リーマン対称空間中の全測地的曲面と冪零軌道
Totally geodesic surfaces in Riemannian symmetric spaces and nilpotent orbits

奥田 隆幸*(広島大)
(本講演は久保亮氏 (広島修道大), 間下克哉氏 (法政大)
田丸博士氏 (広島大) との共同研究に基づく)

1 Introduction

M を連結な半単純リーマン対称空間とする. M の連結な部分多様体 S が **全測地的** であるとは, S の各点 $p \in S$ において, p を通り S に接する M 内の測地線は必ず S 内の曲線となることとする.[1] 以降, 計量を保つ M の自己微分同相全体のなす半単純 Lie 群を $\mathrm{Isom}(M)$ とし, $\mathrm{Isom}(M)$ の単位連結成分を $\mathrm{Isom}_0(M)$ と書くことにする. 本稿では M 内の全測地的部分多様体の $\mathrm{Isom}_0(M)$-共役類の分類について考えたい. M が非コンパクト型リーマン対称空間であるとき, そのコンパクト双対 M' (連結コンパクト型リーマン対称空間) に対して, "M' 内の全測地的部分多様体の $\mathrm{Isom}_0(M')$-共役類" は M 内のそれと対応することが知られている. 以降, 非コンパクト型の場合に併せて記述を行う.

よく知られているように, 極大平坦全測地的部分多様体の一意性から, 平坦な全測地的部分多様体の分類は容易である. 従ってここでは非平坦なものの分類について興味がある. 階数 1 の既約リーマン対称空間については Wolf [13, 12] によって非平坦かつ極大な全測地的部分多様体が分類された. また, 階数 2 の既約リーマン対称空間の場合にも Chen–長野 [1], Klein [6, 8, 9] らにより非平坦かつ極大な全測地的部分多様体の分類が与えられている. また

*okudatak@hiroshima-u.ac.jp

[1] 本稿では全測地的部分多様体といったら完備であるとしている.

$\operatorname{rank} G = \operatorname{rank} M$ となるような場合には, 極大全測地的部分多様体であってそのランクが M と一致するようなものが井川–田崎 [4] により分類されている. しかし, リーマン対称空間の階数が高い場合には一般的には全測地的部分多様体の分類は知られていない. 文献 [7] ではリーマン対称空間内での全測地的部分多様体の分類についてのこれまでの進展がまとめられている.

本稿では冪零軌道との対応を通じて, M **内の非平坦全測地的曲面** (*i.e.* 2-**次元部分多様体**) **の** $\mathrm{Isom}_0(M)$-**共役類の分類**を与える方法を紹介する. [2] 先述の通り, 平坦な全測地的部分多様体や一次元全測地的部分多様体の分類は容易であるから, "非平坦全測地的曲面の分類" は非自明なケースのうち最も基本的な問題であると考えられる. 高いランクの場合を含むリーマン対称空間内の全測地的曲面の分類についての先行研究として, 間下克哉氏による一連の研究 [10] 及び藤丸–久保–田丸による結果 [3] を挙げておく. [3]

謝辞: 本研究にあたり, 東海大学の笹木集夢氏から多くの有益な助言をいただいた. この場を借りて感謝を申し上げたい.

2 Main theorem

主結果を述べるため, いくつかの言葉を以下で導入する. M を連結非コンパクト型リーマン対称空間とし, 簡単のため $G = \mathrm{Isom}(M)$, $G_0 = G$ の単位連結成分 とおき, $\mathfrak{g} := \operatorname{Lie} G$ とする. このとき $\mathfrak{g}$ は非コンパクトな半単純 Lie 環である.

G の $\mathfrak{g}$ への随伴作用を $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ と書くことにする. ここで $\mathrm{Ad}(G) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ 及び $\mathrm{Ad}(G_0) = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ が成り立つことに注意しておく. 簡単のため, $\mathfrak{g}$ 内の各 $\mathrm{Ad}(G)$-軌道 [resp. $\mathrm{Ad}(G_0)$-軌道] を単に G-軌道 [resp. 随伴軌道] と呼ぶことにする. 随伴軌道はいつでも連結であるが, G-軌道は一般にいくつかの随伴軌道の非交和となることに注意しておく.

