

非等方的平均曲率一定曲面の安定性解析と 物理現象への応用

小磯深幸*

(九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所, JST さきがけ)

1 序

曲面の各点の向きに依存して決まる非等方的表面エネルギーの、「囲む体積」を変えない変分に対する臨界点は非等方的平均曲率一定 (constant anisotropic mean curvature, 以下, CAMC と記す) 超曲面となる. これは, 平均曲率一定超曲面 (CMC 超曲面) の一般化である. CAMC 超曲面は, 与えられた境界条件を満たし「囲む体積」を変えない任意の変分に対する非等方的表面エネルギーの第2変分が非負の時, 安定であるといわれる.

さて, 与えられた境界条件を満たす CAMC 超曲面は, 非等方的平均曲率 Λ , または, 「囲む」体積 V をパラメータとする変分問題の一助変数族の解として特徴付けられる. たとえば Λ をパラメータとした時, 一般に, Λ と解の対応は1対1ではない. Λ が増加 (あるいは減少) する時, 対応する解の族が, ある $\Lambda = \Lambda_0$ において分岐するという現象が起こることがある. Λ の代わりに V をパラメータとしてとった場合も同様である.

本講演では, 非等方的表面エネルギーの第2変分に付随する固有値問題が, 重複度1の零固有値を持つ場合について, 解の分岐が起こるための十分条件を与える. さらに, 分岐前後の解の安定性を判定する方法を与える. そこでは, いわゆる pitchfork 分岐が現れ, エネルギー汎関数やその境界条件の持つ対称性よりも低い対称性しか持たない解が安定であり, 高い対称性を持つ解が不安定になるという, いわゆる「対称性の崩壊」現象が生じるための条件も定式化される. さらに, これらの結果を, 物理現象とも関連の深いいくつかの具体例に対して応用する.

なお, 本予稿では一般論のみを延べ, 例については講演中に説明する.

*koiso@math.kyushu-u.ac.jp 本研究は科研費 (課題番号:22654009) の助成を受けたものである。

2 非等方的表面エネルギーと Wulff 図形

$S^n = \{\nu \in \mathbf{R}^{n+1} \mid |\nu| = 1\}$ を $n+1$ 次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^{n+1} の単位球面とし, $\gamma: S^n \rightarrow \mathbf{R}^+$ を正値 C^∞ 級関数とする. \mathbf{R}^{n+1} にはめ込まれた向き付け可能な超曲面 (以下では簡単に超曲面という) $X: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ に対し,

$$\mathcal{F}(X) := \int_{\Sigma} \gamma(\nu) d\Sigma \quad (1)$$

とおく. ここで, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{n+1}) : \Sigma \rightarrow S^n$ は X の Gauss 写像 (単位法ベクトル場), $d\Sigma$ は X によって誘導される Σ の (n 次元) 体積要素である.

\mathbf{R}^{n+1} 内の同じ ($n+1$) 次元体積 V を囲む閉超曲面の中で, \mathcal{F} の最小解 $W(V)$ が (平行移動を除き) ただ一つ存在し, 凸である ([6]). すなわち, $W(V)$ は汎関数 \mathcal{F} に対する等周問題の解である.

体積 $V_0 := (n+1)^{-1} \int_{S^n} \gamma(\nu) dS^n$ に対するエネルギー最小解 $W(V_0)$ を Wulff 図形と呼び, W で表す. $W(V)$ は W に相似である. 特に $\gamma \equiv 1$ のときは, \mathcal{F} は X の n 次元体積であり, W は単位球面 S^n である.

以下では, Wulff 図形 W は滑らかな狭義凸超曲面であると仮定する (凸性条件). この時, W は, $\chi(\nu) = D\gamma(\nu) + \gamma(\nu)\nu$ により定義される埋め込み $\chi: S^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ の像と一致する.

3 非等方的平均曲率と非等方的 Gauss 写像

超曲面 X が囲む ($n+1$) 次元体積を保つ変分に対する汎関数 \mathcal{F} の Euler-Lagrange 方程式は

$$\operatorname{div}_{\Sigma} D\gamma - nH\gamma = \text{定数} \quad (2)$$

となる. ここで, H は X の平均曲率であり, $D\gamma$ は \mathbf{R}^{n+1} での平行移動により, X に沿う接ベクトル場とみなしている. そこで, X の非等方的平均曲率 (anisotropic mean curvature) Λ を次のように定義する (cf. [5],[3]).

$$\Lambda := -\operatorname{div}_{\Sigma} D\gamma + nH\gamma.$$

Λ が定数のとき, X を非等方的平均曲率一定超曲面 (CAMC 超曲面) と呼ぶ. 特に $\gamma \equiv 1$ の時は $\Lambda = nH$ であり, CAMC 超曲面は CMC 超曲面である. 凸性条件により, 一般に, 方程式 “ $\Lambda = \text{定数}$ ” は楕円型となる.

