

ツイスター正則なアファイン曲面 と射影不変量

長谷川和志 (金沢大学人間社会研究域)

1 序.

偶数次元のリーマン多様体内の曲面でツイスターリフトとよばれるツイスター空間への写像をもつような対象の研究は多く行われている. この種の曲面のなかで, ツイスターリフトがツイスター空間上の概複素構造に関して正則となっている曲面はツイスター正則な曲面とよばれ, 特に多くの研究がある ([2],[3],[4] 等). 活発に研究されている理由の一つに, この概複素構造がリーマン計量の共形変形によって不変であることがあげられるが, ツイスタープログラム (幾何構造を持った実多様体に複素多様体を対応させて研究を行う手法. 次の §2 を参照のこと) に基づけば, 非常に自然な研究対象と考えることもできる.

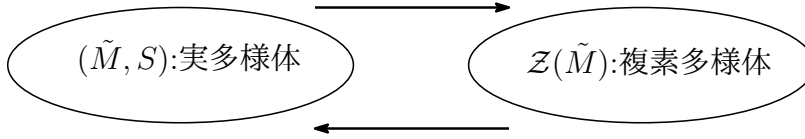
本稿では, 振れない接続の与えられた偶数次元多様体内のツイスター正則なアファイン曲面 (アファインはめ込み) を考える ([5]). 諸定義等はリーマン幾何学の場合から容易に類推できるものだが, 等長はめ込みの場合には現れないような例などもあり興味深いと思われる. また, 上述のツイスタープログラムの観点からは, アファインはめ込みに関して, 外空間の接続の射影変形で不変な性質を論ずるのに有効であると思われる.

2 ツイスタープログラム.

ツイスタープログラムとは, 幾何構造 S の与えられた実多様体 $\tilde{M}$ に対して, S を保つ変換で不変なツイスター空間とよばれる複素多様体 $\mathcal{Z}(\tilde{M})$ を対応させ (図の (1)), 元の実多様体の問題を複素多様体の問題に再定式化し研究する手法を指す¹(図の (2)-1,2)). この手法で, $\tilde{M}$ の S に関して不変な性質を, 複素幾何学的に調べることが可能となるほか, 複素幾何学的に良い性質を持つ, あるいは意味のある対象は, $\tilde{M}$ においてもそうであることが期待できる.

¹ツイスタープログラムという言葉は様々な意味で用いられる様だが, ここでは D. Alekseevsky と M. Graev による解釈に従い, この様な研究手法の総称をさすものとする.

(1) S を保つ変換で不変な複素多様体を対応



- (2)-1 複素幾何学 (多様体) の問題に置き換えて研究し, 結果を $\tilde{M}$ へ
(2)-2 複素幾何学的に意味のある対象は, $\tilde{M}$ にも意味があるだろう

$(\tilde{M}, S)$:幾何構造の与えられた実多様体

$Z(\tilde{M})$:ツイスター空間とよばれる

S :共形構造, 射影構造, 四元数構造, ...

この考え方は, 部分多様体論を展開する上でも有効である. 例えば, $\tilde{M}$ として, 標準計量 $\tilde{g}_0$ の定める共形構造 $[\tilde{g}_0]$ の与えられた 4 次元球面 S^4 を考える. ツイスター空間 $Z(S^4)$ は S^4 上の S^2 束としての 3 次元複素射影空間 $\mathbb{C}P^3$ で与えられる. コンパクトなリーマン面 M から $\mathbb{C}P^3$ への正則写像 $\tilde{I}$ と束射影 $\pi: \mathbb{C}P^3 \rightarrow S^4$ を合成すると, $\pi \circ \tilde{I}: M \rightarrow S^4$ は, (それがはめ込みとなるならば) 自身が属する正則ホモトピー類のなかでウィルモア汎関数を最少とする. つまり, リーマン面から $\mathbb{C}P^3$ への正則写像から, S^4 内のウィルモア曲面, すなわちウィルモア汎関数の停留点となる曲面を構成できる (上図の (2)-1) ことになる. また, この様に構成されたウィルモア曲面はウィルモア汎関数に関して弱安定 (第 2 変分が非負) となるという良い性質 (上図の (2)-2) をもつ. すなわち, ツイスタープログラムの考えに基づけば, S^4 内のある種のウィルモア曲面の構成 (共形幾何) は, $\mathbb{C}P^3$ への正則写像の構成 (複素幾何) に帰着できることを意味する. さらに, このように構成されたウィルモア曲面は弱安定という良い性質をもつ.

