トーリックケーラー多様体のラグランジュトーラス軌道の非ハミルトン体積最小性について*

小野　肇（埼玉大学）

1　背景＆主結果

平面内の円や 2 次元単位球面の小円は, 等周不等式により,「面積を変えない」微分同相写像による変形のもと長さが最小になる. このような対象の 1 つの高次元化として, Y. -G. Oh はケーラー多様体内のラグランジュ部分多様体のハミルトン極小性, ハミルトン安定性, ハミルトン体積最小性の概念を導入した（[9, 10]）: (M, J, ω) をケーラー多様体, $L \subset M$ をコンパクトラグランジュ部分多様体とする.

$$\mathrm{Ham}(L) := \{\phi(L) \,|\, \phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)\}$$

とおく. ここで, $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ はコンパクト台を持つ (M, ω) のハミルトン微分同相写像全体のなす群である. （M が単連結のときは, コンパクト台を持つシンプレクティック微分同相群の単位元連結成分に等しい. ）また,

$$\mathrm{Vol} : \mathrm{Ham}(L) \to \mathbb{R}, \quad \phi(L) \mapsto \mathrm{Vol}(\phi(L))$$

とする.

定義 1.1 (Oh, [9, 10]). $\phi(L) \in \mathrm{Ham}(L)$ は Vol の臨界点であるとき**ハミルトン極小**, 臨界点かつ第 2 変分が常に非負のとき**ハミルトン安定**, 最小点のとき**ハミルトン体積最小**という.

ハミルトン極小性および, ハミルトン安定性は第 1, 第 2 変分公式（[9, 10]）により確認することができ, 多くの例が知られている. 例えば,

1. $(a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^n$ に対して, $\mathbb{C}^n$ 内の標準トーラス

   $$T(a_1, \ldots, a_n) := \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \,|\, |z_j|^2 = 2a_j \, (j = 1, \ldots, n)\}$$

   はハミルトン安定である.（Y. -G. Oh, [10]）

2. $(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$ 内のラグランジュT^n-軌道はハミルトン安定である.（O., [11]）

---

*本講演の内容は入江博氏 (茨城大学) との共同研究に基づく. また, 本研究は科研費（24540098）の助成を受けたものである

3. $\mathbb{C}^n$ のコンパクトトーリックケーラー簡約のラグランジュトーラス軌道はハミルトン安定である. (Legendre-Rollin, [8])

一方, 高次元のハミルトン体積最小ラグランジュ部分多様体の例は, 特殊ラグランジュ部分多様体を除くと

- $\mathbb{R}P^n \subset \mathbb{C}P^n$ (Kleiner-Oh, [9])
- 大円 $\times$ 大円 $\subset S^2(1) \times S^2(1)$ (入江-O.-酒井, [6])
- complex hyperquadric の実形の一部 (入江-酒井-田崎, [7])

のみしか知られていない. そこで, 次の問題を考えたい：

〈問題〉

ハミルトン体積最小ラグランジュ部分多様体の例を出来るだけ多く見つけよ!!

この問題を考えるにあたっては, 今まで知られているハミルトン安定ラグランジュ部分多様体がハミルトン体積最小かどうかを調べるのは自然である. 本講演では, 上に挙げたハミルトン安定な例 1, 2, 3 の多くは非ハミルトン体積最小であることを報告する（詳細は 2 章以降参照）:

定理 1.2 (入江-O., [5]). $N(\mathbf{a}) := \#\{a_1, \ldots, a_n\} \geq 3$ となる $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^n$ に対して, 標準トーラス $T(\mathbf{a}) \subset (\mathbb{C}^n, \omega_0)$ はハミルトン体積最小ではない.

定理 1.3 (入江-O., [5]). $n \geq 3$ とする. このとき, $\mathbb{C}P^n$ のほとんど全てのラグランジュ T^n- 軌道はハミルトン体積最小ではない.

定理 1.4 (入江-O., [5]). $n \geq 3$ とする. このとき, 任意の複素 n 次元コンパクトトーリックケーラー多様体に対して, ハミルトン体積最小ではないラグランジュT^n-軌道が存在する.

