体積保存平均曲率流の弱解の存在及び単調性公式について

高棹圭介
東京大学 大学院 数理科学研究科

1. INTRODUCTION

$T > 0$, d を 2 以上の整数とする. 任意の $t \in [0, T)$ に対し, $U_t \subset \mathbb{R}^d$ を有界開集合かつ滑らかな境界 M_t を持つとする. 超曲面の族 $\{M_t\}_{t \in [0, T)}$ が体積保存平均曲率流であるとは, M_t の速度ベクトル v が

$$v = h - \langle h \cdot \nu \rangle \nu \quad \text{on } M_t, \quad (1.1)$$

を満たすことである. ここで h は M_t の平均曲率ベクトル, ν は内向き単位法線ベクトル, $\langle h \cdot \nu \rangle$ は $h \cdot \nu$ の積分平均, 即ち

$$\langle h \cdot \nu \rangle = \frac{1}{\mathcal{H}^{d-1}(M_t)} \int_{M_t} h \cdot \nu d\mathcal{H}^{d-1}$$

である ($\mathcal{H}^{d-1}$ は $(d-1)$ -次元 Hausdorff measure). $\{M_t\}_{t \in [0, T)}$ が体積保存平均曲率流であるとする, (1.1) により M_t は

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}^d(U_t) = - \int_{M_t} v \cdot \nu d\mathcal{H}^{d-1} = 0 \quad (1.2)$$

を満たす. ここで $\mathcal{L}^d$ は d -次元 Lebesgue measure である. (1.2) は体積保存条件と呼ばれる. (1.2) により,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{H}^{d-1}(M_t) &= - \int_{M_t} h \cdot \nu d\mathcal{H}^{d-1} = - \int_{M_t} (v + \langle h \cdot \nu \rangle \nu) \cdot \nu d\mathcal{H}^{d-1} \\ &= - \int_{M_t} |v|^2 d\mathcal{H}^{d-1} - \langle h \cdot \nu \rangle \int_{M_t} v \cdot \nu d\mathcal{H}^{d-1} = - \int_{M_t} |v|^2 d\mathcal{H}^{d-1} \end{aligned} \quad (1.3)$$

を得る. また, このことから $\mathcal{H}^{d-1}(M_t)$ は単調減少である.

平均曲率流方程式に対しては, 初期値 M_0 が十分滑らかであってもダンベル型のような複雑な形状であればその古典解の時間大域存在は望めない事が知られている. それに対し Brakke [3] は Brakke 解と呼ばれる弱解を定義し, その時間大域存在を得ている. このことから体積保存平均曲率流方程式 (1.1) に対しても時間大域存在を得るには弱解を考察することが必要であるといえる.

次に, (1.1) の古典解及び弱解の存在について既知の結果を述べる. U_0 が convex であるときの古典解の時間大域存在は Gage [8] ($d = 2$ のとき) と Huisken [10] ($d \geq 2$ のとき) によって示された. また, Escher と Simonett [6] によって M_0 が十分球に近いときの古典解の時間大域解が得られている. さらに, [6, 8, 10] では解 M_t の漸近挙動 (M_t は球に収束する) も示されている. 一般的な形状の初期値に対しては, Mugnai-Seis-Spadaro [14] は変分法, Takasao [17] ($d = 2, 3$ のとき) はフェイズフィールド法を用いて弱解の時間大域存在を示している.

本研究は JSPS 科研費 JP16K17622 の助成を受けたものである.

2. フェイズフィールド法

以下に述べるフェイズフィールド法によって (1.1) の弱解の構成を行う。 U_0 を $\mathbb{R}^d$ の有界開集合とする。 次の Allen-Cahn 方程式を考える:

$$\begin{cases} \varepsilon \varphi_t^\varepsilon = \varepsilon \Delta \varphi^\varepsilon - \frac{W'(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon}, & (x, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, \infty), \\ \varphi^\varepsilon(x, 0) = \varphi_0^\varepsilon(x), & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (2.1)$$

