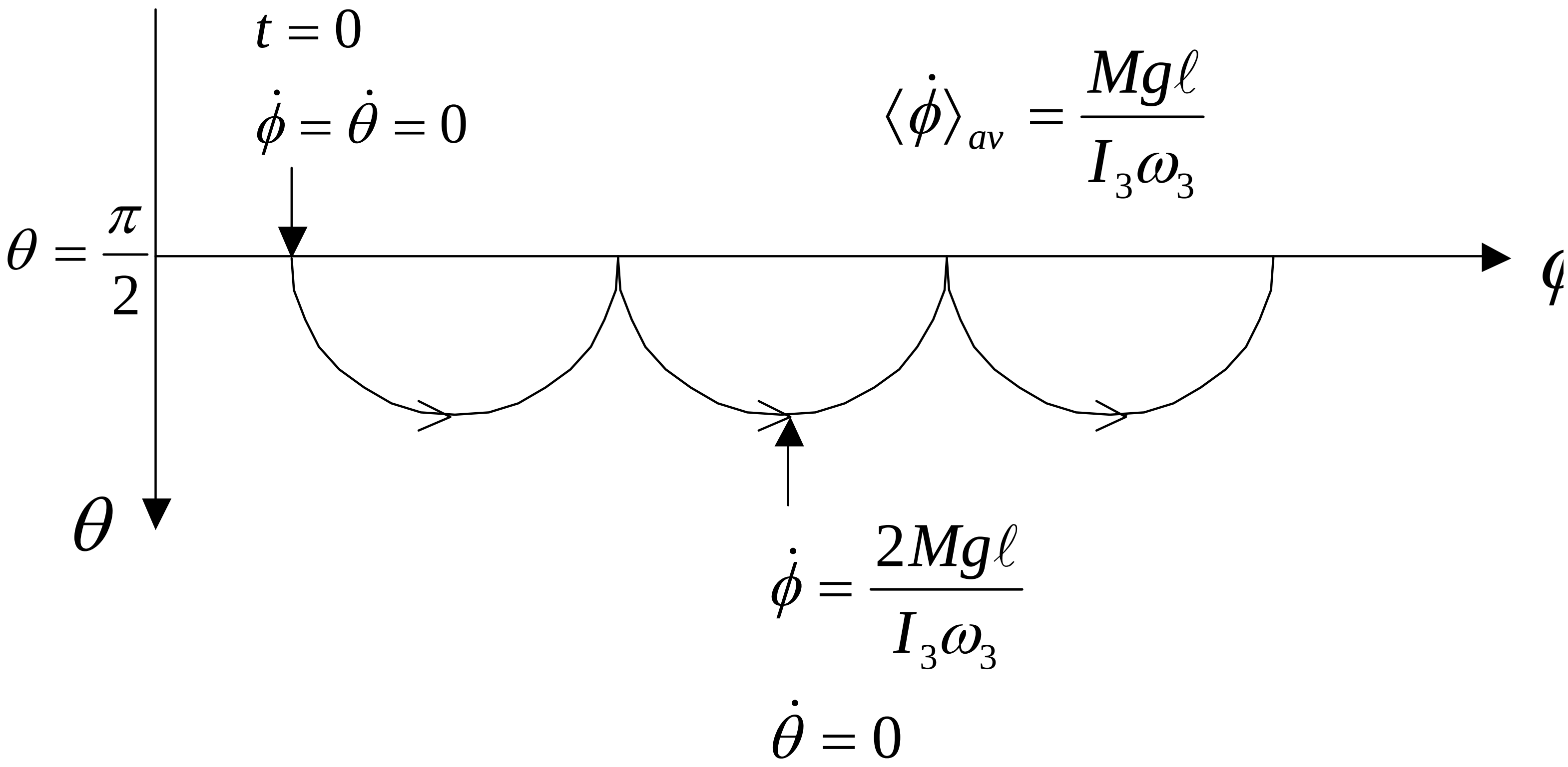
$$\dot{\phi} = 0 \qquad \theta = \frac{\pi}{2} \qquad \dot{\theta} = 0 \qquad E = \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 \qquad L_Z = 0$$

$$\begin{cases} I\dot{\phi}\sin^2\theta = -I_3\omega_3\cos\theta \\ E - \dfrac{1}{2}I_3\omega_3^2 = \dfrac{1}{2}I\left(\dot{\phi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) + Mg\ell\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$\tau_3 = 0$ より $\omega_3 = \mathrm{const}$

$$\dot{\phi} = \frac{2Mg\ell + \dfrac{I\dot{\theta}^2}{\cos\theta}}{I_3\omega_3}$$

歳差運動と章動



$\dot{\phi}$ precession **歳差運動** $\dot{\theta}$ nutation **章動**

剛体の配置　**重心の位置**　**重心 (を通る軸) の周りの回転**

$$\vec{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{cm}} = (X, Y, Z) \qquad [\theta, \phi, \psi]$$

剛体の運動　**重心の並進運動**　**重心 (を通る軸) の周りの回転運動**

$$\vec{\boldsymbol{V}}_{\mathrm{cm}} = (\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}) \qquad \vec{\boldsymbol{\omega}} = \vec{\boldsymbol{\omega}}(\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi})$$

剛体の任意の点 $\vec{\boldsymbol{r}}$ の速度　$\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{V}}_{\mathrm{cm}} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{cm}})$

平行軸定理　$I = I_{\mathrm{cm}} + Md^2$

剛体の運動エネルギー　$K = \dfrac{1}{2} M V_{\mathrm{cm}}{}^2 + \dfrac{1}{2} I_{\mathrm{cm}} \omega^2$

剛体の平衡　$\sum_i \vec{\boldsymbol{F}}_i = 0 \qquad \sum_i \vec{\boldsymbol{\tau}}_i = 0$　**(あらゆる点のまわりで)**

ある点 $\vec{\boldsymbol{r}}_0$ のまわりで　$\sum_i (\vec{\boldsymbol{r}}_i - \vec{\boldsymbol{r}}_0) \times \vec{\boldsymbol{F}}_i = 0$

剛体の振動　**実体振り子**　$\omega = \sqrt{\dfrac{mgd}{I}}$

図版の出典

Young & Freedman, University Physics with Modern Physics,
11th Ed, Pearson Education

力学参考書

バージャー、オルソン著　　力学　　培風館
戸田盛和･田上由紀子訳

面白い実例が多い　　ブーメラン
逆立ちごま