2 $\mathbb{C}^n$ の場合

まず, いくつか記号を準備する：

$\mathbb{C}^n$ の座標を $(z_1, \ldots, z_n)$ とし, J_0 を標準的な複素構造, ω_0 を標準的なシンプレクティック形式

$$\omega_0 = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\overline{z_j}$$

とする. n 次元トーラス T^n の作用

$$(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}) \cdot (z_1, \ldots, z_n) = (e^{i\theta_1} z_1, \ldots, e^{i\theta_n} z_n)$$

は等長的, かつハミルトン作用であり, モーメント写像 μ_0 は

$$\mu_0(z_1, \ldots, z_n) = \left(\frac{1}{2}|z_1|^2, \ldots, \frac{1}{2}|z_n|^2 \right)$$

である．$\mathbf{a} \in (\mathbb{R}_{>0})^n$ に対して, $T(\mathbf{a}) = \mu_0^{-1}(\mathbf{a}) \subset (\mathbb{C}^n, J_0, \omega_0)$ は平坦なラグランジュT^n-軌道であり, ハミルトン変形のもと体積は極小となる, [10].

そこで, $T(\mathbf{a})$ のハミルトン体積最小性について考えたいのだが, $n \geq 3$ のとき, 「相異なる」$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に対して, $T(\mathbf{a})$ と $T(\mathbf{b})$ がハミルトンアイソトピーで移りあうことが起こりうる．実際, $T(\mathbf{a})$ と $T(\mathbf{b})$ がハミルトンアイソトピーで移りあうための必要十分条件が Chekanov により, [2] で与えられており, それを用いると容易に定理 1.2 は証明できる．ここでは, $n = 3$ の場合に, 定理 1.2 を具体的に証明してみよう．（高次元の場合は, ここで挙げる構成を用いることで同様に証明できる．）

$0 < a < b < c$ とする．このとき, $T(b, c, a)$ を $T(a, a+c-b, b)$ にうつすような $(\mathbb{C}^n, \omega_0)$ のハミルトンアイソトピー $\{\phi_t\}_{t \in [0,1]}$ を構成する．そうすれば, $T(b, c, a)$ はハミルトン体積最小ではないことが示される．まず,

$$U = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \,|\, |z_1| < |z_2|\}, \; V = \mathbb{C}^3 \setminus \{z_2 = 0\}$$

に対し,

$$\Psi : U \to V, \quad (z_1, z_2, z_3) \mapsto \left(\frac{z_1 z_2}{|z_2|}, \frac{z_2 \sqrt{|z_2|^2 - |z_1|^2}}{|z_2|}, z_3 \right)$$

はシンプレクティック微分同相写像であり, $T(b, c, a)$ を $T(b, c-b, a)$ にうつす．実際, action-angle 座標 $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta})$ $(z_j = \sqrt{2\rho_j}\, e^{i\theta_j})$ を用いると,

$$\Psi(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3) = (\rho_1, \rho_2 - \rho_1, \rho_3, \theta_1 + \theta_2, \theta_2, \theta_3)$$

なので,

$$\begin{aligned} \Psi^* \omega_0 &= \Psi^* \sum_{j=1}^{3} d\rho_j \wedge d\theta_j \\ &= d\rho_1 \wedge d(\theta_1 + \theta_2) + d(\rho_2 - \rho_1) \wedge d\theta_2 + d\rho_3 \wedge d\theta_3 \\ &= \omega_0 \end{aligned}$$

であることが分かる．

次に, ユニタリアイソトピー

$$\begin{aligned} &\Phi_t : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3 \\ &(w_1, w_2, w_3) \mapsto (w_1 \cos \frac{\pi}{2} t + w_3 \sin \frac{\pi}{2} t, w_2, -w_1 \sin \frac{\pi}{2} t + w_3 \cos \frac{\pi}{2} t) \end{aligned}$$

は V を保つので, V に制限することで, V 上のハミルトンアイソトピーを得る．Φ_1 は $T(b, c-a, a)$ を $T(a, c-a, b)$ にうつす.