Λ は, X と W の曲がり具合を比較する量としてとらえることもできる. 点 $p \in \Sigma$ に対し, W 上の点 $G(p)$ であって, $\nu(p)$ が W の $G(p)$ での外向き単位法ベクトルと一致するものが一意的に定まる. 写像 $G: \Sigma \rightarrow W$ を X の非等方的 Gauss 写像と

いう.

$$\Lambda = -\text{trace}_\Sigma(D^2\gamma + \gamma 1) \circ d\nu = -\text{trace}(dG)$$

が成立する. よって特に, Wulff 図形の (外向き法ベクトルに対する) 非等方的平均曲率は $-n$ である.

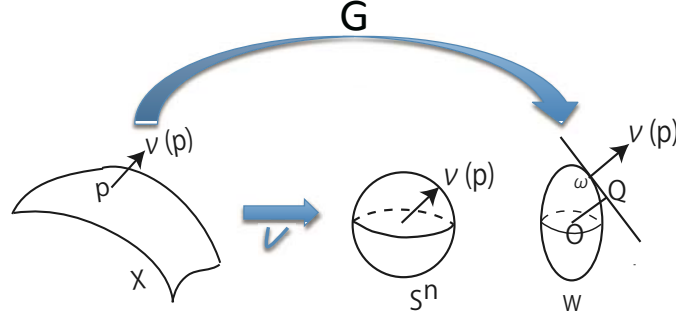


Figure 1: Gauss 写像 ν と非等方的 Gauss 写像 G . $\omega = G(p)$

例 3.1 (非等方的 Delaunay 曲面 [3]). 簡単のため, \mathbf{R}^3 内の曲面について考える. 非等方的表面エネルギー密度 γ が x^3 軸に関して軸対称ならば, 対応する Wulff 図形も x^3 軸に関して軸対称である. x^3 軸に関して軸対称な CAMC 曲面を非等方的 Delaunay 曲面と呼ぶ. これらはすべて完備であり, 次の 6 つのクラスに分類される (Figure 2).

- (I-1) 平面 ($\Lambda = 0$), (I-2) 非等方的 catenoid ($\Lambda = 0$)
- (II-1) Wulff 図形 (の平行移動と相似) ($\Lambda \neq 0$), (II-2) 円柱 ($\Lambda \neq 0$)
- (II-3) 非等方的 unduloid ($\Lambda \neq 0$): 自己交差を持たない周期的曲面
- (II-4) 非等方的 nodoid ($\Lambda \neq 0$): 自己交差を持つ周期的曲面

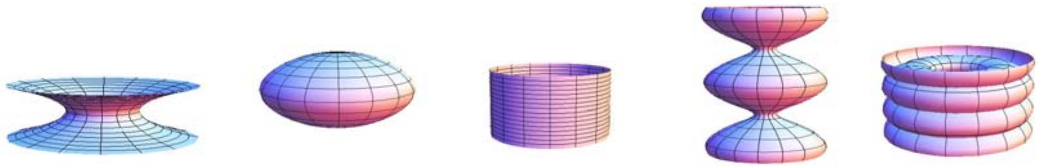


Figure 2: 非等方的 Delaunay 曲面. 左から, 非等方的 catenoid, Wulff 図形, 円柱, 非等方的 unduloid, 非等方的 nodoid.

4 第2変分公式と安定性の定義

$X : \Sigma^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ は CAMC とする. $X_\epsilon = X + (\xi + \psi\nu)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ は, X のコンパクトな台を持つ変分とする. $\xi, \psi\nu$ は, それぞれ変分ベクトル場の接成分, 法成分である.

変分 X_ϵ が体積を保つ時, \mathcal{F} の第 2 変分は

$$\partial_{\epsilon\epsilon}^2 \mathcal{F}|_{\epsilon=0} := \left. \frac{d^2 \mathcal{F}(X_\epsilon)}{d\epsilon^2} \right|_{\epsilon=0} = - \int_{\Sigma} \psi L[\psi] d\Sigma \quad (3)$$

となる. ここで, L は自己共役作用素

$$L[\psi] := \operatorname{div}(A\nabla\psi) + \langle Adv, d\nu \rangle \psi, \quad A := (D^2\gamma + \gamma 1)|_\nu$$

である.

