四元数多様体への包含的はめ込みとその不変量

長谷川和志 (金沢大学人間社会研究域)

1 序.

まず，共形類 $[g]$ の与えられた4次元の向き付けられた多様体 M を考える．この場合，リーマン面 Σ から M への共形はめ込み $f:\Sigma\to M$ は M のツイスター空間へのツイスターリフトを許容し，このツイスターリフトを用いて様々研究が行われている．特に，ツイスターリフトが正則となるとき，はめ込み f はツイスター正則とよばれ，M が定曲率空間形のときにはウィルモア曲面の研究において重要である．4次元の向き付けられた共形多様体は四元数多様体であることふまえ，曲面から四元数多様体へのはめ込みで同様な議論を行いたい．

次節以降で，改めて述べるが，多様体 M の四元数構造は $\mathrm{End}(TM)$ の階数3のある種の部分束 Q とそれを保つ捩れのない接続の組で与えられる．このような接続は Q に対して一意ではないので，着目したい量や性質は，接続に依存しない Q のみに依存するものである．なお，本稿では曲面の場合を考えるが，[10] では実半分次元の部分多様体をこの観点から研究している．ツイスター正則性は接続に依存しないものとして同様に定義でき，ウィルモア汎関数に相当する四元数不変量も得られたので，これらの関連等を中心に報告する．

2 包含的はめ込み.

この節では，四元数多様体への包含的なはめ込み等の定義と，それに関する四元数不変量を与える．

(M,Q) を実 $4n$ 次元の四元数多様体とする．すなわち，Q は $\mathrm{End}(TM)$ の階数3の部分束であり，M の各点の近傍で定義された Q の局所枠 (I_1,I_2,I_3) で，$I_1^2=I_2^2=I_3^2=-id,\ I_1I_2=-I_2I_1=I_3$ を満たすものが存在し，かつ M の捩れのない接続 ∇ で Q を保つものが存在するとする．上のような ∇ を四元数接続という．四元数接続は Q に対して一意的ではないことに注意する．すなわち，次が成立する ([1])．

補題 1. ∇^1，∇^2 を四元数接続とするとき，

$$\begin{aligned}\nabla^1_X Y &= \nabla^2_X Y + \xi(X)Y + \xi(Y)X - \xi(I_1X)I_1Y - \xi(I_1Y)I_1X \\ &\quad -\xi(I_2X)I_2Y - \xi(I_2Y)I_2X - \xi(I_3X)I_3Y - \xi(I_3Y)I_3X\end{aligned}$$

を満たす 1-形式 ξ が存在する ($X,\, Y \in \Gamma(TM)$)．逆に，∇^2 を四元数接続とするとき，上式で定められる接続 ∇^1 は四元数接続である．

M の各点 $x \in M$ において $\mathcal{Z}_x = \{J \in Q_x \mid J^2 = -id\}$ とし，$\mathcal{Z} = \cup_{x\in M}\mathcal{Z}_x$ とする．以下のように，$\mathcal{Z}$ には概複素構造 $I^{\mathcal{Z}}$ が定義できる ([3])．束射影 $\pi_{tw} : \mathcal{Z} \to M$ と四元数接続 ∇ は垂直部分束 $T^v\mathcal{Z}$ と水平部分束 $T^h\mathcal{Z}$ による分解 $T\mathcal{Z} = T^h\mathcal{Z} \oplus T^v\mathcal{Z}$ 誘導する．$I^{\mathcal{Z}}_\nabla$ を $J \in \mathcal{Z}$ における水平ベクトル X に対して，$(I^{\mathcal{Z}}_\nabla)_J(X) = (J((\pi_{tw*}(X)))^h_J$ と定め，垂直ベクトル V に対して $I^{\mathcal{Z}}_\nabla(V) = J^v(V)$ と定める．ここで，J^v は各ファイバー ($\simeq S^2$) 上の自然な複素構造である．特に，次が成立する ([2])．

補題 2. ∇^1 と ∇^2 をともに四元数接続とすると $I^{\mathcal{Z}}_{\nabla^1} = I^{\mathcal{Z}}_{\nabla^2}$.

