

二重連結な極小ラグランジュ曲面について

相山 玲子 (筑波大学数理物質系数数学域)

aiyama@math.tsukuba.ac.jp

2016 年 9 月 2 日 研究集会「部分多様体幾何とリー群作用 2016」講演録

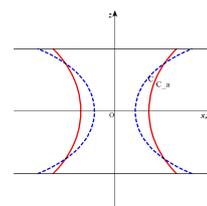
3次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 内の極小曲面である懸垂面の、スラブ（高さ一定の2平面で挟まれた領域）内での面積最小曲面としての特徴づけ [CD, BB, OS] に倣って、5次元ハイゼンベルグ群 \mathfrak{H}^5 内の極小ルジャンドル曲面であるルジャンドル懸垂面、及び複素2次元空間 \mathbb{C}^2 内の極小ラグランジュ曲面であるラグランジュ懸垂面を特徴づける試みの最初の結果を報告する。

1 \mathbb{R}^3 内のスラブ内の懸垂面

スラブ $H_{-a}^a = \{(x, y, z) \mid -a \leq z \leq a\}$ 内のコンパクト極小曲面でその境界がスラブの境界平面に含まれるものの中で面積最小のものは懸垂面（のうちの面積最小のもの）に限られるかという設問に、Bernstein-Breiner ([BB], 2014 年) は、曲面が二重連結領域の埋め込みになっている場合には正しいことを証明した。さらに最近、Choe-Daniel [CD] は、はめ込まれた任意のコンパクト極小曲面に対して、水平面との切り口が同じ向きをもつという条件だけでこの問題が正しく成立していることを示している。

スラブ H_{-a}^a 内の面積最小懸垂面 C_a とは、次で与えられる曲面である。

$$\begin{aligned} C_a &= \frac{a}{b}(C \cap H_{-b}^b) \\ \tanh b &= \frac{1}{b} \\ C &= \{(x, y, z) \mid \cosh z = \sqrt{x^2 + y^2}\} \end{aligned}$$



[BB] の証明は、Osserman-Schiffer の次の結果を利用している。（一方、[CD] の証明は全く異なっている。）

定理 ([OS], Theorem 1, 1975 年). 二重連結領域 $A = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid r_1 < |\zeta| < r_2\}$ から \mathbb{R}^3 への極小共形はめ込み \mathbf{x} に対して、閉曲線 $|z| = e^t$ の像 σ_ρ の長さ $L(t)$ は $L''(t) \geq L(t)$ を満たす。 $\mathbf{x}(A)$ が平面に含まれるのでなければ、等号成立は懸垂面 C の適当なスラブ H_b^a との共通部分となる場合に限られる。

さらにこの定理は、極小曲面のワイエルシュトラス表現公式

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int (f(\zeta)(1 - g(\zeta)^2), if(\zeta)(1 + g(\zeta)^2), 2f(\zeta)g(\zeta)) d\zeta \\ g &: \text{有理型関数}, \quad f: \text{正則関数} \\ \mathbf{x}^* ds_{\mathbb{R}^3}^2 &= \frac{1}{4} |f|^2 (1 + |g|^2)^2 |d\zeta|^2 \end{aligned}$$

を用いて示されている。一方、我々は [AA] で、 \mathfrak{H}^5 内の極小ルジャンドル曲面のワイエルシュトラス型表現公式を与えた。それを基に、[OS] の上記定理のルジャンドル版を与える。

2 5次元ハイゼンベルグ群 \mathfrak{H}^5 の極小ルジャンドル曲面と複素2次元空間 \mathbb{C}^2 の極小ラグランジュ曲面

前節の \mathbb{R}^3 での曲面の結果を5次元空間 \mathbb{R}^5 内の曲面で考えるときに、 \mathbb{R}^5 にハイゼンベルグ群の構造と、その上に自然に誘導される佐々木・ウェブスター計量を考え、ルジャンドル曲面を考えるというのは、一つの自然な流れである (例えば, [AA]). 5次元ハイゼンベルグ群 \mathfrak{H}^5 とは次のように定義され、以下の性質をみたす接触リーマン多様体である：