ここで $\varepsilon \in (0, 1)$, $W(s) = \frac{(1-s^2)^2}{2}$ とした。 初期値 φ_0^ε は,

$$\varphi_0^\varepsilon(x) \approx \begin{cases} +1, & x \in U_0 \\ -1, & x \in \mathbb{R}^d \setminus U_0 \end{cases}$$

となるように決める。 (2.1) の解 φ^ε に対して, $\varepsilon \rightarrow 0$ としたとき $\mathbb{R}^d$ は $\{x \in \mathbb{R}^d : \varphi^\varepsilon(x, t) \approx 1\}$ と $\{x \in \mathbb{R}^d : \varphi^\varepsilon(x, t) \approx -1\}$ の 2 相に分けられ, $M_t^\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^d : \varphi^\varepsilon(x, t) = 0\}$ の極限 M_t が平均曲率流方程式の解となることが知られている [7, 11]. これと同様に, (2.1) に非局所項を加えたフェイズフィールド法による体積保存平均曲率流 (1.1) の解析が行われている [2, 4, 5, 9, 16]. ここではまず Rubinstein と Sternberg による体積保存平均曲率流に対する良く知られたフェイズフィールド法を紹介する。 $\Omega := \mathbb{T}^d = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d$ とする。 次の非局所項付き Allen-Cahn 方程式を考える:

$$\begin{cases} \varepsilon \varphi_t^\varepsilon = \varepsilon \Delta \varphi^\varepsilon - \frac{W'(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon} + \lambda_1^\varepsilon, & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ \varphi^\varepsilon(x, 0) = \varphi_0^\varepsilon(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.2)$$

ここで $\lambda_1^\varepsilon(t) := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \frac{W'(\varphi^\varepsilon(x, t))}{\varepsilon} dx = \int_{[0,1]^d} \frac{W'(\varphi^\varepsilon(x, t))}{\varepsilon} dx$ とした。 ここでは, 簡単の為に周期境界条件を課している。 (2.2) の解 φ^ε は

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega \varphi^\varepsilon(x, t) dx = 0 \quad (2.3)$$

を満たす。 これは, $\{x \in \Omega : \varphi^\varepsilon(x, t) \approx 1\}$ と $\{x \in \Omega : \varphi^\varepsilon(x, t) \approx -1\}$ の 2 相の体積比が変わらないこと, 即ち体積保存条件を表している。 実際, $\{M_t\}_{t \in [0, T]}$ を (1.1) の古典解とすると, $M_t^\varepsilon := \{x \in \Omega : \varphi^\varepsilon(x, t) = 0\}$ が M_t に収束することが [5] によって得られている為, (2.2) は体積保存平均曲率流に対するフェイズフィールド法と見做せる。

(2.3) より, 部分積分を用いると

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_\Omega \frac{\varepsilon |\nabla \varphi^\varepsilon|^2}{2} + \frac{W(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon} dx = \int_\Omega \left(\varepsilon \nabla \varphi^\varepsilon \cdot \nabla \varphi_t^\varepsilon + \frac{W'(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon} \varphi_t^\varepsilon \right) dx \\ & = \int_\Omega \varepsilon \left(-\Delta \varphi^\varepsilon + \frac{W'(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon^2} \right) \varphi_t^\varepsilon dx = \int_\Omega \varepsilon \left(-\varphi_t^\varepsilon + \frac{\lambda_1^\varepsilon}{\varepsilon} \right) \varphi_t^\varepsilon dx \\ & = - \int_\Omega \varepsilon (\varphi_t^\varepsilon)^2 dx + \lambda_1^\varepsilon \int_\Omega \varphi_t^\varepsilon dx = - \int_\Omega \varepsilon (\varphi_t^\varepsilon)^2 dx \end{aligned} \quad (2.4)$$

を得る。 (2.4) は元の問題である体積保存平均曲率流の (1.3) に対応した等式といえる。

$$E(\varphi^\varepsilon) = \int_\Omega \frac{\varepsilon |\nabla \varphi^\varepsilon|^2}{2} + \frac{W(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon} dx, \quad F(\varphi^\varepsilon) = \int_\Omega \varphi^\varepsilon dx$$

