

3次元球面内の大円織面の特異点^{*1}

佐治健太郎 (岐阜大教育)

ksaji@gifu-u.ac.jp

1 設定

3次元球面 S^3 を

$$S^3 = \{x \in \mathbf{R}^4 \mid x \cdot x = 1\}$$

と定義し, $S^3 \times S^3$ 内の5次元部分多様体

$$\Delta = \{(x, y) \in S^3 \times S^3 \mid x \cdot y = 1\}$$

を考える. ただし \cdot は \mathbf{R}^4 の標準内積である. Δ に対して次の二重ファイブレーションを考える:

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \subset & S^3 \times S^3 \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ S^3 & & S^3 \end{array}$$

ここで, π_i ($i = 1, 2$) はそれぞれ第 i 成分への射影をあらわす. 部分多様体 Δ 上の微分形式 θ を

$$\theta = dx \cdot y|_{\Delta} = -x \cdot dy|_{\Delta}$$

で定義する. このとき, θ は Δ 上の接触形式となり, ファイブレーション $\pi_i : \Delta \rightarrow S^3$ ($i = 1, 2$) はルジャンドル・ファイブレーションとなる.

$U \subset \mathbf{R}^2$ を領域とし, 写像 $f, g : U \rightarrow S^3$ が互いに Δ -双対であるとは $(f, g) : U \rightarrow \Delta$ であってこの写像が θ から定まる接触構造に関してルジャンドルであるときをいう.

$f : (U; u, v) \rightarrow S^3$ を曲面とする. $e : U \rightarrow S^3$ を

$$e = \frac{f_u \wedge f_v \wedge f}{\|f_u \wedge f_v \wedge f\|}$$

で定義すると f と e は互いに Δ -双対である. この e はガウス写像と呼ばれる. 古典的微分幾何学において特別な性質をもつ曲面を研究することは中心的な研究課題であるが, ガ

^{*1} 本講演の内容は泉屋周一氏 (北海道大理)・永井隆之氏 (北海道大理) との共同研究に基づく.

ウス写像が特別な性質をもつ曲面も重要な対象である。例えば、 \mathbf{R}^3 内の曲面では、ガウス写像が一点になるものは平面であり、ガウス写像が曲線になるものは柱面、錐面、接線曲面である。上記の $f:U \rightarrow S^3$ も e が曲線となる場合は S^3 内の大球の包絡線であり、大円のパラメーター族、すなわち大円織面であることを示すことができる。ここで、 S^3 内の球は $n \in \mathbf{R}^4 \setminus \{0\}$ と実数 c を用いて

$$S^2(n, c) = \{x \in S^3 \mid n \cdot x = c\}$$

とあらわすことができる。 $c = 0$ のときこれを大球と呼び、大球内の大円を S^3 の大円と呼ぶ。

本講演では S^3 内の大円織面について主に特異点の性質について報告した。

2 フレームと大円織面の不変量

I で开区間か S^1 をあらわすとする。 S^3 内の大円織面は正規直交フレーム $a_0, a_1, a_2, a_3 : I \rightarrow S^3$ を用いて

$$F_A(\theta, t) = \cos \theta a_1(t) + \sin \theta a_3(t)$$

と定義される。ただし $A(t) = (a_0(t), a_1(t), a_2(t), a_3(t)) \in SO(4)$ 。この正規直交フレームの不変量をここで導入する。以下のようにおく：

$$\begin{aligned} c_1(t) &= a'_0(t) \cdot a_1(t) = -a_0(t) \cdot a'_1(t), & c_4(t) &= a'_1(t) \cdot a_2(t) = -a_1(t) \cdot a'_2(t), \\ c_2(t) &= a'_0(t) \cdot a_2(t) = -a_0(t) \cdot a'_2(t), & c_5(t) &= a'_1(t) \cdot a_3(t) = -a_1(t) \cdot a'_3(t), \\ c_3(t) &= a'_0(t) \cdot a_3(t) = -a_0(t) \cdot a'_3(t), & c_6(t) &= a'_2(t) \cdot a_3(t) = -a_2(t) \cdot a'_3(t). \end{aligned}$$

このようにおくと次のフルネ型の公式が得られる：

$$\begin{cases} a'_0(t) &= c_1(t)a_1(t) + c_2(t)a_2(t) + c_3(t)a_3(t) \\ a'_1(t) &= -c_1(t)a_0(t) + c_4(t)a_2(t) + c_5(t)a_3(t) \\ a'_2(t) &= -c_2(t)a_0(t) - c_4(t)a_1(t) + c_6(t)a_3(t) \\ a'_3(t) &= -c_3(t)a_0(t) - c_5(t)a_1(t) - c_6(t)a_2(t). \end{cases}$$