定義 4.1. $X : \Sigma^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ は CAMC で, Σ はコンパクトとする. X の境界を固定し「囲む体積」を保つ任意の変分 X_ϵ に対して \mathcal{F} の第 2 変分 $\partial_{\epsilon\epsilon}^2 \mathcal{F}|_{\epsilon=0}$ が非負のとき, X は安定であるという.

定義 4.2. $X : \Sigma^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ は CAMC で, Σ は完備とする. X の任意の相対コンパクト領域 Ω に対して $X|_\Omega$ が安定であるとき, X は安定であるという.

5 安定性の判定

$X : \Sigma^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ は CAMC で, Σ はコンパクトとする. 非等方的エネルギー汎関数 \mathcal{F} の第 2 変分公式 (3) に鑑み, 次の固有値問題を考える.

$$L[\psi] = -\lambda\psi, \quad \psi \in C_0^\infty(\Sigma). \quad (4)$$

(4) の固有値はすべて実数であり, 加算無限個の単調非減少列を成す. それらを, $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ と表す.

$$E := \{e \in C_0^\infty(\Sigma) \mid L[e] = 0\}$$

とおく. 負の固有値の個数 (重複度も数える) を X の Morse 指数といい, $\operatorname{Ind}(X)$ で表す. $\operatorname{Ind}(X)$ は, 境界を固定し, 汎関数 $\mathcal{F} + \Lambda V$ を減少させる変分ベクトル場の成す空間の次元である. したがって, (4) の固有値だけから X の安定性を判定することはできない. しかしながら, 下に述べるような判定法が知られている.

以下では, Σ^n から \mathbf{R}^{n+1} へのはめ込みの一助変数族 $\{X_t\}_t$ ($X_0 = X$) に対し,

$$\begin{aligned} \Lambda(t) &:= X_t \text{ の非等方的平均曲率,} & V(t) &:= X_t \text{ が囲む } (n+1) \text{ 次元体積,} \\ L_t &:= X_t \text{ に付随する自己共役作用素} \end{aligned}$$

とおく.

定理 5.1 (安定性の判定. Maddocks, Vogel, Koiso[2]). X は CAMC とする.

(I) $\lambda_1 \geq 0$ ならば, X は安定である.

(II) $\lambda_1 < 0 \leq \lambda_2$ とする. X の境界を保つ変分 X_t で, $\Lambda'(0) = \text{定数} \neq 0$ なるものが存在する時,

(i) $\Lambda'(0)V'(0) \geq 0$ ならば, X は安定である.

(ii) $\Lambda'(0)V'(0) < 0$ ならば, X は不安定である.

このような変分が存在しないならば, X は不安定である.

(III) $\lambda_2 < 0$ ならば, X は不安定である.

6 解の分岐と安定性

固有値問題 (4) が重複度 1 の零固有値を持つ場合には, 解の分岐の存在についての次の結果が成り立つ.

定理 6.1 (分岐の存在と一意性). $X_t = X + \varphi(t)\nu : \Sigma^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$, ($t \in I = (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbf{R}$), は CAMC $C^{3+\alpha}$ はめ込みの一助変数族で, t について微分可能, $X = X_0$, $X|_{\partial\Sigma} = X_t|_{\partial\Sigma}$ なるものとする. 次の (i), (ii) を仮定する.

(i) $\Lambda'(0) \neq 0$.

(ii) $E = \{ae; a \in \mathbf{R}\}$, $\exists e \in (C_0^{2+\alpha}(\Sigma) - \{0\})$.

この時, L_t の単純実固有値 $\mu(t)$ で, $\mu(0) = 0$ であり t について微分可能なものが 0 の近くで一意的に存在する. そこで,

(iii) $\mu'(0) \neq 0$

と仮定する. E の $C_0^{3+\alpha}(\Sigma)$ での直交補空間を E^\perp とする. 开区間 \hat{I} ($0 \in \hat{I} \subset \mathbf{R}$) と C^1 関数 $\zeta : \hat{I} \rightarrow E^\perp$, $\hat{\Lambda} : \hat{I} \rightarrow \mathbf{R}$ で以下を満たすものが存在する. $\zeta(0) = 0$ であり, $Y(\sigma) := X + (\sigma e + \sigma\zeta(\sigma))\nu$ は非等方的平均曲率一定 $= \hat{\Lambda}(\sigma)$. さらに, X の近傍で, X と同じ境界値を持つ CAMC はめ込みは, $\{X_t; t \in I\}$ と $\{Y(\sigma); \sigma \in \hat{I}\}$ のみである.