$\mathfrak{g}$ の元 X が冪零であるとは, "$\mathrm{ad}(X) \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ が冪零である" ということを指す. $\mathfrak{g}$ 内の G-軌道 [resp. 随伴軌道] $\mathcal{O}$ について, $\mathcal{O}$ が冪零元からなるとき, $\mathcal{O}$ は**冪零** G-**軌道** [resp. **冪零随伴軌道**] であるという. ここでは零軌道 $\{0\} \subset \mathfrak{g}$ も冪零軌道であるとし, 本稿では零軌道でない冪零軌道を単に "零で

[2]本稿で $\mathrm{Isom}(M)$ ではなく $\mathrm{Isom}_0(M)$ での共役類の分類を考えている理由は実半単純 Lie 環の外部自己同型の取り扱いの難しさからくる技術的なものであり, 幾何学的な観点では $\mathrm{Isom}(M)$-共役類での分類を行うのが望ましい.

[3]今回考えている全測地的部分多様体の分類は局所的なものであり, コンパクト型リーマン対称空間上の全測地的曲面のトポロジーは調べていない (非コンパクト型の場合は $\mathbb{R}^2$ と必ず同相). ランク 2 のコンパクト型リーマン対称空間の場合の全測地的部分多様体のトポロジーについては木村–田中 [5] による仕事が知られている.

ない冪零軌道” とよぶことにする．一般に, 冪零随伴軌道は有限個しかなく, その分類も知られている (詳しくは [2, Chapter 9] を参照されたい).

X が $\mathfrak{g}$ の冪零元であるとき, $-X$ もまた $\mathfrak{g}$ の冪零元である．従って, 各冪零 G-軌道 [resp. 冪零随伴軌道] $\mathcal{O}$ に対して, $-\mathcal{O} := \{-X \mid X \in \mathcal{O}\}$ もまた冪零 G-軌道 [resp. 冪零随伴軌道] となる．特にこれにより, 位数 2 の群 $\{\pm 1\}$ の零でない冪零軌道の集合への作用が定義される.

本講演の最初の主結果は以下のものである:

Theorem 2.1. 以下の二つの集合の間に一対一対応が存在する*:*

- M 内の非平坦全測地的曲面の G-共役類の集合*.*
- 零でない冪零 G-軌道の集合における $\{\pm 1\}$-作用についての商集合*.*

また*,* 以下の二つの集合の間にも一対一対応が存在する*:*

- M 内の非平坦全測地的曲面の G_0-共役類の集合*.*
- 零でない冪零随伴軌道の集合における $\{\pm 1\}$-作用についての商集合*.*

Remark 2.2. 詳細は *Section 3* で後述するが*,* 上記の定理における一対一対応は具体的な構成によって与えられるものであり*,* 単に一対一対応の存在を主張する定理ではない*.*

いま $\mathrm{Ad}(G_0) = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ であったことを思い出そう．先に述べたように半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ 内の冪零随伴軌道は分類が知られている (詳しくは [2, Chapter 9] を参照). 従って, 冪零随伴軌道の集合における $\{\pm 1\}$-作用がどのようなものになるのかを調べれば, “M 内の非平坦全測地的曲面の G_0-共役類の集合” が分類されることとなる．冪零随伴軌道の集合における $\{\pm 1\}$-作用は個々のケースにおいてそれぞれ議論を行えば記述が可能であるが, Section 4 ではいくつか記述が簡単なケースについて, この $\{\pm 1\}$-作用について具体的に述べる.

Remark 2.3. 少なくとも講演者の知る限り*,* 一般の半単純 *Lie* 環 $\mathfrak{g}$ 内の冪零 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$-軌道の完全な分類は知られていないように思われる *(*$\mathrm{Ad}(G) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ に注意*)*. これは冪零随伴軌道の集合における外部自己同型群 $\mathrm{Out}(\mathfrak{g})$ *(* 有限群 *)* の作用についての商集合を分類することに他ならない．詳細は省略するが*,* いくつかの特定の $\mathfrak{g}$ *(* 例えば $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{sl}(2k+1, \mathbb{R})$ $(k \geq 1)$ など *)* については*,* $\mathrm{Out}(\mathfrak{g})$ の冪零随伴軌道集合への作用が自明となることが証明できる．このようなケースについては M 内の非平坦全測地的曲面の G_0-共役類の集合の分類が G-共役類の集合の分類と一致することになる．しかし $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ などのケースでは $\mathrm{Out}(\mathfrak{g})$ の冪零随伴軌道集合への作用が非自明であることも分かっており*,* 一般的な状況でどうなるのかよく分かっていない*.*

3 Correspondence between totally geodesic surfaces and nilpotent orbits

この節では Theorem 2.1 における, 非コンパクト型リーマン対称空間 M 内の非平坦全測地的曲面の G_0-共役類と $\mathfrak{g}$ 内の冪零随伴軌道の対応 (Theorem 2.1 の後半部) について解説する.