したがって, $\Psi^{-1} \circ \Phi_t \circ \Psi$ は U 上のハミルトンアイソトピーで

$$\begin{aligned} (z_1, z_2, z_3) &\overset{\Psi}{\mapsto} \left(\frac{z_1 z_2}{|z_2|}, \frac{z_2 \sqrt{|z_2|^2 - |z_1|^2}}{|z_2|}, z_3 \right) \\ &\overset{\Phi_1}{\mapsto} \left(z_3, \frac{z_2 \sqrt{|z_2|^2 - |z_1|^2}}{|z_2|}, -\frac{z_1 z_2}{|z_2|} \right) \\ &\overset{\Psi^{-1}}{\mapsto} \left(\frac{|z_2| z_3}{z_2}, \frac{z_2 \sqrt{|z_3|^2 + |z_2|^2 - |z_1|^2}}{|z_2|}, -\frac{z_1 z_2}{|z_2|} \right) \end{aligned}$$

は $T(b,c,a)$ を $T(a,a+c-b,b)$ にうつす．適当にカットオフして，台が U に含まれる $\mathbb{C}^3$ 上のハミルトンアイソトピー ϕ_t が得られる．

3 複素射影空間の場合

まず，定理 1.3 の主張をより明確にしておこう．n 次元の Delzant 多面体（定義は次の章）と n 次元コンパクトシンプレクティックトーリック多様体は対応していた．n 次元標準単体 $\Delta = \{\mathbf{p} \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n \mid \sum p_i \leq 1\}$ には n 次元複素射影空間 $(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS}, \mu)$ が対応し，モーメント写像 μ の像が Δ となる．

$$D_n := \Delta \setminus (\Delta\text{を重心細分したときの } (n-1) \text{ 次元以下の面})$$

とおく．このとき次が成り立つ：

定理 3.1 (入江-O., [5])**.** $n \geq 3$ とする．このとき，任意の $p \in D_n$ に対して，ラグランジュT^n-軌道 $\mu^{-1}(p) \subset \mathbb{C}P^n$ はハミルトン体積最小ではない[1]．

証明のアイデアは単純である：

Step 1 $i = 0, 1, \ldots, n$ に対して $U_i := \{[z_0 : \cdots : z_n] \mid z_i \neq 0\}$ とおく．このとき，各 i に対して，「ハミルトン T^n-同変 Darboux 座標」を用いることで，ハミルトン T^n-空間として

$$(U_i, \omega, \mu) \simeq (\mu_0^{-1}(\tilde{\Delta}_1) = B(\sqrt{2}), \omega_0, \mu_0)$$

である．ここで，

$$\tilde{\Delta}_s := \left\{ (a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^n a_i < s \right\}$$
$$B(\sqrt{2s}) := \left\{ (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^n |z_i|^2 < 2s \right\} = \mu_0^{-1}(\tilde{\Delta}_s)$$

とする．

Step 2 Step 1 の同一視のもと，2 章で構成したハミルトンアイソトピーを $\mathbb{C}P^n$ に移植する．これにより，$\mu^{-1}(p)$ と別のラグランジュT^n-軌道 $\mu^{-1}(q)$ はハミルトンアイソトピックであることがわかる．

Step 3 $\mu^{-1}(p), \mu^{-1}(q)$ の体積を計算し比較する．

（Step 1,2 は純粋にシンプレクテック幾何の内容である．Step 3 でケーラー計量の情報が必要となる．）

まず，Step 1 において，「ハミルトン T^n-同変 Darboux 座標」を明確にしよう．$\mathbb{R}^n$ の標準基底を $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$，原点を $\mathbf{e}_0$ と書くことにする．

---

[1] 実は，D_n よりもう少し大きな空間の元 p に対して $\mu^{-1}(p)$ はハミルトン体積最小ではないことが分かる．[5] 参照．

$\boldsymbol{i=0}$ の場合

$$U_0=\{[z_0:z_1:\cdots:z_n]\,|\,z_0\neq 0\}\xrightarrow{\sim}\mathbb{C}^n,\quad [z_0:\cdots:z_n]\mapsto\left(\frac{z_1}{z_0},\dots,\frac{z_n}{z_0}\right)$$

$$r_0^i:=\left|\frac{z_i}{z_0}\right|,\quad \theta_0^i:=\arg\frac{z_i}{z_0}$$

とおくと,

$$\mu=\sum_{i=1}^n u_0^i\mathbf{e}_i,\quad u_0^i:=\frac{(r_0^i)^2}{1+\sum_{j=1}^n(r_0^j)^2}$$

と表せ, さらに

$$x_0^i:=\sqrt{2u_0^i}\cos\theta_0^i,\quad y_0^i:=\sqrt{2u_0^i}\sin\theta_0^i$$

とおくと ($\mathbf{e}_0$-ハミルトン T^n-同変 Darboux 座標), U_0 上

$$\omega=\sum_{i=1}^n du_0^i\wedge d\theta_0^i=\sum_{i=1}^n dx_0^i\wedge dy_0^i,\quad \mu=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\left\{(x_0^i)^2+(y_0^i)^2\right\}\mathbf{e}_i$$

となり, ハミルトン T^n-空間として

$$(U_0,\omega,\mu)\simeq(\mu_0^{-1}(\tilde{\Delta}_1),\omega_0,\mu_0)$$

であることがわかる.