以下，四元数接続にはよらない性質を論ずるので，$I^{\mathcal{Z}}_\nabla$ を $I^{\mathcal{Z}}$ と書く．$(\mathcal{Z}, I^{\mathcal{Z}})$ を M の**ツイスター空間**という．なお，可積分性については次が成立する ([3] 等)．

定理 3. $n \geq 2$ のとき，$I^{\mathcal{Z}}$ は積分可能であり，$n = 1$ のとき，$I^{\mathcal{Z}}$ が積分可能であることと Q が反自己双対であることは同値である．

以降，Σ を向き付けられた曲面とする．

定義 4. はめ込み $f : \Sigma \to M$ が**包含的 (inclusive)** であるとは，Σ の各点 x に対して，$f_{*x}(T_x\Sigma)$ が $T_{f(x)}M$ の実 4 次元の四元数部分空間に含まれるときをいう (または，単に Σ 自身を包含的であるという)．

f が包含的であるとき，$I_1 : \Sigma \to \mathcal{Z}$ で I_1 は $f_*(T\Sigma)$ を保ち，I_1 から誘導される Σ の複素構造 I が Σ の向きに適合するようなものが唯一存在する．この I_1 を f の**自然なツイスターリフト**と呼ぶ．また I_1 は $f^{\#}TM$ の複素構造ともみれる．§1 で述べたように，**包含的なはめ込み f の M の四元数構造 Q のみに依存する量や性質を論ずる**．なお，M の (実) 次元が 4 のときは，はめ込みは常に包含的であり，I は f^*g に適合する．よって，この場合には，曲面のウィルモア汎関数などの共形不変量や共形不変な性質を考えることに対応する．整理すると, 次頁の表のようになる．

$\dim M = 4n$	$n=1$	$n \geq 2$
構造	共形	四元数
$I^{\mathcal{Z}}$ の可積分性	反自己双対	常に可積分
曲面からのはめ込み	共形	包含的
不変量	共形	四元数

次に，記号をいくつか用意する．Ric^{∇} は四元数接続 ∇ のリッチ曲率，θ^s は四元数多様体 M の $(0,2)$ テンソル θ の対称化を表し，$\Pi_h\theta$ は θ のエルミート化，すなわち

$$\Pi_h(\theta)(X,Y) = \frac{1}{4}(\theta(X,Y) + \sum_{i=1}^{3} \theta(I_iX, I_iY)).$$

で定義されるテンソルを表す．また，Σ には面積要素 Ω が存在するので，Σ 上の対称な $(0,2)$ テンソル s に関して，

$$a_\Omega(s) = \frac{s(X,X) + s(IX,IX)}{\Omega(X,IX)}$$

$(X(\neq 0) \in T\Sigma)$ が定義できる．$a_\Omega(s)$ は $X \in T\Sigma$ の取り方によらず，$a_\Omega(s)\Omega$ は Ω の取り方にもよらない ([7])．E を複素構造 $I^E \in \Gamma(\mathrm{End}(E))$ と接続 D が与えられた (Σ, I) 上の複素ベクトル束とする．$X \in T\Sigma$ に対して，

$$\begin{aligned} A_X^{D\prime} &= \frac{1}{4}(I^E(\bar{D}_X I^E) + (\bar{D}_{IX} I^E)), \\ A_X^{D\prime\prime} &= \frac{1}{4}(I^E(\bar{D}_X I^E) - (\bar{D}_{IX} I^E)) \end{aligned}$$

と定める．ここで，$\bar{D}$ は $\mathrm{End}(E)$ に誘導される接続である．なお，$\bar{D}_X I^E = 0$ とは限らない場合を考えている．

