球面内の余接束内の特殊Lagrange部分多様体*

酒井 高司
首都大学東京理工学研究科

Introduction

Calabi-Yau多様体において複素体積形式の実部として与えられられるキャリブレーションによりキャリブレートされる部分多様体を特殊Lagrange部分多様体と呼ぶ．特殊Lagrange部分多様体はキャリブレート部分多様体であるため，ホモロジー類内での体積最小性という顕著な性質を持つ．また，理論物理との関係が指摘され，近年盛んに研究が行われている．特に，特殊Lagrangeファイブレーションはミラー対称性に関するSYZ予想において重要な役割を果たすと考えられている．$\mathbb{C}^n$ 内の特殊Lagrange部分多様体に関しては，Harvey-Lawson [3], Joyce [7] をはじめ多くの研究者らにより，今日ではある程度豊富な研究成果が得られている．

一方で，平坦でないCalabi-Yau多様体の具体的な構成も知られている．たとえば，Stenzel [10] は階数1のコンパクト対称空間 U/K の余接束 $T^*(U/K)$ 上に完備なRicci平坦Kähler計量を構成している．$T^*(U/K)$ には K が余等質性1で作用するが，Stenzel計量はこの K 作用で不変である．Stenzel計量のもつこの対称性を用いて，$T^*(U/K)$ 内の特殊Lagrange部分多様体を構成することを考える．ここでは特に球面 S^n の余接束 T^*S^n 内において $G = SO(p) \times SO(q)$ $(p+q=n+1)$ の作用で不変な特殊Lagrange部分多様体を具体的に構成する．まず，運動量写像 μ を用いて T^*S^n 内の G 不変な余等質性1のLagrange部分多様体を構成する．このようなLagrange部分多様体は $\mathfrak{g}^*$ の中心のある元 c の μ による逆像 $\mu^{-1}(c)$ に含まれる．さらに，これらのLagrange部分多様体が特殊Lagrange部分多様体になるための条件は $\mu^{-1}(c)$ への G 作用の軌道空間 $\mu^{-1}(c)/G$ 上の常微分方程式として与えられる．この常微分方程式の解を解析することにより，特殊Lagrange部分多様体の特異点および無限遠点に近づいたときの漸近挙動を調べることができる．一般にCalabi-Yau多様体において $\mathrm{Re}\,(e^{\sqrt{-1}\theta}\Omega)$ がキャリブレーションになり，θ を位相という．$\mathbb{C}^n$ の場合，位相の違いは $U(n)$ の等長的な作用により移り合ってしまうため本質的には現れないが，T^*S^n など非平坦なCalabi-Yau多様体においてはキャリブレーションの位相の違いが重要になる．特に $SO(p) \times SO(q)$ がabelianである場合，すなわち $p=q=2$ または $p=1, q=2$ のとき，各 θ に対して T^*S^n に特殊Lagrange部分多様体によるfoliationが構成される．ただし，このとき特異点をもつleafが現れる．Anciaux [1], Ionel-Min-Oo [6], 金光 [8] もこの種の対称性をもつ T^*S^n 内の特殊Lagrange部分多様体を構成してい

*本講演は橋本要（大阪市立大学）との共同研究をもとにしている．

る．また最近，Haskins-Kapouleas [4] は $SO(p) \times SO(q)$ $(p+q=n)$ で不変な $\mathbb{C}^n$ 内の特殊 Lagrange 錐について研究を行っている．

T^*S^n 内の特殊 Lagrange 部分多様体を構成するもう一つの方法として，Karigiannis-Min-Oo [9] による S^n 内の austere 部分多様体の余法束として与える方法がある．これは Havery-Lawson の余法束の手法の類似になる．論文 [5] において既約 Riemann 対称空間の線形イソトロピー表現の軌道の中で球面内の austere 部分多様体になるものを分類した．これらの austere 軌道の余法束として T^*S^n 内の特殊 Lagrange 部分多様体を得ることができる．

1　球面の余接束と複素錐上の Ricci 平坦 Kähler 計量

Stenzel [10] は階数 1 のコンパクト対称空間 U/K の余接束 $T^*(U/K)$ に余等質性 1 の作用があることを利用して，$T^*(U/K)$ 上に完備な Ricci 平坦 Kähler 計量を構成した．特に，球面 $S^n \cong U/K = SO(n+1)/SO(n)$ の場合に T^*S^n 上の Stenzel 計量は次のように与えられる．球面 S^n の任意の単位余接ベクトルは $SO(n+1)$ の作用で互いに移り合うので，T^*S^n には $SO(n+1)$ が余等質性 1 で作用する．T^*S^n は $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の複素二次超曲面

$$Q^n = \left\{ (z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n} z_i^2 = 1 \right\} \cong U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$$

と微分同型になる．Q^n には $\mathbb{C}^{n+1}$ の複素超曲面として複素構造 J が入る．この複素構造に関して，次で定める ω_{Stz} は $Q^n \cong T^*S^n$ 上の完備な Ricci 平坦 Kähler 計量を与える．

$$\omega_{\mathrm{Stz}} = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u(r^2)$$