$\boldsymbol{i\neq 0}$ の場合　簡単のため $i=1$ について考える. ($i\geq 2$ の場合は同様にわかる.)

$$U_1=\{[z_0:z_1:\cdots:z_n]\,|\,z_1\neq 0\}\xrightarrow{\sim}\mathbb{C}^n,\quad [z_0:\cdots:z_n]\mapsto\left(\frac{z_0}{z_1},\frac{z_2}{z_1},\dots,\frac{z_n}{z_1}\right)$$

$$r_1^1:=\left|\frac{z_0}{z_1}\right|,\quad r_1^i:=\left|\frac{z_i}{z_1}\right|\ (i\geq 2),\quad \theta_1^1:=\arg\frac{z_0}{z_1},\quad \theta_1^i:=\arg\frac{z_i}{z_1}\ (i\geq 2)$$

とおくと,

$$\mu=u_1^1(\mathbf{e}_0-\mathbf{e}_1)+\sum_{i=2}^n u_1^i(\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_1)+\mathbf{e}_1,\quad u_1^i:=\frac{(r_1^i)^2}{1+\sum_{j=1}^n(r_1^j)^2}\ (i\geq 1)$$

と表せ, さらに

$$x_1^i:=\sqrt{2u_1^i}\cos\theta_1^i,\quad y_1^i:=\sqrt{2u_1^i}\sin\theta_1^i$$

とおくと ($\mathbf{e}_1$-ハミルトン T^n-同変 Darboux 座標), U_1 上

$$\omega=\sum_{i=1}^n du_1^i\wedge d\theta_1^i=\sum_{i=1}^n dx_1^i\wedge dy_1^i,$$

$$\mu=\frac{1}{2}\left\{(x_1^1)^2+(y_1^1)^2\right\}(\mathbf{e}_0-\mathbf{e}_1)+\frac{1}{2}\sum_{i=2}^n\left\{(x_1^i)^2+(y_1^i)^2\right\}(\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_1)+\mathbf{e}_1$$

となり, ハミルトン T^n-空間として

$$(U_1,\omega,\mu)\simeq(\mu_0^{-1}(\tilde{\Delta}_1),\omega_0,\mu_0)$$

であることがわかる.

次に, Step 2 にうつる．$p \in D_n$ とする．このとき, Δ の頂点 $\mathbf{e}_m$ がただ 1 つ存在して, p は $\mathbf{e}_m$ を頂点とする Δ の重心細分の n-単体の内部に含まれる．このとき,

$$p = a_1(\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_m) + \cdots + a_m(\mathbf{e}_{m-1} - \mathbf{e}_m) + a_{m+1}(\mathbf{e}_{m+1} - \mathbf{e}_m) + \cdots + a_n(\mathbf{e}_n - \mathbf{e}_m) + \mathbf{e}_m$$

と表せ,

$$\mathbf{a} \in (\mathbb{R}_{>0})^n,\ N(\mathbf{a}) := \#\{a_1, \ldots, a_n\} \geq 3,\ \max\{a_i\} + \sum_{i=1}^{n} a_i \leq 1$$

が成り立つ．そこで, $\min\{a_i\} = a_j < a_k < a_l$ とする．$\mathbf{b} \in (\mathbb{R}_{>0})^n$ を

$$b_i = \begin{cases} a_i & (i \neq l) \\ a_l - a_k + a_j & (i = l) \end{cases} \tag{3.1}$$

により定義する． 2 章で定義したハミルトンアイソトピー（を高次元で考えたもの）$\{\phi_t\}_{t \in 0,1}$ により, 標準トーラス $T(\mathbf{a})$ は $T(\mathbf{b})$ にうつる．