これは次のように書くこともできる：

$$\begin{pmatrix} a'_0(t) \\ a'_1(t) \\ a'_2(t) \\ a'_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c_1(t) & c_2(t) & c_3(t) \\ -c_1(t) & 0 & c_4(t) & c_5(t) \\ -c_2(t) & -c_4(t) & 0 & c_6(t) \\ -c_3(t) & -c_5(t) & -c_6(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \end{pmatrix}.$$

ここで

$$C(t) = \begin{pmatrix} 0 & c_1(t) & c_2(t) & c_3(t) \\ -c_1(t) & 0 & c_4(t) & c_5(t) \\ -c_2(t) & -c_4(t) & 0 & c_6(t) \\ -c_3(t) & -c_5(t) & -c_6(t) & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(4),$$

に注意しておく. このことから, 行列に値をとる曲線 $C : I \rightarrow \mathfrak{so}(4)$ が与えられるとフレーム $A(t)$ が定まる. したがって大円織面 F_A が定まる. よって大円織面全体の集合は $C^\infty(I, \mathfrak{so}(4))$ と考えることができる.

3 特異点

可微分写像芽

$$f : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$$

に対し, p が f の特異点であるとは, $\text{rank } df_p < 2$ であるときをいう. 写像 f の特異点の集合を $S(f)$ であらわす. 写像の特異点を研究する際, 次の同値関係によって写像を同一視する. 2つの可微分写像芽

$$f, g : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$$

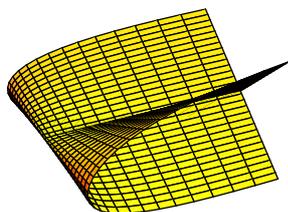
が \mathcal{A} -同値であるとは微分同相写像芽

$$h_t : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^2, 0), \quad h_s : (\mathbf{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$$

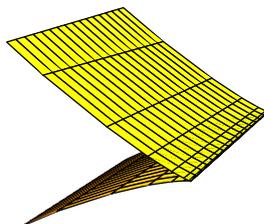
が存在して $f = h_t \circ g \circ h_s$ が成り立つときをいう. すなわち, 定義域と像域の座標変換で移りあうときに同値という.

可微分写像芽 $f : (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ が

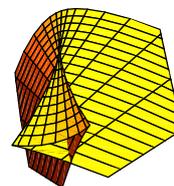
- ホイットニーの傘であるとは $(u, v) \mapsto (u, v^2, uv)$ と \mathcal{A} -同値であるときをいう.
- カस्प辺 (CE) であるとは $(u, v) \mapsto (u, v^2, v^3)$ と \mathcal{A} -同値であるときをいう.
- スワローテイル (SW) であるとは $(u, v) \mapsto (u, 4v^3 + 2uv, 3v^4 + uv^2)$ と \mathcal{A} -同値であるときをいう.
- カスプ的くちばし (CBK) であるとは $(u, v) \mapsto (u, -2v^3 + u^2v, 3v^4 - u^2v^2)$ と \mathcal{A} -同値であるときをいう.
- カスプ的交差帽子 (CCR) であるとは $(u, v) \mapsto (u, v^2, uv^3)$ と \mathcal{A} -同値であるときをいう.



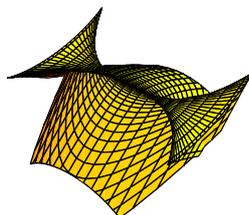
ホイットニーの傘



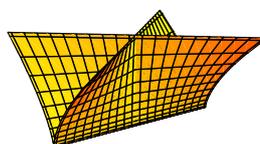
カスプ辺



スワローテイル



カスプ的くちばし



カスプ的交差帽子

(図は次ページ参照)

4 大円織面の特異点

大円織面は一般に特異点をもつ. 大円織面が前節の特異点をもつ必要十分条件を不変量 c_i ($i = 1, \dots, 6$) で書くことができる.

定理 4.1. 大円織面 F_A のある点 (θ_0, t_0) がホイットニーの傘に \mathcal{A} -同値であるための必要十分条件は $c_{\text{cr}}(t_0) = 0$ かつ θ_0 が

$$\cos \theta_0 c_1(t_0) + \sin \theta_0 c_3(t_0) = 0, \quad \cos \theta_0 c_4(t_0) - \sin \theta_0 c_6(t_0) = 0$$

をみたし, $c'_{\text{cr}}(t_0) \neq 0$ をみたすことである. ここで, $c_{\text{cr}}(t) = (c_1 c_6 + c_3 c_4)(t)$ である.

この定理にでてくる関数 $c_{\text{cr}}(t) = (c_1 c_6 + c_3 c_4)(t)$ には幾何学的意味があり, F_A のガウス・クロネッカー曲率は $-c_{\text{cr}}(t)$ の正の関数倍になる. 関数 $c_{\text{cr}}(t)$ が恒等的に消える大円織面を平坦大円織面という. 適当にフレームを取り替えることにより, 平坦大円織面は

$c_1 \equiv c_3 \equiv 0$ とできる. また, $(c_4, c_6) \neq 0$ と仮定しておく. 関数 $\theta(t)$ を

$$c_4(t) \cos \theta(t) - c_6(t) \sin \theta(t) = 0.$$

をみたすものとする.