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}^5 &:= \mathbb{C}^2 \times \mathbb{R} = \{(z, u)\}, \quad z = \mathbf{p} + i\mathbf{q} = (z_1, z_2), \quad z_j = p_j + iq_j (j = 1, 2) \\ (z, u) \cdot (z', u') &= (z + z', u + u' + 2\operatorname{Im}(z \cdot \overline{z'})) \\ \eta &= du - \frac{1}{2}(\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - \mathbf{q} \cdot d\mathbf{p}) \text{ 接触形式 (i.e. } \eta \wedge (d\eta)^2 \neq 0 \text{)} \\ H &= \operatorname{Ker} \eta = \mathbb{R}\{T_1, \dots, T_4\} \text{ 接触構造 } \quad T_j = \partial_{p_j} - \frac{q_j}{2}\partial_u, \quad T_{2+j} = \partial_{q_j} + \frac{p_j}{2}\partial_u \\ \xi &= \partial_u \text{ レーブベクトル場 } \quad (\eta(\xi) = 1 \ \& \ d\eta(\xi, \cdot) = 0), \quad T\mathfrak{H}^5 = H \oplus \mathbb{R}\xi \\ J &\curvearrowright H \text{ 概複素構造 } \quad J(T_j) = T_{2+j}, \quad J(T_{2+j}) = -T_j \\ g_H &:= d\eta \circ (J \otimes \mathbf{1}) = |d\mathbf{p}|^2 + |d\mathbf{q}|^2, \quad \pi_H : T\mathfrak{H}^5 \rightarrow H \\ g_\eta &:= \pi_H^* g_H + \eta \otimes \eta: \mathfrak{H}^5 \text{ 上の佐々木/ウェブスター計量} \\ (\eta, g_H, J) &: \mathfrak{H}^5 \text{ 上の接触リーマン構造} \end{aligned}$$

さらに、射影 $\pi : \mathfrak{H}^5 = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2$ は、リーマン沈め込みになっている。 \mathfrak{H}^5 内のルジャンドル曲面は、 π によって複素2次元空間 \mathbb{C}^2 内のラグランジュ曲面に移る。特に、極小ルジャンドル曲面 (はめ込み) $\hat{\mathbf{x}}(\zeta) = (\mathbf{x}(\zeta), u(\zeta))$ は極小ラグランジュ曲面 (はめ込み) $\mathbf{x}(\zeta)$ に対応する。

[AA] にまとめたように、 \mathbb{C}^2 の極小ラグランジュ曲面は次のように複素正則曲線 $(F_1(\zeta), F_2(\zeta))$ と対応し、

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\zeta) &= e^{i\beta} (F_1(\zeta) - \overline{F_2(\zeta)}, F_2(\zeta) + i\overline{F_1(\zeta)}) \\ \beta &\in \mathbb{R}, \quad (S_1(\zeta), S_2(\zeta)) = (F_2'(\zeta), -F_1'(\zeta)) \neq \mathbf{0} \end{aligned}$$

と表現される。対応する \mathfrak{H}^5 の極小ルジャンドル曲面 $\hat{\mathbf{x}}(\zeta) = (\mathbf{x}(\zeta), u(\zeta))$ は、局所的に

$$u(\zeta) = -\operatorname{Re} \int (F_1 S_1 + F_2 S_2) d\zeta$$

で与えられる。これは上式の右辺の積分の実部が局所的に一価であることを意味し、さらにそれが曲面全体で一価であるラグランジュ曲面は完全であると言われる。すなわち、 \mathfrak{H}^5 内の極小ルジャンドル曲面と、 \mathbb{C}^2 内の完全極小ラグランジュ曲面は、同義である。上記のように表現された極小ルジャンドル曲面/極小ラグランジュ曲面に誘導された計量は次で表される。

$$\hat{\mathbf{x}}^* ds_{\mathfrak{H}^5}^2 = \mathbf{x}^* ds_{\mathbb{C}^2}^2 = 2(|S_1(\zeta)|^2 + |S_2(\zeta)|^2) |d\zeta|^2.$$