ここで，$r^2 = \|z\|^2$ であり，u は常微分方程式

$$\frac{d}{dt}(U'(t))^n = nc(\sinh t)^{n-1} \qquad (c>0) \tag{1}$$

を満たす U によって $U(t) = u(\cosh(t))$ と表される関数である．さらに，Q^n 上に

$$\Omega \wedge d(z_0^2 + z_1^2 + \dots + z_n^2) = dz_0 \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$$

によって正則 $(n,0)$ 形式 Ω を定義すると，ある定数 λ が存在して

$$\omega_{\mathrm{Stz}}^n = \lambda\Omega \wedge \bar{\Omega}$$

となる．ここで，ω_{Stz} と Ω は共に $SO(n+1)$ の作用で不変であることを注意する．したがって，$(Q^n \cong T^*S^n, J, \omega_{\mathrm{Stz}}, \Omega)$ は G 不変な余等質性 1 の Calabi-Yau 多様体である．

また，$\mathbb{C}^{n+1}$ 内の複素錐 Q_0^n を

$$Q_0^n = \left\{ (z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n} z_i^2 = 0 \right\}$$

によって定める．Q_0^n は $\mathbb{C}^{n+1}$ の原点において唯一の特異点をもつ．$r \to \infty$ としたとき，$\mathbb{C}^{n+1}$ において Q^n は Q_0^n に漸近する．この複素錐 Q_0^n 上に Stenzel 計量の極限として得られる Ricci 平坦 Kähler 計量を構成する．$\tau \to \infty$ としたとき (1) は

$$\frac{d}{dt}(F'(t))^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} nc\, e^{t(n-1)} \qquad (c > 0)$$

に近づく．この解を F として，$F(t) = f(\frac{1}{2}e^t)$ と定めることにより次の命題を得る．

命題 1.1 $f(t) = c\, t^{\frac{n-1}{n}}$ $(c > 0)$ として，$\omega_{\mathrm{cone}} = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}f(r^2)$ と定めると，ω_{cone} は複素錐 Q_0^n 上の Ricci 平坦な Kähler 計量を与える．

2 余等質性 1 の特殊 Lagrange 部分多様体

(M, ω) をシンプレクティック多様体とする．M に Lie 群 G が Hamilton 作用で作用しているとし，その運動量写像を $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ と表す．$\mathfrak{g}^*$ の中心を $Z(\mathfrak{g}^*) = \{X \in \mathfrak{g}^* \mid \mathrm{Ad}^*(g)X = X\ (\forall g \in G)\}$ によって定義する．μ による $c \in \mathfrak{g}^*$ の逆像 $\mu^{-1}(c)$ が G 不変であるための必要十分条件は $c \in Z(\mathfrak{g}^*)$ となることである．

命題 2.1 L は M の連結なイソトロピック部分多様体で G 不変であるとする．このとき，L は $\mathfrak{g}^*$ の中心のある元 $c \in Z(\mathfrak{g}^*)$ の逆像 $\mu^{-1}(c)$ に含まれる．

命題 2.2 L は M の G 不変で連結な部分多様体であり，L への G の作用は余等質性 1 であるとする．このとき， L がイソトロピックであるための必要十分条件は $\mathfrak{g}^*$ の中心のある元 $c \in Z(\mathfrak{g}^*)$ が存在して L が $\mu^{-1}(c)$ に含まれることである．

上の 2 つの命題により，運動量写像を用いる方法によって，$T^*S^n \cong Q^n$ 内の余等質性 1 の特殊 Lagrange 部分多様体を構成することができる．ここでは，$SO(n+1)$ の部分群で $\mu^{-1}(c)$ へ作用させたとき $(n-1)$ 次元の軌道が現れるものとして

$$G = \left(\begin{array}{c|c} SO(p) & O \\ \hline O & SO(q) \end{array}\right) \cong SO(p) \times SO(q) \quad (p + q = n + 1,\ 1 \leq p \leq q \leq n)$$

を考える．命題 2.1 より，Q^n 内の G の作用で不変な Lagrange 部分多様体は $\mathfrak{g}^*$ の中心のある元の μ による逆像に含まれることがわかる．$p = 2$ の場合は $SO(2)$ が可換であるから，$\mathfrak{g}^*$ は非自明な中心を持つ．また，$p = 1$ の場合は G を T^*S^n の零切断 S^n に作用させたときの軌道が主曲率 1 個の等質超曲面となるため，G 作用の軌道空間が他の場合と異なる．$3 \leq p \leq q$ のとき $Z(\mathfrak{g}^*) = 0$ であり，G 不変な特殊 Lagrange 部分多様体は次で与えられる．