本稿では, $\tilde{M}$ の幾何構造 S としてアファイン接続 $\tilde{\nabla}$ の定める射影構造 $[\tilde{\nabla}]$ をとり, $\tilde{M}$ へのアファインはめ込みの枠組みで考える. アファインはめ込みに関して, ツイスター空間を用いて射影不変量を論ずることはこれまでなされていないが, ツイスタープログラムの考え方に基づけば自然なことと思われる.

3 アファインはめ込みのツイスターリフト.

この節では, 本稿で必要な諸定義等を述べる.

複素ベクトル束: (M, J) を概複素構造 J をもった概複素多様体とし, E を複素構造 $I \in \Gamma(\text{End}(E))$ と接続 D が与えられた M 上の複素ベクトル束とするただし, I が D に関して平行であることは仮定しない. まず, $X \in TM, \zeta \in \Gamma(E)$ に対して,

$$D'_X \zeta := \frac{1}{2}(D_X \zeta - ID_{JX} \zeta), \quad D''_X \zeta := \frac{1}{2}(D_X \zeta + ID_{JX} \zeta)$$

とおく. E の接続 D は $\text{End}(E)$ に接続を誘導するが, それを $\bar{D}$ と表す. 上で注意したように I は D に関して平行とは仮定していないが, 接続 D^I を

$$D_X^I \zeta := D_X \zeta - \frac{1}{2} I(\bar{D}_X I)(\zeta)$$

$(X \in TM, \zeta \in \Gamma(E))$ と定めると, I は D^I に関して平行となる. ここで, $X \in TM$, $\zeta \in \Gamma(E)$ に対して,

$$A_X^{D'} \zeta := \frac{1}{2}(D'_X \zeta + ID'_X I \zeta), \quad A_X^{D''} \zeta := \frac{1}{2}(D''_X \zeta + ID''_X I \zeta),$$

と定めると, $D' = D^I + A^{D'}$, $D'' = D^I + A^{D''}$, が成り立つことが分かる. また, $A^{D'}, A^{D''} \in \Lambda^1(\text{End}(E))$ となることも分かる.

次に, もう一つ E の他に, 複素構造 $I' \in \Gamma(\text{End}(E'))$ が与えられた複素ベクトル束 E' がある場合を考える. $T \in \Lambda^1(\text{Hom}(E, E'))$ に対して,

$$\begin{aligned} T_X^{(2,0)} \xi &:= \frac{1}{4}(T_X \xi - I' T_{JX} \xi - I' T_X I \xi - T_{JX} I \xi), \\ T_X^{(1,1)+} \xi &:= \frac{1}{4}(T_X \xi + I' T_{JX} \xi - I' T_X I \xi + T_{JX} I \xi), \\ T_X^{(1,1)-} \xi &:= \frac{1}{4}(T_X \xi - I' T_{JX} \xi + I' T_X I \xi + T_{JX} I \xi), \\ T_X^{(0,2)} \xi &:= \frac{1}{4}(T_X \xi + I' T_{JX} \xi + I' T_X I \xi - T_{JX} I \xi). \end{aligned}$$

とおく $(X \in TM, \xi \in E)$.