3 ルジャンドル懸垂面とラグランジュ懸垂面

\mathbb{R}^3 内の懸垂面 C は, ワイエルシュトラス・データ $f(\zeta) = \frac{2i}{\zeta}$, $g(\zeta) = -i\zeta$ ($\zeta = e^w \in \mathbb{C} - \{0\}$) によって表現される極小曲面であり,

$$(x_w, y_w, z_w) = (2i \cosh w, 2 \sinh w, 2)$$

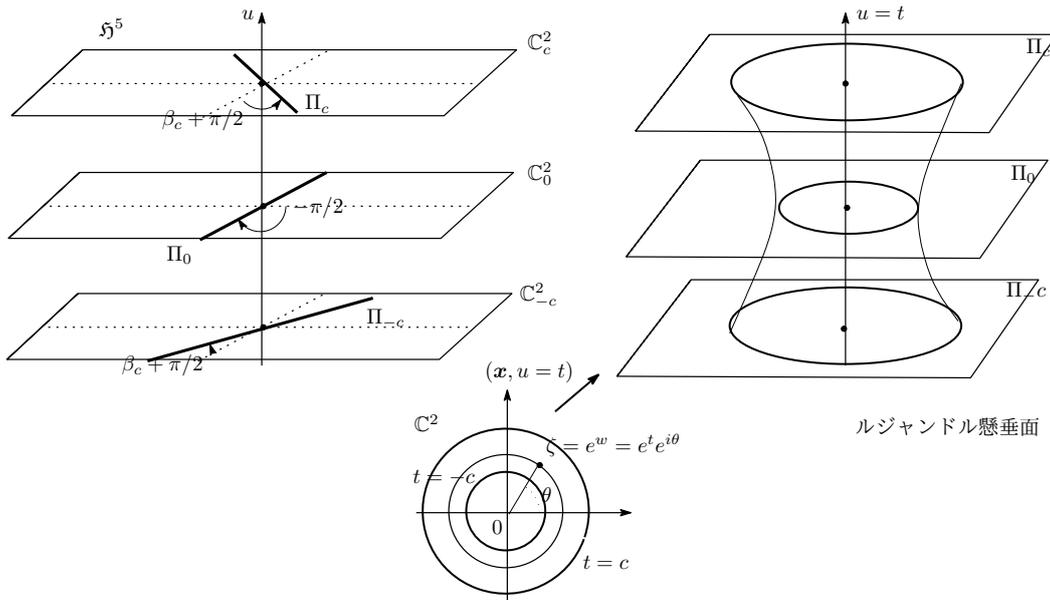
となっている. これに対応するラグランジュ曲面が \mathbb{C}^2 内のラグランジュ懸垂面である.

$$(F_1, F_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \zeta & 1 \\ \frac{1}{\zeta} & \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (S_1 d\zeta, S_2 d\zeta) = (-\sinh w dw, \cosh w dw)$$

また, 上記に対応する \mathfrak{H}^5 内のルジャンドル懸垂面 $\hat{x} = (\mathbf{x}, u)$ は,

$$u = t, \quad (w = t + i\theta), \quad 2 \cosh u = \sqrt{|\mathbf{x}|^2 + 4}$$

となっている. このルジャンドル懸垂面と \mathfrak{H}^5 の $u = c (\equiv \text{const})$ で与えられる超平面 \mathbb{C}_c^2 との交わりは, $\mathbb{C}_c^2 = \mathbb{C}^2$ 内のラグランジュ平面 $\Pi_c = \alpha_c \mathbb{R}\{(1, 0)(0, i)\}$ ($\alpha_c = \sinh c - i \cosh c$) にある原点中心の半径 $\sqrt{2}|\alpha_c|$ の円になっている. ラグランジュ平面 Π_c はラグランジュ角度 β_c が「高さ」 $u = c$ に応じて $\beta_c = \text{Arg}(i\alpha_c^2)$ で与えられる平面である.



4 Osserman-Schiffer の定理のラグランジュ・ルジャンドル版

二重連結領域 $A = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid r_1 < |\zeta| < r_2\}$ から複素 2 次元空間 \mathbb{C}^2 への極小ラグランジュ共形はめ込み \mathbf{x} について考える. A 内の閉曲線 $|\zeta| = r$ の像である閉曲線のエネルギーを $E(r)$, 長さを $L(r)$ と表す:

$$E(r) = \int_0^{2\pi} \mu(re^{i\theta})^2 d\theta, \quad L(r) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2\mu(re^{i\theta})} d\theta, \quad \mu(\zeta) = |\zeta| \sqrt{|S_1(\zeta)|^2 + |S_2(\zeta)|^2}.$$

このとき, 次が成立する.