注意 6.1. X の変分 $Y(s)$ の変分ベクトル場は e で, $\int_{\Sigma} e d\Sigma = 0$ が成り立つ. これより, X_t が対称性を持つ時, $Y(s)$ は X_t と同じ対称性を持たない可能性が高いと推察される.

注意 6.2. 固有値問題 (4) の零固有値の重複度が 2 以上の場合でも, 対称性の高い解のみに制限することにより, 定理 6.1 が適用できる場合がある.

定理 6.1 と同様の結果であるが, 非等方的平均曲率の代わりに体積を用いたものが, Patnaik([4]) によって得られている. これらの結果と Crandall-Rabinowitz[1] を用いることにより, pitchfork 分岐の存在についての次の結果が得られる.

定理 6.2 (分岐解の安定性. pitchfork 分岐). $X_t = X + \varphi(t)\nu : \Sigma^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$, ($t \in I = (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbf{R}$), は CAMC $C^{3+\alpha}$ はめ込みの一助変数族で, t について微分可能, $X = X_0$, $X|_{\partial\Sigma} = X_t|_{\partial\Sigma}$ なるものとする. 次の (i), (ii), (iii) を仮定する.

(i) $V'(0) > 0$ かつ $\Lambda'(0) > 0$.

(ii) $E = \{ae; a \in \mathbf{R}\}$, $\exists e \in (C_0^{2+\alpha}(\Sigma) - \{0\})$.

(iii) $\lambda_2(X_0) = 0$, かつ $\frac{d}{dt}\lambda_2(X_t)|_{t=0} < 0$. (resp. $\frac{d}{dt}\lambda_2(X_t)|_{t=0} > 0$.)

E の $C_0^{3+\alpha}(\Sigma)$ での直交補空間を E^\perp とする. 开区間 \hat{I} ($0 \in \hat{I} \subset \mathbf{R}$) と C^1 関数 $\zeta : \hat{I} \rightarrow E^\perp$, $\hat{\Lambda} : \hat{I} \rightarrow \mathbf{R}$ で以下を満たすものが存在する. $\zeta(0) = 0$ であり, $Y(s) := X + (\sigma e + \sigma\zeta(\sigma))\nu$ は非等方的平均曲率一定 $= \hat{\Lambda}(\sigma)$. さらに, X の近傍で, X と同じ境界値を持つ CAMC はめ込みは, $\{X_t; t \in I\}$ と $\{Y(\sigma); \sigma \in \hat{I}\}$ のみである. $\hat{\Lambda}(\sigma) > \Lambda(0)$ ($\sigma \neq 0$) (resp. $\hat{\Lambda}(\sigma) < \Lambda(0)$ ($\sigma \neq 0$)) ならば, $Y(\sigma)$ は安定である. $\hat{\Lambda}(\sigma) < \Lambda(0)$ ($\sigma \neq 0$) (resp. $\hat{\Lambda}(\sigma) > \Lambda(0)$ ($\sigma \neq 0$)) ならば, $Y(\sigma)$ は不安定である.

注意 6.3. 定理 5.1 を用いれば, 仮定 (i), (iii) より, X 自身は安定であることがわかる.

注意 6.4. 注意 6.1 と同様に, X_t が対称性を持つ時, $Y(s)$ は X_t と同じ対称性を持たない可能性が高い. 対称性の高い安定解が, 対称性の低い安定解と対称性の高い不安定解に分岐するという興味深い現象が成り立つための条件が, 定理 6.2 により得られた.

参考文献

- [1] M. G. Crandall and P. H. Rabinowitz, *Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues, and linearized stability*, Arch. Rat. Mech. Anal. **52** (1973), 161–180.
- [2] M. Koiso, Deformation and stability of surfaces with constant mean curvature, *Tohoku Math. J. (2)* **54** (2002), 145–159.
- [3] M. Koiso and B. Palmer, Geometry and stability of surfaces with constant anisotropic mean curvature, *Indiana Univ. Math. J.* **54** (2005), 1817–1852.
- [4] U. Patnaik, *Volume constrained Douglas problem and the stability of liquid bridges between two coaxial tubes*, Dissertation, University of Toledo, USA, 1994.
- [5] R. C. Reilly, The relative differential geometry of nonparametric hypersurfaces, *Duke Math. J.* **43** (1976), 705–721.
- [6] J. E. Taylor, Crystalline variational problems, *Bull. Amer. Math. Soc.* **84** (1978), 568–588.