以下，Σ はコンパクトとし，包含的なはめ込み $f : \Sigma \to M$ に対して，次の $\mathcal{W}_Q$ を定義する:

$$\mathcal{W}_Q(f) := \frac{1}{2}\int_\Sigma a_\Omega \left(f^*(Ric^{\nabla})^s - \frac{2}{n+2} f^*(\Pi_h(Ric^{\nabla})^s) - (\mathrm{Tr}\, A_{(\,\cdot\,)}^{f^\#\nabla\prime} A_{(\,\cdot\,)}^{f^\#\nabla\prime}) \right) \Omega.$$

ここで，$f^\#\nabla$ は引き戻し束 $f^\# TM$ 上の ∇ の引き戻し接続である．この $\mathcal{W}_Q$ は四元数不変量である．すなわち，

定理 5. 包含的なはめ込み $f : \Sigma \to M$ に対して，$\mathcal{W}_Q(f)$ は M の四元数接続の取り方によらない．

なお，(M, Q, g) が四元数ケーラー多様体であるとき，Sc_g を g のスカラー曲率，H を包含的なはめ込み f の平均曲率ベクトル場とすると，

$$\mathcal{W}_Q(f) = \frac{Sc_g}{4(n+2)} Area(\Sigma, g') + n \int_\Sigma \|H\|^2 \Omega^\Sigma$$

が成立する．ここで，g' は誘導計量，Ω^Σ はその面積要素である．特に，M が実 4 次元定曲率空間形のとき，$\mathcal{W}_Q$ はウィルモア汎関数に一致する．

3　ツイスター正則な包含的はめ込み.

包含的なはめ込みの自然なツイスターリフト $I_1 : \Sigma \to \mathcal{Z}$ が正則であるとき，f は**ツイスター正則**であるという．f がツイスター正則であるという性質は，四元数接続の取り方によらない．次のように，不変量 $\mathcal{W}_Q$ を $f^\#(TM)$ の第一チャーン類 $c_1(f^\# TM)$ で下から評価することができる．

定理 6.　$f : \Sigma \to M$ を包含的なはめ込みとする．M が $n > 1$ または $n = 1$ で Q が反自己双対であるとすると

$$\mathcal{W}_Q(f) \geq 2\pi \int_\Sigma c_1(f^\# TM)$$

が成立し，等号成立は f がツイスター正則であるときに限る．

一般に, (M, S) を幾何構造 S をもった多様体内の部分多様体 Σ の研究において，
(i)　S に関して不変な，Σ の (外在的) 幾何学量を見つけ,
(ii)　その上限や下限を求め,
(iii)　(ii) で等号成立する場合を特徴付けよ
ということを考えることは部分多様体の基本的性質を論ずる上で意味があると思われるが，上の定理 6 はその一つの答えを与えている．

さて，ツイスター空間を用いて研究をすることの大きな利点の一つは，ツイスター空間上で複素幾何学を使えることにある．よって，はめ込みの四元数不変量とリフトの複素幾何学的な量を関連付けることは重要であろう．特に，四元数射影空間 $\mathbb{H}P^n$ のツイスター空間は複素射影空間 $\mathbb{C}P^{2n+1}$ である．f がツイスター正則のとき，I_1 は正則写像となり，その次数を d とすれば次が成立する．

定理 7.　$f : \Sigma \to \mathbb{H}P^n$ を包含的なはめ込みとする. f がツイスター正則ならば $\mathcal{W}_Q(f) = 4\pi n d$ が成立する.