定理 1. $t = \log r$ とする.

$$\frac{d^2 E}{dt^2} \geq 4E \geq \frac{1}{\pi} L^2.$$

特に, \mathbf{x} が完全であるとき, $\frac{d^2 E}{dt^2} = \frac{1}{\pi} L^2$ であるための必要十分条件は, (\mathbf{x}, u) が $u \equiv \text{const}$ である \mathbb{C}^2 内の平面に含まれているか, ルジャンドル懸垂面の $u \equiv \text{const}$ で定義される 2 つの超平面で挟まれる部分にうつっているかである.

証明. 平坦ラプラシアンを $\Delta_0 = 4 \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}}$ と表す. このとき, 次の等式が成立する.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E}{dt^2} &= \int_0^{2\pi} r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mu^2}{\partial r} \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(r^2 \Delta_0 \mu^2 - \frac{\partial^2 \mu^2}{\partial \theta^2} \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} r^2 \Delta_0 \mu^2 d\theta \end{aligned}$$

次の補題を適用すれば, $\frac{d^2 E}{dt^2} \geq 4 \int_0^{2\pi} \mu^2 d\theta = 4E$ が導かれる.

補題 2 ([OS], (23) 式). A 上の正則関数 $G(\zeta)$ が $\int_0^{2\pi} G(re^{i\theta}) d\theta = 0$ をみたすならば,

$$\int_0^{2\pi} r^2 \Delta_0 |G|^2 d\theta \geq 4 \int_0^{2\pi} |G|^2 d\theta.$$

ここで等号が成立するための必要十分条件は, $G = a_1 \zeta + a_{-1} \frac{1}{\zeta}$ ($a_1, a_{-1} \in \mathbb{C}$). である.

シュワルツ不等式より, $\frac{1}{2} L^2 = \left(\int_0^{2\pi} \mu d\theta \right)^2 \leq 2\pi \int_0^{2\pi} \mu^2 d\theta = 2\pi E$ であるから, $\frac{d^2 E}{dt^2} \geq 4E \geq \frac{1}{\pi} L^2$ が成立する.

ある r に対して $\frac{d^2 E}{dt^2} = \frac{1}{\pi} L^2$ が成立することと, すべての r について $\frac{d^2 E}{dt^2} = \frac{1}{\pi} L^2$ が成立することは同値であることに注意すると, 簡単な計算によって, この条件は次の (i), (ii) の条件をみたすことと同値であることがわかる.

(i) 適当な $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ によって, $(F_1, F_2) = \left(\zeta, \frac{1}{\zeta} \right) \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ と表される.

(ii) μ は θ によらない.

さらに, 条件 (ii) は $c\bar{d} + a\bar{b} = 0$ であることと同値である. 今, \mathbf{x} が完全であるためには $ad - bc$ が実数値をとることが必要十分である. もし $ad - bc \neq 0$ であれば, $p := \left(\frac{|b|^2 + |d|^2}{|a|^2 + |c|^2} \right)^{\frac{1}{4}}$, $P := \begin{pmatrix} 1/p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^* SU(2)$ とおくと, 変換 $\zeta \mapsto p\zeta$, $(F_1, F_2) \mapsto (F_1, F_2)P^{-1}$ によって, $(F_1, F_2) = \left(\zeta, \frac{1}{\zeta} \right)$ とみなせることがわかる. \square

参考文献

[AA] R Aiyama and K. Akutagawa, Minimal Legendrian Surfaces in the Five-Dimensional Heisenberg Group, A. Futaki et al. (eds.), *Geometry and Topology of Manifolds*, Springer Proc. Math. Stat. **154**(2016), 1–13.

- [BB] J. Bernstein and C. Breiner, A variational characterization of the catenoid, *Calc. Var.* **49** (2014), 215–232.
- [CD] J. Choe and B. Daniel, On the area of minimal surfaces in a slab, *International Mathematics Research Notices Advance Access* published March 30, 2016.
- [OS] R. Osserman and M. Schiffer, Doubly-Connected Minimal Surfaces, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **58** (1975), 285–306.