まず M 内の全測地的部分多様体と Lie triple system の対応について基本的な事実を復習しよう. M 内の基点 o を一つ選んで固定する. このとき G_0 の o についての固定化部分群を K_0 と書けば, K_0 は半単純リー群 G の極大コンパクト部分群となる. リーマン対称対 (G_0, K_0) に対応する $\mathfrak{g}$ の Cartan 分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ と書くことにすると T_oM と $\mathfrak{p}$ は自然に同一視される. いま M をリーマン多様体と考えているが, T_oM の内積は $\mathfrak{p}$ 上では $\mathfrak{g}$ の Killing form に由来する内積と一致するように定義しておく. また, $\mathfrak{p}$ の部分空間 V が *Lie triple system* であるとは,

$$[[V, V], V] \subset V$$

を満たすこととして定義する. ただし $[\ ,\ ]$ は $\mathfrak{g}$ 内の Lie bracket である.

このとき以下の事実が知られている.

Theorem 3.1. *上記の設定において, 以下が成り立つ:*

1. *$V \subset \mathfrak{p}$ が Lie triple system であるとき, 同一視 $T_oM \simeq \mathfrak{p}$ を通じて $S_V := \mathrm{Exp}_o V \subset M$ と定義すると, S_V は M の全測地的部分多様体である. ただし $\mathrm{Exp}_o : T_oM \to M$ はリーマン多様体 M の点 o における exponential map としている.*

2. *上記の対応は以下の二つの集合の間の一対一対応を与える.*
   - *$\{$ 全測地的部分多様体 in $M\}/G_0$.*
   - *$\{$Lie triple systems in $\mathfrak{p}\}/K_0$.*

3. *上記の対応において, 全測地的部分多様体が平坦であることと, それに対応する Lie triple system が可換であることは同値である.*

特に系として以下が成り立つ:

Corollary 3.2. *Theorem 3.1* (1) *の対応により, 以下の二つの集合が一対一に対応する.*

- *$\{$ 非平坦全測地的曲面 in $M\}/G_0$.*

- { 非可換二次元 *Lie triple systems in* $\mathfrak{p}$}$/K_0$.

次に $\mathfrak{p}$ 内の Lie triple system と $\mathfrak{g}$ 内の簡約部分 Lie 環との対応について復習しよう. 非コンパクト半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 環 $\mathfrak{l}$ が $\mathfrak{g}$ **内で簡約**であるとは, $\mathfrak{g}$ のある Cartan 対合 θ が存在して, $\theta(\mathfrak{l}) = \mathfrak{l}$ となることとする (Cartan 対合 θ については固定して考えている訳ではないことに注意). このとき $\mathfrak{l}$ は Lie 環として簡約である (逆は成り立たない. 例えば一次元 Lie 環は可換なので簡約であるが, 一般に $\mathfrak{g}$ の冪零元の生成する一次元部分 Lie 環は $\mathfrak{g}$ 内では簡約にならない). 以降, $\mathfrak{g}$ 内で簡約な部分 Lie 環を単に $\mathfrak{g}$ の簡約部分 Lie 環と呼ぶことにする. 特に $\mathfrak{l}$ の (Lie 環としての) イデアル $\mathfrak{l}'$ であって, $\mathfrak{g}$ の Killing form が $\mathfrak{l}'$ 上負定値となるようなものが存在しないとき, $\mathfrak{g}$ の簡約部分 Lie 環 $\mathfrak{l}$ は**コンパクト因子を持たない**ということにする.

このとき以下の事実がなりたつ:

Theorem 3.3. $\mathfrak{g}$ を半単純 *Lie* 環とし, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を *Cartan* 分解とする.

1. $\mathfrak{p}$ 内の *Lie triple system* V について, $\mathfrak{g}$ の部分 *Lie* 環 $\mathfrak{l}$ を

$$\mathfrak{l}_V = [V, V] + V \subset \mathfrak{k} + \mathfrak{p} = \mathfrak{g}$$

とおくと, $\mathfrak{l}$ は $\mathfrak{g}$ の簡約部分 *Lie* 環でコンパクト因子を持たないものとなる.

2. 上記の対応は以下の二つの集合の間の一対一対応を与える:

    - {*Lie triple systems in* $\mathfrak{p}$}$/K_0$.
    - { コンパクト因子を持たない簡約部分 *Lie* 環 *in* $\mathfrak{g}$}$/G_0$.