とおく。 F はある集合 U の体積の近似, E は U の境界 ∂U の面積の近似と見做すことができる。 関数 φ^ε が F が定数という束縛条件化で E の極値を取るとき, $\delta E = -\varepsilon \Delta \varphi^\varepsilon + \frac{W'(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon}$,

$\delta F = 1$ より, ある定数 λ_1^ε に対して

$$0 = \delta E - \lambda_1^\varepsilon \delta F = -((2.2) \text{ の右辺}) \quad (2.5)$$

を得る. よって (2.2) は $F = (\text{定数})$ の束縛条件付きのエネルギー汎関数 E の勾配流と見做すことができる.

フェイズフィールド法を用いた通常平均曲率流方程式の弱解の存在証明については, 1993 年の Ilmanen の結果が有名である [11]. それに対して, (2.2) を用いた (1.1) の解の構成については未解決問題である. その理由の 1 つとしては, λ_1^ε に対する良い評価が知られていないことが挙げられる (Remark 2.3 参照).

次に, Golovaty [9] によって提案された以下の非局所項付き Allen-Cahn 方程式を考える:

$$\begin{cases} \varepsilon \varphi_t^\varepsilon = \varepsilon \Delta \varphi^\varepsilon - \frac{W'(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon} + \lambda^\varepsilon \sqrt{2W(\varphi^\varepsilon)}, & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ \varphi^\varepsilon(x, 0) = \varphi_0^\varepsilon(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.6)$$

ここで

$$\lambda^\varepsilon(t) = \frac{-\int_{\Omega} \sqrt{2W(\varphi^\varepsilon)} \left(\varepsilon \Delta \varphi^\varepsilon - \frac{W'(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon} \right) dx}{2 \int_{\Omega} W(\varphi^\varepsilon) dx} \quad (2.7)$$

とした. $k(s) := s - \frac{1}{3}s^3$ とおく. $k'(s) = \sqrt{2W(s)}$ と λ^ε の定義より

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} k(\varphi^\varepsilon) dx = \int_{\Omega} \sqrt{2W(\varphi^\varepsilon)} \varphi_t^\varepsilon dx = 0 \quad (2.8)$$

を得る. 形式的には, $\varphi^\varepsilon \approx \pm 1$ と $k(\pm 1) = \pm \frac{2}{3}$ より, $k(\varphi^\varepsilon) \approx \frac{2}{3}\varphi^\varepsilon$ と見做せる為, (2.8) は (2.3) と同様に体積保存条件と考えることができる. さらに (2.8) より

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{\varepsilon |\nabla \varphi^\varepsilon|^2}{2} + \frac{W(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon} dx = \int_{\Omega} \left(\varepsilon \nabla \varphi^\varepsilon \cdot \nabla \varphi_t^\varepsilon + \frac{W'(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon} \varphi_t^\varepsilon \right) dx \\ & = \int_{\Omega} \varepsilon \left(-\Delta \varphi^\varepsilon + \frac{W'(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon^2} \right) \varphi_t^\varepsilon dx = \int_{\Omega} \varepsilon \left(-\varphi_t^\varepsilon + \lambda^\varepsilon \frac{\sqrt{2W(\varphi^\varepsilon)}}{\varepsilon} \right) \varphi_t^\varepsilon dx \\ & = - \int_{\Omega} \varepsilon (\varphi_t^\varepsilon)^2 dx + \lambda^\varepsilon \int_{\Omega} \varphi_t^\varepsilon \sqrt{2W(\varphi^\varepsilon)} dx = - \int_{\Omega} \varepsilon (\varphi_t^\varepsilon)^2 dx \end{aligned} \quad (2.9)$$

を得る. (2.9) は (2.4) と同様, 元の問題である体積保存平均曲率流の (1.3) に対応した等式である. (2.6) に対して, 体積保存条件として (2.3) ではなく (2.8) としている理由の 1 つは (2.9) を成立させる為であるといえる. また, (2.5) と同様に, 関数 φ^ε が $\tilde{F}(\varphi^\varepsilon) := \int_{\Omega} k(\varphi^\varepsilon) dx$ が定数という束縛条件化で E の極値を取るとき, $\delta \tilde{F} = \sqrt{2W}$ であるから, ある定数 λ^ε に対して

$$0 = \delta E - \lambda^\varepsilon \delta \tilde{F} = -((2.6) \text{ の右辺})$$

を得る. よって (2.6) は $\tilde{F} = (\text{定数})$ の束縛条件付きのエネルギー汎関数 E の勾配流と見做すことができる.