例 8. *Veronese*写像$\mathbb{C}P^1 \ni [W_0, W_1] \mapsto [W_0^{2n+1}, W_0W_1^{2n}, \cdots, W_1^{2n+1}] \in \mathbb{C}P^{2n+1}$ を考える．これに，射影 π_{tw} を合成したものは，$\mathbb{C}P^1$ から $\mathbb{H}P^n$ へのツイスター正則なはめ込みとなり $\mathcal{W}_Q(f) = 4\pi n(2n+1)$ を満たす．

この § の最後に系を 1 つ述べる．商束を $N := f^{\#}TM/T\Sigma$ とおく．f が包含的なので，N には I_1 から複素構造 I^N が定義できる．f がツイスター正則のとき，定理 6,7 から，次が得られる．

系 9. $f : \Sigma \to \mathbb{H}P^n$ を種数 q の曲面 Σ からの包含的なはめ込みとする．f がツイスター正則ならば N の第一チャーン類 $c_1(N)$ は

$$\int_\Sigma c_1(N) = 2(nd + q - 1)$$

を満たす．

[5] において，S^4 内のツイスター正則な曲面の法束 $T^\perp\Sigma$ について，

$$\int_\Sigma c_1(T^\perp\Sigma) \geq 0$$

が成立し，等号は Σ が全臍的であるときに限り成立することが示されている．したがって，系 9 はこの結果を改良，一般化したものである．

4 $\mathbb{H}^n$ へのツイスター正則なはめ込み．

$\mathbb{H}$ を四元数体とする．$\mathbb{H}^n(\cong \mathbb{R}^{4n})$ には自然に四元数構造が定まる (自然な平坦アファイン接続は四元数接続となる)．$\mathbb{H}^n$ のツイスター空間は，位相的には直積束 $\mathbb{H}^n \times \mathbb{C}P^1$ となるが，これは複素多様体としての積でなく，複素多様体としては $\mathcal{Z} = 2nL$ と表される．ここで，L は $\mathbb{C}P^1$ 上の超平面束である ([9] 等)．$\pi_2 : 2nL \to \mathbb{C}P^1$ を束射影とする．$f : \Sigma \to \mathbb{H}^n$ を包含的なはめ込みとするとき，$\pi_2 \circ \tilde{I} : \Sigma \to \mathbb{C}P^1$ の写像度を $\deg(\pi_2 \circ \tilde{I})$ で表す．$M = \mathbb{H}^n$ のとき，簡単な考察で $\mathcal{W}_Q > 0$ であることは分かるが，次が成立することが分かる．

定理 10. $f : \Sigma \to \mathbb{H}^n$ を包含的なはめ込みとするとき，$\mathcal{W}_Q(f) \geq 4\pi n$ が成立する．

さて，$\mathbb{H}^n$ 内の包含的な曲面として，最も簡単なのもは，

$$\iota : S^2 \cong \{a \in \mathrm{Im}\mathbb{H} \mid |a| = 1\} \subset \mathrm{Im}\mathbb{H} \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{H}^n$$

あると思われるが，ι はツイスター正則であり $\mathcal{W}_Q(\iota) = 4\pi n$ を満たす．少なくとも，$\mathcal{W}_Q(f) = 4\pi n$ となる曲面が存在することは分かるが，$\mathcal{W}_Q(f) = 4\pi n$ を満た

す包含的な曲面がこのようなものに限るか否かは現在のところは分からない (ので，今後の検討課題としたい).

$\mathbb{H}^n$ へのツイスター正則なはめ込みに関しては，[5] と同様な議論で次のことが分かる ($n=1$ のときが [5] の場合)．$f:\Sigma\to\mathbb{H}^n$ をツイスター正則なはめ込みとする．このとき，$\pi_2\circ\tilde{I}:\Sigma\to\mathbb{C}P^1$ は正則写像となり，

$$\mathcal{W}_Q(f)=4\pi n\deg(\pi_2\circ\tilde{I})$$

が成立する．逆に与えられた正則写像 $a:\Sigma\to\mathbb{C}P^1$ に対して，引き戻し束 $a^{\#}L$ の正則切断 $b_1,\ldots,b_{2n}$ を用いて，$a=\pi_2\circ\tilde{I}$ となるツイスター正則なはめ込み $f:\Sigma\to\mathbb{H}^n$ が得られる (正確には，はめ込みとなるように $b_1,\ldots,b_{2n}$ に条件がつく).