Step 1 の同一視により, もし $(\mathbb{C}^n, \omega_0)$ のハミルトンアイソトピー $\{\phi_t\}_{t \in [0,1]}$ の台が $B(\sqrt{2})$ に含まれていれば, 台の外では恒等写像として拡張することで, $(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$ のハミルトンアイソトピー $\{\Phi_t\}_{t \in [0,1]}$ で, $\mu^{-1}(p)$ を $\mu^{-1}(q)$ にうつすものが得られる．ここで,

$$q = b_1(\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_m) + \cdots + b_m(\mathbf{e}_{m-1} - \mathbf{e}_m) + b_{m+1}(\mathbf{e}_{m+1} - \mathbf{e}_m) + \cdots + b_n(\mathbf{e}_n - \mathbf{e}_m) + \mathbf{e}_m$$

である．Chekanov の論文 [2] では, 標準トーラスを別の標準トーラスにうつすハミルトンアイソトピーの台についての評価はなされていなかったが, Chekanov-Schlenk の論文 [3] では, 台の大きさの評価が明確にされた（基本的には 2 章で具体的に構成した $n = 3$ のハミルトンアイソトピーの台の大きさをきっちり評価すればよい）[2]：

定理 3.2 (Chekanov-Schlenk, [3])**.** *$\mathbf{a} \in (\mathbb{R}_{>0})^n$ は $N(\mathbf{a}) \geq 3$ を満たすとし, $\mathbf{b}$ を上のように定義する．このとき, $s > a_j + \sum_i a_i$ に対して, 次を満たす C^∞ 級関数 $H : [0,1] \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ が存在する：*

- $\operatorname{Supp} H \subset [0,1] \times B(\sqrt{2s})$
- *H が生成するハミルトンアイソトピーを $\{\phi_t\}_{t \in [0,1]}$ とすると, $\phi_1(T(\mathbf{a})) = T(\mathbf{b})$*

今考えている $p \in D_n$ に対応する $\mathbf{a}$ については, $s = 1$ としてよいので, $(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$ のハミルトンアイソトピー $\{\Phi_t\}_{t \in [0,1]}$ で, $\mu^{-1}(p)$ を $\mu^{-1}(q)$ にうつすものが得られたことになる．

最後に Step 3 であるが, action-angle 座標により, トーリックケーラー多様体のシンプレクティック形式を標準シンプレクティック形式として書き表した場合, 複素構造はモーメント像上のある境界条件を満たす凸関数（「シンプレクテックポテンシャル」と呼ばれる）のヘッセ行列により表されることが知られている（次の章や [1] 参照．）$(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS}, \mu)$ の場合には $\mu^{-1}(p)$ の体積は

$$\mathrm{Vol}(\mu^{-1}(p))^2 = C\left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i\right)\prod_{i=1}^{n} a_i$$

[2] 入江氏との共同研究を始めた当初はまだ [3] が発表されていなかったため, 非常に限られたラグランジュトーラス軌道に関する非ハミルトン体積最小性しか示すことができなかった．

であることがわかる．したがって，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(\mu^{-1}(p))^2 - \mathrm{Vol}(\mu^{-1}(q))^2 &= C\left(1-\sum_{i=1}^n a_i\right)\prod_{i=1}^n a_i \\
&\quad - C\left(1-\sum_{i=1}^n a_i + a_l - (a_l - a_k + a_j)\right)\frac{a_l - a_k + a_j}{a_l}\prod_{i=1}^n a_i \\
&= C\frac{(a_k - a_j)}{a_l}\left(1-\sum_{i=1}^n a_i - a_l + a_k - a_j\right)\prod_{i=1}^n a_i
\end{aligned}
$$

であり，$a_l + \sum_i a_i \leq 1, a_k > a_j$ であったので，上式は正となる．これで定理 3.1 が示された．

4 トーリックケーラー多様体の場合

複素射影空間の場合と同様のアイデアにより，3 次元以上の任意のコンパクトトーリックケーラー多様体に非ラグランジュトーラス軌道が存在することを示すことができる．(M, J, ω, μ) を複素 n 次元コンパクトトーリックケーラー多様体とする．ここで，$\mu : M \to \mathbb{R}^n$ はモーメント写像である．よく知られているように，モーメント写像の像 $\Delta := \mathrm{Image}\,(\mu)$ は次の性質を持つ n 次元凸多面体である（Delzant 多面体）：

- ∘ Δ の各頂点 $\mathbf{v}_i$ $(i = 1, \ldots, d)$ からは，ちょうど n 本の辺が出ていて，それぞれ primitive ベクトル $\mathbf{e}_{i,1}, \ldots, \mathbf{e}_{i,n}$ で張られる
- ∘ $\mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\langle \mathbf{e}_{i,1}, \ldots, \mathbf{e}_{i,n}\rangle = \mathbb{Z}^n$ $(\forall i)$