アファインはめ込み: (M, ∇) , $(\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ を捩れない接続 $\nabla, \tilde{\nabla}$ の与えられた多様体とし, $f: M \rightarrow \tilde{M}$ をはめ込みとする. 以降, はめ込み f の微分写像 f_* は混乱のおそれがない場合は省略する. $f: (M, \nabla) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ が N を横断束とするアファインはめ込みであるとは, $f^* T\tilde{M} = TM \oplus N$ をみたし, $p_T((f^* \tilde{\nabla})_X Y) = \nabla_X Y$ ($X, Y \in \Gamma(TM)$) を満たすことをいう. ここで, $p_T: f^* T\tilde{M} \rightarrow TM$ は射影を表す. このとき, リーマン幾何学における等長はめ込みのときと同様の方法で, アファイン基本形式 α , アファイン型作用素 S , N の接続 ∇^N が定義できる. すなわち, $X, Y \in \Gamma(TM)$, $\xi \in \Gamma(N)$ に対して,

$$\alpha(X, Y) = p_N((f^* \tilde{\nabla})_X Y), \quad S_\xi X = -p_T((f^* \tilde{\nabla})_X \xi), \quad \nabla_X^N \xi = p_N((f^* \tilde{\nabla})_X \xi)$$

と定める. ここで, $p_N: f^* T\tilde{M} \rightarrow N$ は射影を表す. なお, アファインはめ込みに関しては, [6] 等を参照のこと.

ツイスター空間: まず線形代数的な準備から始める. V を偶数次元の実ベクトル空間とし, $W(V) = \{J \in \text{End}(V) \mid J^2 = -id\}$ とする. $J \in W(V)$ において, $T_J W(V) \cong \{a \in \text{End}(V) \mid aJ = -Ja\}$ である. $a \in T_J W(V)$ に対して,

$$\mathcal{J}_V(a) := \frac{1}{2}[J, a] = Ja$$

と定めると、 $\mathcal{F}_V$ は $W(V)$ の複素構造となる。

$(\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ を振れない接続 $\tilde{\nabla}$ の与えられた $2n$ 次元の多様体とし、

$$\mathcal{Z}(\tilde{M}) := \bigcup_{x \in \tilde{M}} W(T_x \tilde{M}) \subset \text{End}(T\tilde{M})$$

とおく。リーマン幾何学の場合と同様の方法で、次の通り $\mathcal{Z}(\tilde{M})$ には概複素構造が定義できる。 $\mathcal{V}_J := \text{Ker}(\pi_*)_J$, $\mathcal{H}_J := \text{Ker}(K_{\tilde{\nabla}})_J$ とする ($J \in \mathcal{Z}(\tilde{M})$)。ここで、 $\pi: \mathcal{Z}(\tilde{M}) \rightarrow \tilde{M}$ は束射影であり、 $K_{\tilde{\nabla}}$ は接続 $\tilde{\nabla}$ から定まる接続写像である。このとき、 $T\mathcal{Z}(\tilde{M}) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$ と分解される。概複素構造 $J_{\tilde{\nabla}}^Z$ を $X \in \mathcal{H}_J$ に対して、

$$(J_{\tilde{\nabla}}^Z)_J(X) := (J\pi_*(X))^h$$

と定める。ただし、 $(\cdot)^h$ は $(\cdot)$ の水平リフトを表す。また、 $U \in \mathcal{V}_J$ に対しては、

$$(J_{\tilde{\nabla}}^Z)_J(U) := \mathcal{F}_{T_{\pi(J)}\tilde{M}}(U)$$

と定める。水平分布 $\mathcal{H}$ は接続 $\tilde{\nabla}$ に依存するが、次のことが分かる。

補題 1. 接続 $\tilde{\nabla}^1$ と $\tilde{\nabla}^2$ が射影同値ならば $J_{\tilde{\nabla}^1}^Z = J_{\tilde{\nabla}^2}^Z$ である。

以降、 $\tilde{\nabla}$ の射影変形に関して不変な性質のみ扱うので、 $J_{\tilde{\nabla}}^Z$ は単に J^Z と表す。また、 $(\mathcal{Z}(\tilde{M}), J^Z)$ を $(\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ のツイスター空間とよぶ。