特に Lie triple system V in $\mathfrak{p}$ が二次元かつ非可換であるとき, 対応する $\mathfrak{g}$ 内の簡約型部分 Lie 環 $\mathfrak{l}_V = [V, V] + V$ は Lie 環として $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ と同型となる. またよく知られている事実として半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 環 $\mathfrak{l}$ が Lie 環として半単純であれば, $\mathfrak{l}$ は $\mathfrak{g}$ 内で簡約である (Mostow [11]). これらの事実を用いると以下が示される:

Corollary 3.4. *Theorem 3.3* (1) の対応により, 以下の二つの集合が一対一に対応する.

- { 非可換二次元 *Lie triple systems in* $\mathfrak{p}$}$/K_0$.
- {$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ と同型な $\mathfrak{g}$ の部分 *Lie* 環 }$/G_0$.

一般に $\mathfrak{l}$ を半単純 Lie 環としたとき, 半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ への $\mathfrak{l}$ の埋め込み (単射準同型) の集合を $\mathrm{Hom}_{\mathrm{inj}}(\mathfrak{l}, \mathfrak{g})$ と書くことにする．また $\mathrm{Hom}_{\mathrm{inj}}(\mathfrak{l}, \mathfrak{g})$ には G_0 が自然に作用するが, この G_0 共役類の集合を $\mathrm{Hom}_{\mathrm{inj}}(\mathfrak{l}, \mathfrak{g})/G_0$ と書く． また $\mathrm{Aut}(\mathfrak{l})$ は $\mathrm{Hom}_{\mathrm{inj}}(\mathfrak{l}, \mathfrak{g})/G_0$ に作用するが, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{l})$ の正規部分群 $\mathrm{Int}(\mathfrak{l})$ は $\mathrm{Hom}_{\mathrm{inj}}(\mathfrak{l}, \mathfrak{g})/G_0$ 上で自明に作用する (つまり $\mathrm{Hom}_{\mathrm{inj}}(\mathfrak{l}, \mathfrak{g})$ 上の $\mathrm{Int}(\mathfrak{l})$-軌道は一つの G_0-軌道に含まれる)． 従って, $\mathfrak{l}$ の外部自己同型群を $\mathrm{Out}(\mathfrak{l}) := \mathrm{Aut}(\mathfrak{l})/\,\mathrm{Int}(\mathfrak{l})$ と書くことにすると, $\mathrm{Out}(\mathfrak{l})$ は $\mathrm{Hom}_{\mathrm{inj}}(\mathfrak{l}, \mathfrak{g})/G_0$ に作用している．この作用についての $\mathrm{Hom}_{\mathrm{inj}}(\mathfrak{l}, \mathfrak{g})/G_0$ の $\mathrm{Out}(\mathfrak{l})$ 共役類の集合を $\mathrm{Out}(\mathfrak{l})\backslash(\mathrm{Hom}_{\mathrm{inj}}(\mathfrak{l}, \mathfrak{g})/G_0)$ と書くことにすると, 以下の二つの集合は自然に一対一に対応する．

- $\{\mathfrak{l}$ と同型な $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 環 $\}/G_0$.
- $\mathrm{Out}(\mathfrak{l})\backslash(\mathrm{Hom}_{\mathrm{inj}}(\mathfrak{l}, \mathfrak{g})/G_0)$.

いま $\mathfrak{l}$ として $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ を考えると外部自己同型群 $\mathrm{Out}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$ は位数 2 の有限群であり,

$$\phi : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \to \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & -a \end{pmatrix}$$

が $\mathrm{Out}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$ の非自明な元の代表元としてとれる．

これより $\mathrm{Out}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))\backslash(\mathrm{Hom}_{\mathrm{inj}}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}), \mathfrak{g})/G_0)$ と $\mathfrak{g}$ 内の冪零随伴軌道の集合の間の (一般に一対一ではない) 対応について解説する．簡単のため $\mathfrak{g}$ 内の零でない冪零随伴軌道の集合を $\mathcal{N}^*_{\mathfrak{g}}/G_0$ と書くことにする．まず $\rho \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{inj}}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}), \mathfrak{g})$ について,

$$\mathcal{O}_\rho := \mathrm{Ad}(G_0) \cdot \rho \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると, $\mathcal{O}_\rho$ は $\mathfrak{g}$ の冪零随伴軌道となることが知られている ($\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ または $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の表現論を用いると示せる)．これにより自然に写像

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{inj}}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}), \mathfrak{g})/G_0 \to \mathcal{N}^*_{\mathfrak{g}}/G_0, \quad [\rho]_{G_0} \mapsto \mathcal{O}_\rho$$

が定義されるが, この写像は全単射となる．この写像の全射性は Jacobson–Morozov の定理, 単射性は Kostant の共役定理として知られている.[4] 詳しくは [2, Section 9.2] を参照されたい．

[4]複素半単純の場合が有名であるが実半単純でも同様の結果が成り立つ.