Takasao [17] は, (2.6) を用いて $d = 2, 3$ における (1.1) の弱解の時間大域存在を示した. 証明において, 次の評価が重要である.

Lemma 2.1 ([17]). $d \geq 2$ とする. 定数 $\omega, D > 0$ が存在して, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\mu_0^\varepsilon(\Omega) \leq D$ と $\left| \int_{\Omega} k(\varphi_0^\varepsilon) dx \right| \leq \frac{2}{3} - \omega$ を満たすと仮定する. このときある定数 $c_1 = c_1(d, \omega, D) > 0$ と $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(d, \omega, D) > 0$ が存在して任意の $0 \leq t_1 < t_2$ に対し

$$\sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)} \int_{t_1}^{t_2} |\lambda^\varepsilon(t)|^2 dt \leq c_1(1 + t_2 - t_1) \quad (2.10)$$

が成り立つ.

Remark 2.2. ある開集合 $U_0 \subset \Omega$ とその境界 $M_0 := \partial U_0$ に対して μ_0^ε が $\mathcal{H}^{d-1}|_{M_0}$ の近似であると仮定すると, Lemma 2.1 の仮定 $\mu_0^\varepsilon(\Omega) \leq D$ と $\left| \int_\Omega k(\varphi_0^\varepsilon) dx \right| \leq \frac{2}{3} - \omega$ は, それぞれ $\mathcal{H}^{d-1}(M_0) \leq D$ と $\|U_0\| - \|\Omega \setminus U_0\| \leq 1 - \frac{3}{2}\omega$ に対応している. 特に, $U_0 = \emptyset$ ならば, $|\Omega| = 1$ より $\|U_0\| - \|\Omega \setminus U_0\| = 1$ である.

Remark 2.3. Brakke 解及び後に述べる L^2 -flow 等の弱解の構成には, 平均曲率ベクトルの L^2 評価が必要である. (2.6) に関しては, Lemma 2.1 を用いることによりその評価を得ることが出来る. $M_t \approx \{x \in \Omega : \varphi^\varepsilon(x, t) = 0\}$ かつ h を M_t の平均曲率ベクトルとすると

$$\int_0^T \int_{M_t} |h|^2 d\mathcal{H}^{d-1} dt \approx \int_0^T \int_\Omega \varepsilon \left(\Delta \varphi^\varepsilon - \frac{W'(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon^2} \right)^2 dx dt$$

が成り立つ. (2.9) より任意の $t \geq 0$ に対し $\mu_t^\varepsilon(\Omega) \leq \mu_0^\varepsilon(\Omega) \leq D$, $\int_\Omega \frac{2W(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon} dx \leq 2\mu_t^\varepsilon(\Omega) \leq 2D$ であるから

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega \varepsilon \left(\Delta \varphi^\varepsilon - \frac{W'(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon^2} \right)^2 dx dt \\ & \leq \int_0^T \int_\Omega \varepsilon (\varphi_t^\varepsilon)^2 dx dt + \int_0^T \int_\Omega \varepsilon \left(\lambda^\varepsilon \frac{\sqrt{2W(\varphi^\varepsilon)}}{\varepsilon} \right)^2 dx dt \\ & \leq D + \int_0^T (\lambda^\varepsilon)^2 \int_\Omega \frac{2W(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon} dx dt \leq D + 2D \int_0^T (\lambda^\varepsilon)^2 dt \\ & \leq D(1 + 2c_1(1 + T)) \end{aligned} \tag{2.11}$$

を得る. よって $\int_0^T \int_{M_t} |h|^2 d\mathcal{H}^{d-1} dt$ は有界である. (2.2) に対しても Lemma 2.1 と同様に $\sup_\varepsilon \int_{t_1}^{t_2} |\lambda_1^\varepsilon(t)|^2 dt$ の有界性が知られているものの [2], (2.11) と同様の計算で平均曲率ベクトルの L^2 評価を得るには, さらに強い評価である $\sup_\varepsilon \varepsilon^{-1} \int_{t_1}^{t_2} |\lambda_1^\varepsilon(t)|^2 dt$ の有界性が必要であることがわかる.

