平面凸ビリヤードの不変円の微分可能性について

印南信宏（新潟大学理学部）

C をユークリッド平面 $\mathbf{E}$ の滑らかな単純凸閉曲線とする．その長さを L とし，反時計回りに向きづけられているとする．$c : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{E}$ を C の弧長パラメータ表示とする．$x = (x_j)_{j \in \mathbf{Z}}$ を C の点列とし，$T(x) = \cup_{j=-\infty}^{\infty} T(x_j, x_{j+1})$ とする．ここで，$T(x_j, x_{j+1})$ は x_j と x_{j+1} を結ぶ向きづけられた線分である．$p \in C$ における C の接線を $S(p)$ とする． x，あるいは，$T(x)$ は，すべての $j \in \mathbf{Z}$ に対して，

$$\text{入射角} = \angle(T(x_{j-1}, x_j), S(x_j)) = \angle(T(x_j, x_{j+1}), S(x_j)) = \text{反射角}$$

が成り立つとき，ビリヤード軌道と呼ぶ．凸ビリヤード軌道は位相空間 (phase space) や配位空間 (configuration space) を用いて研究されている．

$\Omega = C \times (-1, 1)$ を位相空間とする．位相空間を用いてビリヤード軌道を次のように表現する．x_0，x_1 を C の点とし，(x_0, x_1, x_2) をビリヤード軌道とする．

$$u_0 = \cos \angle(T(x_0, x_1), S(x_0)), \qquad u_1 = \cos \angle(T(x_1, x_2), S(x_1))$$

とする．ビリヤード球写像 $\varphi : \Omega \longrightarrow \Omega$ を次のように定義する．

$$\varphi(x_0, u_0) = (x_1, u_1)$$

ビリヤード球写像 φ の軌道とビリヤード軌道との関係は次のようである．$\bar{x} = (x_0, u_0) \in \Omega$ とし，すべての $j \in \mathbf{Z}$ に対して，$(x_j, u_j) = \varphi^j(\bar{x})$ とする．そのとき，点列 $x = (x_j)_{j \in \mathbf{Z}}$ は，ビリヤード軌道である．

$\mathbf{X} = \mathbf{Z} \times \mathbf{R} \subset \mathbf{R}^2$ を配位空間とする．C の点列 $x = (x_j)_{j \in \mathbf{Z}}$ に対して，$x_j = c(s_j)$ を満たす数列 $s = (s_j)_{j \in \mathbf{Z}}$，$s_j < s_{j+1} < s_j + L$，が定まる．数列 $s = (s_j)_{j \in \mathbf{Z}}$ を配位 $(j, s_j) \in \mathbf{X}$ と考え，その点を結び合わせてできるグラフを配位空間の曲線と考える．ビリヤード軌道に対応する曲線はリーマン幾何学の測地線のような振る舞いをするので，平行線の理論等が凸ビリヤードの研究に役立つ．実際，２次元トーラス上の測地線の研究と類似することが知られている．数列 $s = (s_j)_{j \in \mathbf{Z}}$ の傾き $\alpha(s)$, あるいは，その数列に対応する C の点列 $x = (x_j)_{j \in \mathbf{Z}}$ の回転数 $\alpha(x)$ を

$$\alpha(s) = \alpha(x) = \liminf_{n \to \infty} \frac{s_n}{n}$$

で定義する．ビリヤード軌道 $x = (x_j)_{j \in \mathbf{Z}}$ のときには，それに対応する位相空間 Ω 上の点を $\bar{x}$ とすると，$\alpha(\bar{x})$ とも記す．$\Omega(a)$ によって，$\alpha(\bar{x}) = aL$ である点 $\bar{x}$ の全体を表すとする。

円 C のビリヤードにおいては，軌道は周期的であるか C で稠密な軌道になることが知られている．また，ビリヤード軌道 $T(x)$ は同心円に接する線分からできている．楕円 C のビリヤードでは，焦点間を通るビリヤード軌道は各線分が焦点間を通り，回転数が $L/2$ である．また，焦点間を通らないビリヤード軌道の各線分は共焦点楕円に接する．同じ共焦点楕円に接するビリヤード軌道は同じ回転数を持つ．

平面凸ビリヤードは，位相空間 Ω の full measure 部分集合がビリヤード球写像で不変な閉曲線で層化されるとき積分可能であるといわれる。円や楕円のビリヤードは積分可能である。積分可能な平面ビリヤードは円や楕円ビリヤードに限るという Birkhoff 予想がある。ビリヤード球写像で不変な閉曲線が可縮でないとき，不変円とよぶ。曲線 C が C^2 級ならば，ビリヤード球写像は，C^1 級である。Birkhoff の定理によって，不変円は Lipshitz 連続で，Lipshitz 関数のグラフである。

この講演では，積分可能な平面凸ビリヤードの不変円の微分可能性について議論する。その際に，配位空間での平行線の理論が大きな役割を果たす。

定理： C を C^k 級 ($k \geq 2$) の平面単純凸閉曲線とする。曲率は正で，その凸ビリヤードは積分可能であるとする。$0 < a < 1$ なる a に対して，次が成り立つ。

1. a が無理数のとき，$\Omega(a)$ は，回転数 aL を持つ不変円であり，C^1 級である。
2. a が有理数のとき，回転数が aL の不変円の個数は，１か２である。１のときは，C^1 級である。２のときは，２個の C^1 級閉曲線（グラフ）があり，それらは交わり，交点間の上側の部分，下側の部分を繋いで出来る閉曲線が不変円である。

参考文献

[1] E. Y. Amiran. Integrable smooth planar billiards and evolutes. New York J. Math., 3 (1997), 32-47.

[2] V. Bangert. Mather sets for twist maps and geodesics on tori, In U. Kirchgraber, H. O. Walther (eds.) Dynamics Reported, Vol 1, pp.1–56, John Wiley & Sons and B. G. Teubner, 1988.

[3] V. Bangert. Geodesic rays, Busemann functions and monotone twist maps, Calc. Var., Vol 2, 49–63 (1994).

[4] M. Bialy. Convex billiards and a theorem of E. Hopf. Math. Z., 214 (1993) 147-154.

[5] G. D. Birkhoff. Surface translations and their dynamical applications, Acta Math., Vol 43, 1–119 (1922).

[6] H. Busemann. The geometry of geodesics, Academic Press, New York, 1955.

[7] E. Gutkin and A. Katok. Caustics for inner and outer billiards, Commun. Math. Phys., Vol 173, 101–133 (1995).

[8] N. Innami. Integral formulas for polyhedral and spherical billiards, J. Math. Soc. Japan, 50,2 (1998) 339-357.

[9] N. Innami. Geometry of geodesics for convex billiards and circular billiards. Nihonkai Math. J. 13,1 (2002) 73–120.

[10] A. Katok and B. Hasselblatt. Introduction to the modern theory of dynamical systems, Cambridge University Press, New York, 1995.

[11] M. P. Wojtkowski. Two applications of Jacobi fields to the billiard ball problems, J. Diff. Geom., 40 (1994) 155-164.