一つの頂点 $\mathbf{v}_i$ に着目すると，

$$
\Delta = \left\{ \mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{e}_{i,j} \,\middle|\, \mathbf{a} \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n, \langle \mathbf{a}, \mathbf{n}_k\rangle - \lambda_k \geq 0,\ \lambda_k < 0,\ \ k = n+1, \ldots, e \right\}
$$

の形で書くことができる．

$$
\Delta_i^\circ = \left\{ \mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{e}_{i,j} \,\middle|\, \mathbf{a} \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n, \langle \mathbf{a}, \mathbf{n}_k\rangle - \lambda_k > 0,\ k = n+1, \ldots, e \right\},
$$

$$
\Delta^\circ = \{\mathbf{a} \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{n}_k\rangle - \lambda_k > 0,\ k = n+1, \ldots, e\}
$$

とおくと，ハミルトン T^n-空間として，

$$
(U_i := \mu^{-1}(\Delta_i^\circ), \omega_{|U_i}, \mu_{|U_i}) \simeq (V := \mu_0^{-1}(\Delta^\circ), \omega_{0\,|V}, \mu_{0\,|V})
$$

となる．このことは，次のようにハミルトン T^n-同変 Darboux 座標をとることでわかる：まず，$(\mathbb{C}^\times)$-空間として，$(U_i, \mu^{-1}(\mathbf{v}_i)) \simeq (\mathbb{C}^n, 0)$ である．この同一視による座標成分を $w_j = r_j e^{\sqrt{-1}\theta_j}$ とする．このとき，$\omega_{|U_i}, \mu_{|U_i}$ は，ケーラーポテンシャル $\varphi \in C^\infty((\mathbb{R}_{\geq 0})^n)$ により

$$
\omega_{|U_i} = 2\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi
$$

$$\mu_{|U_i} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \mathbf{e}_{i,j} + \mathbf{v}_i, \quad \mu_j = r_j \frac{\partial \varphi}{\partial r_j}$$

と表せる．そこで,

$$x_j = \sqrt{2\mu_j} \cos\theta_j, \quad y_j = \sqrt{2\mu_j} \sin\theta_j$$

とおくと,

$$\omega_{|U_i} = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j, \quad \mu_{|U_i} = \mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2}(x_j^2 + y_j^2)\mathbf{e}_{i,j}$$

となり, 求める同一視を得る．

次に, $\mu^{-1}(\mathbf{v}_i)$ を中心とする, ハミルトン T^n-球の極大半径を $\sqrt{2s_{i,0}}$ と書く．$s_{i,0}$ は

$$\tilde{\Delta}_{i,s} := \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{e}_{i,j} + \mathbf{v}_i \,\middle|\, \mathbf{a} \in \tilde{\Delta}_s \right\}, \; s_{i,0} = \sup\{s > 0 \,|\, \tilde{\Delta}_{i,s} \subset \Delta\}$$

により求まる．

このとき, 3 章でみた複素射影空間の場合と同様に, 定理 3.2 より次が得られる．

命題 4.1 (入江-O., [5])**.** Δ の内部の点 $p = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{e}_{i,j} + \mathbf{v}_i$ は $N(\mathbf{a}) \geq 3, \min\{a_k\} + \sum_{j=1}^{n} a_j < s_{i,0}$ を満たすとする．(3.1) により定義される $\mathbf{b}$ に対して $q = \sum_{j=1}^{n} b_j \mathbf{e}_{i,j} + \mathbf{v}_i$ とおくと, $\mu^{-1}(p)$ と $\mu^{-1}(q)$ はハミルトンアイソトピックである．

次に上の $\mu^{-1}(p)$ と $\mu^{-1}(q)$ の体積を比較したい．そのために,「シンプレクティックポテンシャル」を用いる．まず, M の open dense $(\mathbb{C}^\times)^n$-軌道において, action-angle 座標

$$M^\circ \simeq (\mathbb{C}^\times)^n \overset{\log}{\simeq} \mathbb{R}^n \times i\,(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n \overset{\mu\times \mathrm{id}/i}{\simeq} \mathrm{Int}\,(\Delta) \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n$$