いま位数 2 の有限群 $\mathrm{Out}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}))$ が $\mathrm{Hom}_{\mathrm{inj}}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}),\mathfrak{g})/G_0$ に作用しているから, この群作用は上記の全単射を通じて零でない冪零随伴軌道の集合 $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}^*/G_0$ にも作用している. $\mathrm{Out}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}))$ の非自明元の代表元として先述の ϕ が取れることと, $\phi(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ であることから, $\mathrm{Out}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}))$ の非自明元は $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}^*/G_0$ 上では

$$\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}^*/G_0 \mapsto \mathcal{N}_{\mathfrak{g}}^*/G_0, \mathcal{O} \mapsto -\mathcal{O}$$

として作用する. この作用による商を $\{\pm 1\}\backslash(\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}^*/G_0)$ と書けば,

- $\mathrm{Out}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}))\backslash(\mathrm{Hom}_{\mathrm{inj}}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}),\mathfrak{g})/G_0)$,
- $\{\pm 1\}\backslash(\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}^*/G_0)$

の二つの集合は一対一に対応する.

これまでに述べてきたことを併せると, $\{$ 非平坦全測地的曲面 in $M\}/G_0$ と $\{\pm 1\}\backslash(\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}^*/G_0)$ が一対一に対応することが分かる (Theorem 2.1 の後半の主張).

4 Classifications for some non-Hermitian cases

零でない冪零軌道の集合 $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}^*/G_0$ は $\mathfrak{g}$ が例外型の場合も含めて 1980 年代に分類が完成している. この節ではまず Djokovic による実半単純 Lie 環の冪零随伴軌道の分類理論の概要を復習する. この分類理論の詳細については [2, Chapter 9] を参照されたい. 本節ではさらに冪零随伴軌道の集合への $\{\pm 1\}$ 作用についても考察し, いくつか簡単なケースについて $\{\pm 1\}\backslash(\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}^*/G_0)$ の分類を紹介する.

二つの集合

- $\{\pm 1\}\backslash(\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}^*/G_0)$,
- $\{$ 二次元非可換 Lie triple systems in $\mathfrak{p}\}/K_0$

は一対一に対応するのであった. 実際にはこの対応の上部には

- $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}^*/G_0$,
- $\{$ 向き付けられた二次元非可換 Lie triple systems in $\mathfrak{p}\}/K_0$

の間の一対一対応がある (ここでは詳細は省略する). ただし $\mathfrak{p}$ 内の Lie triple system の向きを指定することはベクトル空間としての向きを指定することとして定義する.

以下 $\mathfrak{p}$ 内の向き付けられた二次元非可換 Lie triple systems の完全不変量を与える. いま $V \subset \mathfrak{p}$ を向き付けられた非可換二次元 Lie triple system とすると, $[V,V]$ は $\mathfrak{k}$ の一次元部分 Lie 環となり, $[V,V]$ の各元は二次元空間 V 上の回転の微分として作用するから Lie 環の同型 $\psi_V : [V,V] \to \mathfrak{o}(V)$ が定義される. V の向きを与える正規直交基底 (X_1, X_2) について, $A_V \in [V,V]$ であって, $\psi_V(A_V)X_1 = 2X_2$, $\psi_V(A_V)X_2 = -2X_1$ となるようなものがただ一つ存在する.[5] このような $A_V \in [V,V]$ は V の向きを与える正規直交基底 (X_1, X_2) の選び方に依らない.

このとき, 以下が成り立つ:

Theorem 4.1. *コンパクト Lie 環* $\mathfrak{k}$ *内の随伴軌道の集合を* $\mathfrak{k}/K_0$ *とし,* $\{\pm 1\}$ *が* $\mathfrak{k}/K_0$ *に自然に作用しているものとする. 写像*

$$\{\text{向き付けられた二次元非可換 } \textit{Lie triple systems in } \mathfrak{p}\}/K_0 \to \mathfrak{k}/K_0, \qquad [V]_{K_0} \mapsto [A_V]_{K_0}$$

は単射となる. さらに上記の単射は以下の集合の間の単射も引き起こす:

$$\{\text{二次元非可換 } \textit{Lie triple systems in } \mathfrak{p}\}/K_0 \to \{\pm 1\}\backslash(\mathfrak{k}/K_0).$$

Remark 4.2. *向き付けられた二次元非可換 Lie triple system* $V \subset \mathfrak{p}$ *に対応するベクトル* $A_V \in \mathfrak{k}$ *に対して, この* A_V *のノルムの二乗は* V *に対応する* M *内の全測地的曲面の断面曲率に反比例する.*