定理 4.2. 大円織面 F_A は $c_1 \equiv c_3 \equiv 0$, $(c_4, c_6) \neq 0$ をみたすとする. このとき $p_0 = (\theta_0, t_0)$ が特異点であるための必要十分条件は $\theta_0 = \theta(t_0)$ である. さらに, 以下が成立する.

- F_A の p_0 における写像芽がカस्प辺に \mathcal{A} -同値である必要十分条件は p_0 で $c_2(c_5 + \theta') \neq 0$ が成り立つことである.
- F_A の p_0 における写像芽がスワローテイルに \mathcal{A} -同値である必要十分条件は p_0 で $c_5 + \theta' = 0$ かつ $c_2(c_5' + \theta'') \neq 0$ が成り立つことである.
- F_A の p_0 における写像芽がカस्प的交差帽子に \mathcal{A} -同値である必要十分条件は p_0 で $c_2 = 0$, かつ $c_2'(c_5 + \theta') \neq 0$ が成り立つことである.
- さらに $c_4 \equiv 0$ とする. F_A の p_0 における写像芽がカस्प的交差帽子に \mathcal{A} -同値である必要十分条件は p_0 で $c_6 = 0$, $\sin \theta_0 = 0$ かつ $c_2 c_5 c_6' \neq 0$ が成り立つことである.

5 特異点の双対性

本節では特異点の条件を不変量 C を用いて具体的に書くことによって見えてくる特異点の双対性を観察する. 仮定 $c_1 \equiv c_4 \equiv 0$, $c_6 \neq 0$ のもと, 大円織面 F_A の特異値 $F_A|_{S(F_A)}$ は

$$G_A(\theta, t) = \cos \theta a_0 + \sin \theta a_2.$$

である. ゆえに $S(G_A) = \{(\psi(t), t)\}$ である. ここで, $\psi(t)$ は $\cos \psi(t)c_3(t) + \sin \psi(t)c_6(t) = 0$ をみたす関数である. ゆえに G_A は $F_{\bar{A}}$ と等しい. ただし, $\bar{A} = (a_1, a_0, a_3, a_2)$. さて, \bar{C} を \bar{A} の不変量とする. このとき

$$\bar{c}_1 = -c_1, \quad \bar{c}_2 = c_5, \quad \bar{c}_3 = c_4, \quad \bar{c}_4 = c_3, \quad \bar{c}_5 = c_2, \quad \bar{c}_6 = -c_6. \quad (5.1)$$

となる. よって G_A が平坦であるための必要十分条件は $c_1 \equiv c_4 \equiv 0$ であり, さらに $G(S(G)) = a_0$ となる必要十分条件は $c_1 \equiv c_3 \equiv c_4 \equiv 0$, である. よって, 以下の図式を

得る.

$$\begin{array}{ccc}
 F_A & \xrightarrow{\text{特異値をとる}} & a_1 \\
 \Delta\text{-双対} \uparrow & & \downarrow \Delta\text{-双対} \\
 a_0 & \xleftarrow{\text{特異値をとる}} & G_A
 \end{array}$$

仮定 $c_1 \equiv c_3 \equiv c_4 \equiv 0$ のもと, 定理 4.2 を書きなおすと次のような表を得る.

	CE	SW	CCR	CBK
F_A $\theta_0 = 0, \pi$	$c_2 c_5 c_6 \neq 0$	$c_5 = 0,$ $c_2 c'_5 c_6 \neq 0$	$c_2 = 0,$ $c'_2 c_5 c_6 \neq 0$	$c_6 = 0,$ $c_2 c_5 c'_6 \neq 0$
G_A $\theta_0 = 0, \pi$	$c_2 c_5 c_6 \neq 0$	$c_2 = 0,$ $c'_2 c_5 c_6 \neq 0$	$c_5 = 0,$ $c_2 c'_5 c_6 \neq 0$	$c_6 = 0,$ $c_2 c_5 c'_6 \neq 0$

この表から, スワローテイル \leftrightarrow カスプ的交差帽子, カスプ的くちばし \leftrightarrow カスプ的くちばしという特異点の条件の双対性が観察できる. スワローテイル \leftrightarrow カスプ的交差帽子的双対性はシェルバク, 石川, 藤森・佐治・梅原・山田等によって指摘されているが, 曲線から円織面を考えるという操作でも同じような双対性が観察できる.

参考文献

- [1] S. Izumiya, K. Saji and T. Nagai, *Great circular surfaces in the three-sphere*, *Differential Geom. Appl.* **29** (2011), 409-425.