(注) J^Z が積分可能 $\iff \tilde{\nabla}$ が射影平坦。

ツイスターリフト: (M, ∇, I) を振れない接続 ∇ と概複素構造 I が与えられた多様体とする。ただし、 I の ∇ に関する平行性は仮定しない。 $f: (M, \nabla) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ を N を横断束とするアファインはめ込みとし、横断束 N に複素構造 $I^N \in \Gamma(\text{End}(N))$ が存在する場合を考える。ただし、 I^N の接続 ∇^N に関する平行性も仮定しない。 $\tilde{I}_x$ を $X \in T_x M$ に対して $\tilde{I}_x(X) = I_x(X)$ と定め、 $\xi \in N_x$ に対して $\tilde{I}_x(\xi) = I_x^N(\xi)$ と定める。 $\tilde{I}: M \rightarrow \mathcal{Z}(\tilde{M})$ を f のツイスターリフトという。

$$\begin{array}{ccc}
 & & (\mathcal{Z}(\tilde{M}), J^Z) \\
 & \nearrow \tilde{I} & \downarrow \pi \\
 (M, \nabla, I) & \xrightarrow[f: \text{アファインはめ込み}]{\tilde{I} \circ \pi = f} & (\tilde{M}, \tilde{\nabla})
 \end{array}$$

(N, I^N)

4 射影不変量.

この節では、ツイスターリフトを持つアファインはめ込みの射影不変量を与える．まず、次のことがわかる．

命題 2. $f : (M, \nabla) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ を N を横断束とするツイスターリフト $\tilde{I}$ をもつアファインはめ込みとする． $\alpha, A^{\nabla''}, \bar{\nabla}^N I^N, S^{(1,1)+}, S^{(0,2)}$ は $\tilde{\nabla}$ の射影変形で不変である．

特に、命題 2 における $\bar{\nabla}^N I^N$ の不変性から、次も分かる．

系 3. (N, I^N) の第 1 チャーン形式 $c_1(N, \nabla^{NI^N})$ は $\tilde{\nabla}$ の射影変形で不変である．

$\tilde{\nabla}$ のリッチ曲率を $Ric^{\tilde{\nabla}}$ とする．ただし、 $Ric^{\tilde{\nabla}}$ は対称とは限らない． M 上の $(0, 2)$ テンソル ρ に対してその対称化を ρ^s と表す． M 上の $(0, 2)$ テンソル Φ を $X, Y \in TM$ に対して、

$$\begin{aligned} \Phi(X, Y) := & -\text{Tr}((f^{\#}\tilde{\nabla})_X \tilde{I})(f^{\#}\tilde{\nabla})_Y \tilde{I} + (f^{\#}\tilde{\nabla})_{IX} \tilde{I} (f^{\#}\tilde{\nabla})_{IY} \tilde{I}) \\ & + \frac{4}{2n-1} ((f^* Ric^{\tilde{\nabla}})^s(X, Y) + (f^* Ric^{\tilde{\nabla}})^s(IX, IY)) \\ & - 2\text{Tr} R_{X, IY}^{\nabla^I} I + 2\text{Tr} R_{IX, Y}^{\nabla^I} I \end{aligned}$$

と定める．

射影曲率テンソルの不変性や系 3 等から次が分かる．

命題 4. $f : (M, \nabla) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ を N を横断束とするツイスターリフト $\tilde{I}$ をもつアファインはめ込みとする． Φ は $\tilde{\nabla}$ の射影変形で不変である．

(M, ∇, I) を捩れの無い接続 ∇ と複素構造 I が与えられた曲面とする． M には面積要素 Ω が存在するので、 M 上の対称な $(0, 2)$ テンソル s に関して、

$$a_{\Omega}(s) = \frac{s(X, X) + s(IX, IX)}{\Omega(X, IX)} \quad (X(\neq 0) \in TM)$$

が定義できる． $a_{\Omega}(s)$ は $X \in TM$ の取り方によらず、 $a_{\Omega}(s)\Omega$ は Ω の取り方にもよらない．命題 4 等から、ツイスターリフトを持つアファイン曲面に関して、次が得られた．