により, ケーラー形式は標準的（$\omega = \sum_j du_j \wedge d\theta_j$）に表示される．ここで, $\mathbf{u}$ は $\mathbf{v}_i$ に関する action 座標である．一方, 複素構造は, 次の「 Abreu の境界条件」を満たす $\mathrm{Int}\,(\Delta)$ 上の凸関数（シンプレクティックポテンシャルと呼ばれる）ϕ により

$$\left(J\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}, J\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}, \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right) \begin{pmatrix} 0 & -(\mathrm{Hess}\,\phi)^{-1} \\ \mathrm{Hess}\,\phi & 0 \end{pmatrix}$$

と表される．

Abreu の境界条件

$$\det \mathrm{Hess}\,\phi = \left(\delta(\mathbf{u}) \prod_{i=1}^{n} u_i \prod_{j=n+1}^{e} \{\langle \mathbf{u}, \mathbf{n}_j \rangle - \lambda_j\} \right)^{-1}, \quad \delta \in C^\infty(\Delta), \; \Delta 上正$$

これにより, Δ の内点 $r = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{e}_{i,j} + \mathbf{v}_i$ に対して, $\mu^{-1}(r)$ は平坦ラグランジュトーラスで,

$$\mathrm{Vol}(\mu^{-1}(r))^2 = (2\pi)^{2n}(\det \mathrm{Hess}\,\phi)(\mathbf{c})^{-1} = (2\pi)^{2n}\left(\delta(\mathbf{c})\prod_{j=1}^{n} c_j \prod_{k=n+1}^{e}\{\langle \mathbf{c}, \mathbf{n}_k\rangle - \lambda_k\}\right)$$

と表すことができる. もちろん, 一般のトーリックケーラー計量については具体的な δ の形がわからないので, $\mu^{-1}(p)$ と $\mu^{-1}(q)$ の体積を直接比較することはできない. しかし, 以下で見るように, Abreu の境界条件を用いて, p が十分頂点 $\mathbf{v}_i$ に近いときには比較することができる.

まず, $0 < c \leq 1$ に対して,

$$p(c) := cp + (1-c)\mathbf{v}_i, \quad q(c) := cq + (1-c)\mathbf{v}_i$$

とおくと, $\mu^{-1}(p(c))$ と $\mu^{-1}(q(c))$ はハミルトンアイソトピックである. また,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Vol}(\mu^{-1}(p(c)))^2 - \mathrm{Vol}(\mu^{-1}(q(c))) \\
&= (2\pi\sqrt{c})^{2n}\left\{\delta(c\mathbf{a})\prod_{j=1}^{n} a_j \prod_{k=n+1}^{e}\{\langle c\mathbf{a}, \mathbf{n}_k\rangle - \lambda_k\} - \delta(c\mathbf{b})\prod_{j=1}^{n} b_j \prod_{k=n+1}^{e}\{\langle c\mathbf{b}, \mathbf{n}_k\rangle - \lambda_k\}\right\}
\end{aligned}$$

となる. $\{\}$ の中の $c = 0$ での値は,

$$D := \delta(0)\left\{\prod_{j=1}^{n} a_j - \prod_{j=1}^{n} b_j\right\}\prod_{k=n+1}^{e}(-\lambda_k)$$

であり,

- Abreu の境界条件より $\delta(0) > 0$
- $\mathbf{b}$ の定義より $\prod_{j=1}^{n} a_j - \prod_{j=1}^{n} b_j > 0$
- 任意の $k = n+1, \ldots, e$ に対して $\lambda_k < 0$

であったので, $D > 0$ となる. したがって次が得られた.

定理 4.2 (入江-O., [5])**.** Δ の内部の点 $p = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{e}_{i,j} + \mathbf{v}_i$ は $N(\mathbf{a}) \geq 3, \min\{a_j\} + \sum_{j=1}^{n} a_j < s_{i,0}$ を満たすとする. このとき, $0 < C \leq 1$ が存在して, 任意の $0 < c < C$ に対して, $\mu^{-1}(p(c))$ はハミルトン体積最小ではない.