定理 2.3 $3 \leq p \leq q$ として，$G = SO(p) \times SO(q)$ とする．G の Q^n への作用の運動量写像を $\mu : Q^n \to \mathfrak{g}^*$ と表す．このとき，G の $\mu^{-1}(0)$ への作用の軌道空間は次でパラメトライズされる．

$$\Sigma \quad = \quad \left\{ (\overset{1}{\breve{\cos}}\tau, 0, \ldots, 0, \overset{p+1}{\breve{\sin}}\tau, 0, \ldots, 0) \;\middle|\; \begin{array}{l} \tau = t + \sqrt{-1}\xi_1 \\ 0 \leq t \leq \pi/2,\ \xi_1 \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \subset Q^n$$

τ を複素平面内の曲線として，Σ 内の曲線 σ を

$$\sigma(s) = (\cos\tau(s), 0, \ldots, 0, \sin\tau(s), 0, \ldots, 0)$$

によって定めると，$L = G\cdot\sigma$ は Q^n の ω_{Stz} に関して余等質性 1 の Lagrange 部分多様体になる．ただし，曲線 τ が $\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ を通るとき，L はその点において特異点をもつ．さらに，τ が常微分方程式

$$\mathrm{Im}\Big(e^{\sqrt{-1}\theta}\tau'(\cos\tau)^{p-1}(\sin\tau)^{q-1}\Big) = 0$$

をみたすときに限り，L は Q^n 内の位相 θ の特殊 Lagrange 部分多様体になる．

3　余法束として得られる特殊 Lagrange 部分多様体

一般に多様体 M の余接束 T^*M には自然なシンプレクティック形式 ω_0 が定まり，M の部分多様体の余法束は Lagrange 部分多様体になる．Harvey-Lawson は $\mathbb{R}^n$ の部分多様体の余法束が $T^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{C}^n$ の特殊 Lagrange 部分多様体になるのはいつかという問題を考え，austere 部分多様体の概念に到達した．

定義 3.1 M を Riemann 多様体，X を M の部分多様体とする．X の各点の各法ベクトル ξ に対して X の形作用素 A_ξ の固有値全体のなす集合が -1 倍に関して不変であり，-1 倍で対応する固有値の重複度が等しいとき，X を austere 部分多様体という．

定義から明らかに austere 部分多様体は極小部分多様体である．特に，X が 2 次元の場合，X が austere 部分多様体であることと極小曲面であることは同値である．

定理 3.2 (Harvey-Lawson [3]) $\mathbb{R}^n$ の部分多様体 X の余法束 $L = N^*X$ が $T^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{C}^n$ の特殊 Lagrange 部分多様体になるための必要十分条件は X が $\mathbb{R}^n$ の austere 部分多様体であることである．

次に，X が S^n の部分多様体であるとする．余法束 $L = N^*X$ は T^*S^n の標準的なシンプレクティック構造 ω_0 に関して Lagrange 部分多様体になる．さらに，次の定理が示される．

定理 3.3 (Karigiannis-Min-Oo [9]) S^n の部分多様体 X の余法束 $L = N^*X$ は T^*S^n の Stenzel 計量 ω_{Stz} に関する Lagrange 部分多様体になる．さらに，L が T^*S^n の特殊 Lagrange 部分多様体になるための必要十分条件は X が S^n の austere 部分多様体であることである．

論文 [5] において弱鏡映部分多様体の概念を導入し，既約 Riemann 対称空間の線形イソトロピー表現の軌道の中で球面内の弱鏡映部分多様体になるものと austere 部分多様体になるものを分類した．これらの austere 軌道の余法束として T^*S^n 内の特殊 Lagrange 部分多様体が得られる．

参考文献

[1] H. Anciaux, *Special Lagrangian submanifolds in the complex sphere*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **16** (2007), 215–227.

[2] K. Hashimoto and T. Sakai, *Cohomogeneity one special Lagrangian submanifolds in the cotangent bundle of the sphere*, preprint.

[3] R. Harvey and H. B. Lawson, Jr., *Calibrated geometries*, Acta Math., **148** (1982), 47–157.

[4] M. Haskins and N. Kapouleas, *Twisted products and* $SO(p)\times SO(q)$*-invariant special Lagrangian cones*, arXiv:1005.1419.

[5] O. Ikawa, T. Sakai and H. Tasaki, *Weakly reflective submanifolds and austere submanifolds*, J. Math. Soc. Japan. **61** (2009), 437–481.

[6] M. Ionel and M. Min-Oo, *Cohomogeneity one special Lagrangian* 3*-folds in the deformed conifold and the resolved conifolds*, Illinois J. Math. **52** (2008), 839–865.

[7] D. D. Joyce, *Special Lagrangian* m*-folds in* $\mathbb{C}^m$ *with symmetries*, Duke Math. J. **115** (2002), 1–51.

[8] K. Kanemitsu, *Construction of special Lagrangian submanifolds in the cotangent bundle of the* n*-dimensional sphere*, master thesis, The University of Tokyo, 2006.

[9] S. Karigiannis and M. Min-Oo, *Calibrated subbundles in noncompact manifolds of special holonomy*, Ann. Global Anal. Geom. **28** (2005), 371–394.

[10] M. Stenzel, *Ricci-flat metrics on the complexification of a compact rank one symmetric space*, Manuscripta Math. **80** (1993), no. 2, 151–163.