定理 5. $f : (M, \nabla) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ をツイスターリフト $\tilde{I}$ を持つ N を横断束とするアファインはめ込みとする． M がコンパクトな曲面ならば、

$$\int_M a_{\Omega} \left(-\text{Tr}((f^{\#}\tilde{\nabla})_{\bullet} \tilde{I})((f^{\#}\tilde{\nabla})_{\bullet} \tilde{I}) + \frac{4}{2n-1} (f^* Ric^{\tilde{\nabla}})^s \right) \Omega \quad (1)$$

は $\tilde{\nabla}$ の射影変形で不変である．ただし、 $(f^{\#}\tilde{\nabla})_{\bullet}$ は f による引き戻し束 $f^{\#}\text{End}(T\tilde{M})$ に接続 $f^{\#}\tilde{\nabla}$ から定義される接続である．

5 ツイスター正則なアフィン曲面

ツイスターリフト $\tilde{I}$ を持つアファインはめ込み $f: (M, \nabla) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ が, $\tilde{I}_* \circ I = J^Z \circ \tilde{I}_*$ を満たすとき, f はツイスター正則であるという. $\mathcal{Z}(\tilde{M})$ の複素構造 J^Z は $\tilde{\nabla}$ の射影変形で不変なので, アファインはめ込み f がツイスター正則であるという性質は $\tilde{\nabla}$ の射影変形で不変であることは分かるが, 次の命題 6 と命題 2 から示せる.

命題 6. $f: (M, \nabla) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ をツイスターリフト $\tilde{I}$ を持つ N を横断束とするアファインはめ込みとする. このとき, f がツイスター正則であることと, 次の 4 条件が成立することは同値である: (1) $A^{\nabla''} = 0$, (2) $A^{\nabla^{N''}} = 0$, (3) $\alpha^{(0,2)} = 0$, (4) $S^{(0,2)} = 0$.

つぎに, ツイスター正則なアフィン曲面の例をあげる. 以下, D^m で $\mathbb{R}^m$ の標準的なアフィン平坦接続を表す. また, $(x^1, \dots, x^m)$ を $\mathbb{R}^m$ のアフィン座標系とすると, $\xi_i = (\partial/\partial x^i) \circ f$ とおく.

例 7. $U \subset \mathbb{R}^2$ の開集合とし, $f(x, y) = (x, y, F(x, y), G(x, y))$ で与えられるグラフはめ込み $f: (U, D^2|_U) \rightarrow (\mathbb{R}^4, D^4)$ を考える. U および横断束 $N = \text{Span}\{\xi_3, \xi_4\}$ の複素構造を

$$I\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}, I\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}, I^N(\xi_3) = \xi_4, I^N(\xi_4) = -\xi_3$$

と定める. このとき, f がツイスター正則であることの必要十分条件は

$$F_{xx} - 2G_{xy} - F_{yy} = 0 \text{ および } G_{xx} + 2F_{xy} - G_{yy} = 0$$

を満たすことである.

一般に N を横断束とするアファインはめ込みが全臍的であるとは, そのアファイン型作用素 S について $S = \rho \otimes id_{TM}$ となる $\rho \in \Gamma(N^*)$ が存在すること. ユークリッド空間への等長はめ込みの場合, 全臍的曲面はツイスター正則となるが, 次の例はそれに対応しているものと考えられる.

例 8. (M, ∇, I) を捩れない接続 ∇ と複素構造 I を持つ曲面とする. $g: (M, \nabla) \rightarrow (\mathbb{R}^3, D^3)$ を $\text{Span}\{g\}$ を横断束とするアファインはめ込みとする. さらに $\iota: (\mathbb{R}^3, D^3) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, D^{2n})$ ($n \geq 2$) を全測地的埋め込みとし, $f := \iota \circ g$ とおく. このとき, 横断束として

$$N = \text{Span}\{f, \xi_4, \dots, \xi_{2n}\}$$

と取り, N の複素構造を

$$I^N(f) = \xi_4, I^N(\xi_4) = -f, \dots, I^N(\xi_{2n-1}) = \xi_{2n}, I^N(\xi_{2n}) = -\xi_{2n-1}$$

と定める. $f : (M, \nabla) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, D^{2n})$ はツイスターリフトを持つ全臍的なアファインはめ込みとなり, f がツイスター正則であることと ∇ のリッチ曲率 Ric^∇ が I -不変であることは同値である.