いま $\mathfrak{k}$ はコンパクト Lie 環であるから, $\mathfrak{k}/K_0$ は $\mathfrak{k}$ 内の極大可換部分代数 $\mathfrak{t}$ の Weyl 群の軌道と一対一に対応し, 特に Weyl 群の基本領域として closed Weyl chember $\mathfrak{t}_+$ を一つ選んで固定すれば, $\mathfrak{k}/K_0$ と $\mathfrak{t}_+$ は一対一に対応する. また Weyl 群の $\mathfrak{t}_+$ に対応する longest element を w_0 と書けば, $-w_0$ は $\mathfrak{t}_+$ 上の変換を与えるが, $\mathfrak{k}/K_0$ 上の $\{\pm 1\}$-作用は, 上記の対応を通じて $\mathfrak{t}_+$ 上では $\{\mathrm{id}_{\mathfrak{t}_+}, -w_0\}$ の変換群として作用することが分かる. 上記で述べたことと併せると, $\mathcal{N}^*_{\mathfrak{g}}/G_0$ の分類を述べるためには対応する $\mathfrak{t}_+$ の元を全て挙げればよく, またそれらの $\mathfrak{t}_+$ 内の点集合上での $\{\mathrm{id}_{\mathfrak{t}_+}, -w_0\}$-軌道について調べれば, $\{\pm 1\}\backslash(\mathcal{N}^*_{\mathfrak{g}}/G_0)$ の分類も得られることになる.

[5] A_V の定義をこのように定めたのは $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} + \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ の normal な $\mathfrak{sl}_2$-triple との対応を見やすくするためである. Normal な $\mathfrak{sl}_2$-triple の詳細については [2, Section 9.4] を参照されたい.

以降簡単なケースとして $\mathfrak{k}$ が半単純 (つまり $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ が non-Hermitian) の場合を考えよう．このとき $\mathfrak{k}$ の複素化の (Labeled) Dynkin 図形の頂点を $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ とすれば, Π 上の非負値関数全体の空間 $\mathrm{Map}(\Pi, \mathbb{R}_{\geq 0})$ と

$$\mathfrak{t}_+ := \{A \in \mathfrak{t} \mid \sqrt{-1}\alpha(A) \geq 0 \quad \text{for any } \alpha \in \Pi\}$$

は一対一に対応する．特にこれまで述べてきたことと併せて考えると, 単射写像

$$\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}^*/G_0 \hookrightarrow \mathrm{Map}(\Pi, \mathbb{R}_{\geq 0}), \quad \mathcal{O} \mapsto \Psi_{\mathcal{O}}$$

が定義される．$\Psi_{\mathcal{O}}$ を $\mathcal{O}$ に付随する重み付き Dynkin 図形と呼ぶことにする．$\mathfrak{g}$ が例外型で $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ が non-Hermitian であるような場合に冪零随伴軌道に付随する 重み付き Dynkin 図形のリストは [2, Section 9.6] にみることができ, この意味で冪零随伴軌道の分類が完成している．

また $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ が non-Hermitian である場合に, $\mathfrak{g}$ 内の冪零随伴軌道 $\mathcal{O}$ について, $\Psi_{\mathcal{O}}$ と $\Psi_{-\mathcal{O}}$ がどのような関係にあるかということについて, 以下の定理が成り立つ.

Theorem 4.3. *コンパクト半単純 Lie 環 $\mathfrak{k}$ が A_l 型 ($l \geq 2$), D_{2l+1} 型 ($l \geq 2$), E_6 型 のいずれの因子も持たない場合, 任意の $\mathcal{O} \in \mathcal{N}_{\mathfrak{g}}^*/G_0$ に対して $\Psi_{\mathcal{O}} = \Psi_{-\mathcal{O}}$ となる．また, $\mathfrak{k}$ が A_l 型 ($l \geq 2$), D_{2l+1} 型 ($l \geq 2$), E_6 型の因子を持つ場合には $\Psi_{-\mathcal{O}}$ は $\Psi_{\mathcal{O}}$ を A_l 型 ($l \geq 2$), D_{2l+1} 型 ($l \geq 2$), E_6 型の因子に対応する Dynkin 図形上では非自明な外部自己同型でひっくり返したものと一致する (A 型, 奇数ランクの D 型, E_6 型の Dynkin 図形の非自明な外部自己同型は一つしかないことに注意．また偶数ランクの D 型は非自明な外部自己同型を持つが, そこではひっくり返さないことにも注意).*

系として以下が従う:

Corollary 4.4. *$\mathfrak{g}$ が以下の non-Hermitian type の単純 Lie 環のいずれかと同型であるとき, 冪零随伴軌道の集合への $\{\pm 1\}$-作用は自明なものになる.*

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \ (\textit{with } n \equiv 0, 1, 3 \bmod 4), \ \mathfrak{su}^*(2n), \ \mathfrak{so}(p, q) \ (\textit{with } p, q \equiv 0, 1, 3 \bmod 4),$$
$$\mathfrak{sp}(p, q), \ \mathfrak{e}_{6(6)}, \ \mathfrak{e}_{6(-26)}, \ \mathfrak{e}_{7(-5)}, \ \mathfrak{e}_{8(8)}, \ \mathfrak{e}_{8(-24)}, \ \mathfrak{f}_{4(4)}, \ \mathfrak{f}_{4(-20)}, \ \mathfrak{g}_{2(2)}.$$

特に上記のケースでは以下の二つの集合は一対一に対応する:

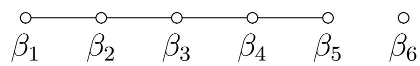
- *M 内の非平坦全測地的曲面の G_0-共役類 [resp. G-共役類] の集合.*
- *非自明な冪零随伴軌道 [resp. $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$-軌道] の集合.*

Remark 2.3 で述べたことと上記の結果, 及び $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ の冪零随伴軌道の分類 (see [2, Chapter 9]) から次の結果が得られる.

Corollary 4.5. リーマン対称空間 $M = SL(2k+1, \mathbb{R})/SO(2k+1)$ $(k \geq 1)$ について, M 内の全測地的曲面の $\mathrm{Isom}(M)$-共役類の集合は自然数 $2k+1$ の分割の集合と一対一に対応する.[6]

上記のケースから漏れる例として, $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_{6(2)}$ の場合を考えよう.

Example 4.6. $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_{6(2)}$ とする. このとき, $\mathfrak{g}$ の *Cartan* 分解の複素化を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} + \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ と書くことにすると, $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{sl}(6, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ である. 複素半単純 *Lie* 環 $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ の *Dynkin* 図形は



となる. $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_{6(2)}$ 内の冪零随伴軌道 $\mathcal{O}$ は重み付き *Dynkin* 図形で特徴づけられるのであった. ページ数の節約のため, ここでは冪零随伴軌道 $\mathcal{O}$ に対して, 対応する重み付き *Dynkin* 図形の各頂点 $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$ への重みを

$$(\beta_1(H_{\mathcal{O}}), \ldots, \beta_5(H_{\mathcal{O}}), \beta_6(H_{\mathcal{O}}))$$

のように書くことにする. このとき, $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_{6(2)}$ 内の冪零随伴軌道の重み付き *Dynkin* 図形は *Table 1* として与えられる (*cf.* [2, *Chapter* 9.6]):

$\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_{6(2)}$ の場合には, 冪零随伴軌道 $-\mathcal{O}$ の重み付き *Dynkin* 図形は

$$\begin{aligned}(\beta_1(H_{-\mathcal{O}}),&\beta_2(H_{-\mathcal{O}}), \beta_3(H_{-\mathcal{O}}), \beta_4(H_{-\mathcal{O}}), \beta_5(H_{-\mathcal{O}}), \beta_6(H_{-\mathcal{O}})) \\ &= (\beta_5(H_{\mathcal{O}}), \beta_4(H_{\mathcal{O}}), \beta_3(H_{\mathcal{O}}), \beta_2(H_{\mathcal{O}}), \beta_1(H_{\mathcal{O}}), \beta_6(H_{\mathcal{O}})).\end{aligned}$$

となる. 従って, *Table 1* において 9, 12, 27, 29 番目の図形と対応する冪零随伴軌道 $\mathcal{O}$ について, それぞれ $-\mathcal{O}$ は 10, 13, 28, 30 番目の図形と対応する. その他の冪零軌道については $\mathcal{O} = -\mathcal{O}$ が成り立つことも分かる. 特に *Theorem 2.1* と併せて考えると, $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{e}_{6(2)}$ の場合には M 内の非平坦全測地的曲面の G_0-共役類は全部で 33 種類ある.

$\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{e}_{6(2)}$ の場合でも $\mathrm{Out}(\mathfrak{g})$ の冪零軌道の集合への作用はいまのところ特定できていない. 特にこの場合での M 内の非平坦全測地的曲面の G-共役類の分類は今後の課題としたい.