5 四元数ウィルモアはめ込み.

(M,Q) を実 $4n$ 次元の四元数多様体とし，Σ を向き付けられたコンパクトな曲面とする．包含的なはめ込み $f:\Sigma\to M$ に対して，$\mathcal{W}_Q$ の汎関数の停留点となる包含的なはめ込み，すなわち，ウィルモア曲面の四元数版をこの節では考える．

定義 11. 包含的はめ込み $f:\Sigma\to M$ が**四元数ウィルモア** (*resp.* **制限四元数ウィルモア**) であるとは，$f_0=f$ かつすべての $t\in J(J$ は 0 を含む $\mathbb{R}$ の開区間) に対して $f_t:\Sigma\to M$ が包含的となる (*resp.* すべての $t\in J$ に対して $f_t:\Sigma\to M$ が包含的となり誘導される Σ の複素構造を動かさない) 任意の変分 $\{f_t\}_{t\in J}$ に対して，

$$\left.\frac{d}{dt}\mathcal{W}_Q(f_t)\right|_{t=0}=0$$

を満たすことをいう．

前に述べた通り，f_t $(t\in J)$ が包含的のとき，$I_1(t):\Sigma\to\mathcal{Z}$ で $I_1(t)$ は $f_{t*}(T\Sigma)$ を保ち，$I_1(t)$ から誘導される Σ の複素構造 $I(t)$ で Σ の向きに適合するようなものが唯一存在する．これらに対して，

$$I'=\left.\frac{d}{dt}I(t)\right|_{t=0},\ I_1'=\left.\frac{d}{dt}I_1(t)\right|_{t=0},\ V_x=\left.\frac{d}{dt}f_t(x)\right|_{t=0}$$

とおく．また，$I=I(0)$ とおく．変分 $\{f_t\}_{t\in J}$ に付随して，$\mathcal{V}$ を

$$\mathcal{V}(X,Y):=-\mathrm{Tr}R^{\nabla}_{V,f_*X}A^{f^{\#}\nabla''}_{Y}+\frac{1}{4}\mathrm{Tr}I_1'(d^{\overline{(f^{\#}\nabla)}}A^{f^{\#}\nabla''})(X,IY)-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}A^{f^{\#}\nabla'}_{I'X}A^{f^{\#}\nabla''}_{IY}$$

と $X,Y\in T\Sigma$ に対して定義する．ここで，R^{∇} は四元数接続 ∇ の曲率テンソルであり，$d^{\overline{(f^{\#}\nabla)}}A^{f^{\#}\nabla''}$ は $(d^{\overline{(f^{\#}\nabla)}}A^{f^{\#}\nabla''})(X,Y)=((\overline{f^{\#}\nabla})_XA^{f^{\#}\nabla''})_Y-((\overline{f^{\#}\nabla})_YA^{f^{\#}\nabla''})_X$ で定義される $(X,Y\in T\Sigma)$．なお，共変微分 $((\overline{f^{\#}\nabla})_XA^{f^{\#}\nabla''})_Y$ の定義には $T\Sigma$ の捩れのない接続を用いるが，$d^{\overline{(f^{\#}\nabla)}}A^{f^{\#}\nabla''}$ はその捩れのない接続の取り方によらない．以上の準備のもと，第一変分公式は以下の通りとなる．

定理 12. $n>1$ または Q は反自己双対とする．$f:\Sigma\to M$ を包含的なはめ込みとする．$f_0=f$ かつすべての $t\in J$ に対して $f_t:\Sigma\to M$ が包含的となる変分 $\{f_t\}_{t\in J}$ に対して，

$$\frac{d}{dt}\mathcal{W}_Q(f_t)\Big|_{t=0}=\int_\Sigma a_\Omega(\mathcal{V}^s)\Omega.$$