ツイスター正則な曲面に関して, 次が得られた.

定理 9. $f : (M, \nabla) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ を N を横断束とするツイスター正則なアファインはめ込みとする. $\tilde{\nabla}$ が射影平坦かつ M がコンパクトな曲面ならば, 定理 5 の射影不変量 (1) は 16π の整数倍である.

例えば, 例 8 のように与えられたコンパクトなツイスター正則な曲面に対しては, 射影不変量 (1) は 0 となる. また, 定理 9 の応用として, 次が得られる ([1], [4]). なお, 等長的にはめ込まれた曲面は, そのツイスターリフトが水平写像のとき超極小であるとよばれ, そのツイスターリフトは正則となる.

系 10. 単位球面 S^{2n} 内の向き付けられたコンパクトな超極小曲面の面積は 2π の整数倍である.

最後に, ツイスター正則なアファイン曲面の中で “最も単純” といってよいであろう曲面の一つの特徴付けを述べる. 等長はめ込みの場合, 4次元ユークリッド空間内の曲面がツイスター正則かつ法接続が平坦ならばそれは球面か平面の一部 (全臍的) となることが知られており, ゆえにその第一法空間の階数は 1 または 0 となる. 一方, 例 7 において, 例えば $F(x, y) = x^2$, $G(x, y) = xy$ とする. このグラフはめ込みはツイスター正則であり ∇^N は平坦であるが第一法空間 $\text{Span}\{\alpha(X, Y) \mid X, Y \in TM\}$ の階数は 2 となり, (当然であるが) 等長はめ込みの場合の状況とは異なる. ∇^N の平坦性より強い “ f が I および $-I$ の両方に関してツイスター正則になる” ということを課すと, 等長はめ込みの場合と同様な次が得られる.

定理 11. (M, ∇, I) を捩れない接続 ∇ と複素構造 I をもった曲面で, ∇ のリッチ曲率 Ric^∇ は対称とする. $f : (M, \nabla) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, D^{2n})$ をツイスターリフトを持つ実解析的なアファインはめ込みとする. f が I と $-I$ の両方に関してツイスター正則とすると,

- (1) f は全測地的 ($\alpha = 0$), または
- (2) $\mathbb{R}^{2n}$ の 3 次元のアファイン部分空間 V で $f(M) \subset V$ を満たすものが存在し, $f : M \rightarrow V$ は非退化な全臍的なアファインはめ込みとなる.

(注) 一般に, アファインはめ込みの場合, アファイン基本形式 α とアファイン型作用素 S の間に関係はないので, $\alpha = 0$ が $S = 0$ を意味するわけではない.

参考文献

- [1] E. Calabi, Minimal immersions of surfaces in Euclidean spheres, J. Diff. Geom. 1, 111-125 (1967).
- [2] I. Castro and F. Urbano, Twistor holomorphic Lagrangian surfaces in the complex projective and hyperbolic planes, Ann. Global Anal. Geom. 13 (1995) 59-67.
- [3] T. Friedrich, On surfaces in four-spaces, Ann. Global Anal. Geom. 2, 275-287 (1984).
- [4] K. Hasegawa, The first Chern class and conformal area for a twistor holomorphic immersion, Abh. Math. Semin. Univ. Hambg., 84 (2014), 67-83.
- [5] K. Hasegawa, Twistor holomorphic affine surfaces and projective invariants, SUT J. Math., 50 (2014), 325-341.
- [6] K. Nomizu and T. Sasaki, *Affine differential geometry*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.