[6] $M = SL(2k, \mathbb{R})/SO(2k)$ の場合には, 先述したように $\mathrm{Out}(\mathfrak{sl}(2k, \mathbb{R}))$ の冪零軌道の集合への作用が自明になるとは限らないので, より慎重に調べる必要がある.

References

[1] B.-y. Chen and T. Nagano. Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces. II. *Duke Math. J.*, 45:405–425, 1978.

[2] D. H. Collingwood and W. M. McGovern. *Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras*. Van Nostrand Reinhold Mathematics Series. Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1993.

[3] T. Fujimaru, A. Kubo, and H. Tamaru. On totally geodesic surfaces in symmetric spaces of type AI. 106:211–227, 2014.

[4] O. Ikawa and H. Tasaki. Totally geodesic submanifolds of maximal rank in symmetric spaces. *Japan. J. Math. (N.S.)*, 26:1–29, 2000.

[5] T. Kimura and M. S. Tanaka. Totally geodesic submanifolds in compact symmetric spaces of rank two. *Tokyo J. Math.*, 31:421–447, 2008.

[6] S. Klein. Totally geodesic submanifolds of the complex quadric. *Differential Geom. Appl.*, 26:79–96, 2008.

[7] S. Klein. Totally geodesic submanifolds in Riemannian symmetric spaces. In *Differential geometry*, pages 136–145. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2009.

[8] S. Klein. Totally geodesic submanifolds of the complex and the quaternionic 2-Grassmannians. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 361:4927–4967, 2009.

[9] S. Klein. Totally geodesic submanifolds of the exceptional Riemannian symmetric spaces of rank 2. *Osaka J. Math.*, 47:1077–1157, 2010.

[10] K. Mashimo. Non-flat totally geodesic surfaces in symmetric spaces of classical type. 106:301–308, 2014.

[11] G. D. Mostow. Some new decomposition theorems for semi-simple groups. *Mem. Amer. Math. Soc.*, pages 31–54, 1955.

[12] J. A. Wolf. Elliptic spaces in Grassmann manifolds. *Illinois J. Math.*, 7:447–462, 1963.

[13] J. A. Wolf. Geodesic spheres in Grassmann manifolds. *Illinois J. Math.*, 7:425–446, 1963.

Table 1: List of non-trivial nilpotent $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$-orbits in $\mathfrak{e}_{6(2)}$

label of $\mathcal{O}$	$(\beta_1(H_{\mathcal{O}}), \ldots, \beta_5(H_{\mathcal{O}}),$	$\beta_6(H_{\mathcal{O}}))$	non-trivial $\{\pm 1\}$-action
1	$(0,0,1,0,0,$	$1)$	
2	$(1,0,0,0,1,$	$2)$	
3	$(0,1,0,1,0,$	$0)$	
4	$(0,0,1,0,0,$	$3)$	
5	$(1,0,1,0,1,$	$1)$	
6	$(0,0,0,0,0,$	$4)$	
7	$(2,0,0,0,2,$	$0)$	
8	$(0,0,2,0,0,$	$2)$	
9	$(2,1,0,0,1,$	$1)$	$\star$
10	$(1,0,0,1,2,$	$1)$	$\star$
11	$(0,2,0,2,0,$	$0)$	
12	$(3,0,1,0,0,$	$0)$	$\star$
13	$(0,0,1,0,3,$	$0)$	$\star$
14	$(1,1,0,1,1,$	$2)$	
15	$(1,0,2,0,1,$	$4)$	
16	$(0,1,2,1,0,$	$2)$	
17	$(1,1,1,1,1,$	$1)$	
18	$(1,0,3,0,1,$	$1)$	
19	$(1,1,1,1,1,$	$3)$	
20	$(0,0,4,0,0,$	$0)$	
21	$(0,2,0,2,0,$	$4)$	
22	$(2,0,2,0,2,$	$2)$	
23	$(0,0,4,0,0,$	$8)$	
24	$(2,0,4,0,2,$	$4)$	
25	$(4,0,0,0,4,$	$4)$	
26	$(2,2,0,2,2,$	$0)$	
27	$(1,2,1,1,3,$	$1)$	$\star$
28	$(3,1,1,2,1,$	$1)$	$\star$
29	$(3,1,3,1,0,$	$4)$	$\star$
30	$(0,1,3,1,3,$	$4)$	$\star$
31	$(1,3,1,3,1,$	$3)$	
32	$(2,2,2,2,2,$	$2)$	
33	$(0,4,0,4,0,$	$4)$	
34	$(2,2,4,2,2,$	$4)$	
35	$(4,0,4,0,4,$	$8)$	
36	$(4,4,0,4,4,$	$4)$	
37	$(4,4,4,4,4,$	$8)$	