が成立する．

上の定理 12 または定理 6 から，$n>1$ または Q が反自己双対のとき，ツイスター正則な包含的なはめ込みは，四元数ウィルモアであることがただちに分かる．また，リッチ平坦かつ $A^{f^\#\nabla'}=0$ をみたす四元数接続 ∇ が存在すれば，包含的なはめ込み f は四元数ウィルモアとなる．四元数ケーラー多様体の場合を考えると次も分かる．

系 13. (M,Q,g) を $n>1$ の四元数ケーラー多様体または反自己双対アインシュタイン多様体とする．$f:\Sigma\to M$ を包含的な極小はめ込みとする．このとき f は四元数ウィルモアである．

なお，四元数ケーラー多様体の場合には，$A^{f^\#\nabla'}=0$ であることと f が極小であることは同値である．次に，四元数ケーラー多様体への包含的なはめ込みに関して，その自然なツイスターリフトが調和切断となる場合を考える．ここで，一般に**調和切断**とは，コンパクトなリーマン多様体上の標準計量の与えらたリーマンベクトル束の切断で長さが 1 であるもの全体の空間にエネルギー汎関数を制限し，その汎関数の停留点を与える切断のことをいう．[4] において，次のことが主張されている．

定理 14([4]). 実 4 次元の定曲率空間形内の曲面でその平均曲率ベクトル場が法束の正則切断ならば，その曲面は制限ウィルモアである．

ここで，制限ウィルモアとは曲面の共形構造を保つようなはめ込みの変分に対して，ウィルモア汎関数の停留点となるものを指す (つまり，上で定義した制限四元数ウィルモアに相当するもの)．また，以下が分かっている．

定理 15([6]). 実 4 次元の反自己双対アインシュタイン多様体内の曲面に対して，その平均曲率ベクトル場が法束の正則切断であることと I_1 が調和切断であることは同値である．

“調和性” はリーマン幾何学の範疇に属することだが，上の二つの主張をあわせたものは，I_1 が調和切断である曲面の一つの共形幾何学的な意味を与えていると思える．我々の設定で，次が得られた．

定理 16. (M,Q,g) を $n>1$ の四元数ケーラー多様体または反自己双対アインシュタイン多様体とし，$f:\Sigma\to M$ を I_1 を自然なツイスターリフトとする包含的なはめ込みとする．I_1 が調和切断ならば，f は制限四元数ウィルモアである．

つまり，上の定理 16 は I_1 が調和切断となるような包含的なはめ込みの四元数幾何学的な意味を与えると同時に [4] における主張の一般化となっている．

参考文献

[1] D. Alekseevsky and S. Marchiafava, Quaternionic structures on a manifold and subordinated structures, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 171 (1996), 205-273.

[2] D. Alekseevsky, S. Marchiafava and M. Pontecorvo, Compatible complex structures on almost quaternionic manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. 351 (1999), 997-1014.

[3] A. Besse, *Einstein Manifolds,* Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[4] F. Burstall and D. Calderbank, Conformal submanifold geometry I-III, arXiv:1006.5700.

[5] T. Friedrich, On surfaces in four-spaces, Ann. Global Anal. Geom. 2, 275-287 (1984).

[6] K. Hasegawa, On surfaces whose twistor lifts are harmonic sections, J. Geom. Phys. 57 (2007), 1549-1566.

[7] K. Hasegawa, Twistor holomorphic affine surfaces and projective invariants, SUT J. Math., 50 (2014), 325-341.

[8] K. Hasegawa, An inclusive immersion into a quaternionic manifold and its invariants, submitted.

[9] A. Sommese, Quaternionic manifolds, Math. Ann., 212 (1975), 191-214.

[10] K. Tsukada, Transversally complex submanifolds of a quaternion projective space, preprint.