5 問題

$\mathbb{C}^n$ の場合, 次の問題が残っている：

〈問題〉

$N(\mathbf{a}) \leq 2$ に対して $T(\mathbf{a}) \subset \mathbb{C}^n$ はハミルトン体積最小か？

特に, $N(\mathbf{a}) = 1$ のときハミルトン体積最小であるならば, Legendre-Rollin のケーラー簡約に関する議論を用いると, $\mathbb{C}P^n$ のクリフォードトーラス（モーメント像の重心に対応する極小ラグランジュT^n-軌道）はハミルトン体積最小となる[3]. したがって, 上の問題は大変興味深いものである.

一つのアイデアとして, この問題は, 等周不等式を一般化したものを示すことで証明できるはずである. まず, $\mathbb{R}^2$ 内の単純閉曲線 l に関する等周不等式は

$$\text{Length}\,(l)^2 \geq 4\pi \left| \int_l x dy \right|$$

と表せた. ここで, 右辺（作用積分）は l のハミルトン不変量である. つまり, 等周不等式は l の長さとハミルトン不変量を比較したものである.

そこで, $T(\mathbf{a})$ をハミルトン変形した $\mathbb{C}^n$ のラグランジュトーラス L に対して, ハミルトン不変量 $A(L)$ を

$$A(L) := \inf \left\{ \left| \prod_{i=1}^{n} \int_{l_i} \eta \right| ; \langle l_1, \ldots, l_n \rangle : \pi_1(L) \text{ の生成元} \right\}, \quad \eta = \sum_{i=1}^{n} x_i dy_i$$

により定義する.

予想 5.1 (一般化等周不等式)**.**

$$\text{Vol}(L)^2 \geq (4\pi)^n A(L)$$

$L = T(\mathbf{a})$ の場合はこの不等式は正しい. 例えば $N(\mathbf{a}) = 1$, つまり $T(a, a, \ldots, a)$ の場合には $A(L) = (2\pi a)^n$ であり, $T(a, a, \ldots, a)$ は上の不等式の等号を満たすので, 予想が正しければ, $T(\mathbf{a})$ はハミルトン体積最小であることがわかる. また, $N(\mathbf{a}) \geq 3$ の場合は,

$$\text{Vol}(T(\mathbf{a}))^2 > \text{Vol}(T(\mathbf{b}))^2 \geq (4\pi)^n A(T(\mathbf{b})) = (4\pi)^n A(T(\mathbf{a}))$$

であるので, 等号が成立しない.

参考文献

[1] M. Abreu, *Kähler geometry of toric manifolds in symplectic coordinates*, Fields Inst. Commun. **35**, (2003), 1–24.

[3]クリフォードトーラスのハミルトン体積最小性は Y. -G. Oh が [9] で予想し, 未解決の問題である.

[2] Yu. V. Chekanov, *Lagrangian tori in a symplectic vector space and global symplectomorphisms*, Math. Z. **223** (1996), 547–559.

[3] Yu. Chekanov and F. Schlenk, *Lagrangian product tori in tame symplectic manifolds*, Comm. Math. Helv. **91** (2016), 445–475.

[4] V. Guillemin, *Kähler structures on toric varieties*, J. Differ. Geom. **40**, (1994), 285–309.

[5] H. Iriyeh and H. Ono, *Almost all Lagrangian torus orbits in $\mathbb{C}P^n$ are not Hamiltonian volume minimizing*, Ann. Glob. Anal. Geom. **50** (2016), 85–96.

[6] H. Iriyeh, H. Ono and T. Sakai, *Integral geometry and Hamiltonian volume minimizing property of a totally geodesic Lagrangian torus in $S^2 \times S^2$*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. Volume 79, Number 10 (2003), 167-170.

[7] H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, *Lagrangian Floer homology of a pair of real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type* , J. Math. Soc. Japan Volume 65, Number 4 (2013), 1135-1151.

[8] E. Legendre and Y. Rollin, Hamiltonian stationary Lagrangian fibrations, preprint, (2016)

[9] Y.-G. Oh, *Second variation and stabilities of minimal lagrangian submanifolds in Kähler manifolds*, Invent. Math. **101** (1990), 501–519.

[10] Y.-G. Oh, *Volume minimization of Lagrangian submanifolds under Hamiltonian deformations*, Math. Z. **212** (1993), 175–192.

[11] H. Ono, *Hamiltonian stability of Lagrangian tori in toric Kähler manifolds*, Ann. Glob. Anal. Geom. **31** (2007), 329–343.

[12] C. Viterbo, *Metric and isoperimetric problems in symplectic geometry*, J. Am. Math. Soc. **13** (2000), 411–431.