3. 主結果

主結果は, [17] の結果を $d \geq 2$ に対し部分的に拡張したものである. 主結果を述べる前に, 弱解の定義と, そのためのいくつかの定義を紹介する.

Definition 3.1. $M \subset \mathbb{R}^d$ が k -rectifiable set (修正可能集合) であるとは, ある C^1 級 k -次元部分多様体 $\{M_i\}_{i=1}^\infty$ が存在して $\mathcal{H}^k(M \setminus \cup_{i=1}^\infty M_i) = 0$ が成り立つことである.

Remark 3.2. $M \subset \mathbb{R}^d$ が k -rectifiable set であるならば, $\mathcal{H}^k$ の測度の意味で殆ど至る所 approximate tangent plane (概接平面) が存在する.

ここで M が approximate tangent plane P を x_0 で持つとは,

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \int_{\eta_{x_0, \lambda}(M)} f(y) d\mathcal{H}^k(y) = \int_P f(y) d\mathcal{H}^k(y)$$

が任意の $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ について成り立つことである. ここで $\eta_{x_0, \lambda}(x) = \frac{1}{\lambda}(x - x_0)$ とした.

Definition 3.3. $(d-1)$ -rectifiable set M に対して, h が generalized mean curvature vector であるとは,

$$\int_M \operatorname{div}_M g d\mathcal{H}^{d-1} = - \int_M h \cdot g d\mathcal{H}^{d-1}$$

が任意の $g \in C_c^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ について成り立つことである. ここで $g = (g_1, \dots, g_d)$ とし, さらに $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d)$ を M の単位法線ベクトルとしたとき, $\operatorname{div}_M g = \sum_{k, l=1}^d \partial_{x_k} g_l (\delta_{kl} - \nu_k \nu_l)$ である.

Remark 3.4. もし M が滑らかで閉であれば, 多様体上の発散定理により h は通常の M の平均曲率ベクトルである. また, 修正可能集合の性質から, 概接平面は M 上殆ど至る所存在する.

Definition 3.5. Radon measure μ が k -rectifiable であるとは, ある k -次元修正可能集合 M と関数 $\theta : M \rightarrow [0, \infty)$ が存在して, $\theta \in L^1_{loc}(\mathcal{H}^k \llcorner M)$ かつ $\mu = \theta \mathcal{H}^k \llcorner M$ が成り立つことである. また, この θ を multiplicity と呼ぶ. さらに, $\theta(x) \in \mathbb{N}$ が $\mathcal{H}^k$ の意味で殆ど至る所の $x \in M$ について成り立つとき, μ は integral であると呼ぶ.

ここで扱う弱解を以下で定義する:

Definition 3.6 (L^2 -flow [13]). $\{\mu_t\}_{t \in (0, T)}$ を Ω 上の Radon 測度の族とする. 以下が満たされるとき, $\{\mu_t\}_{t \in (0, T)}$ を L^2 -flow であるという:

- (1) a.e. $t \in (0, T)$ に対し, μ_t は $(d-1)$ -rectifiable かつ generalized mean curvature vector $h \in L^2(\mu_t)$ をもつ.
- (2) ある定数 $C > 0$ と $v \in L^2(\mu_t \otimes \mathcal{L}^1, \mathbb{R}^d)$ が存在して

$$\begin{cases} v(x, t) \perp T_x \mu_t & \text{for } \mu_t \otimes \mathcal{L}^1\text{-a.e. } (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ \left| \int_0^T \int_{\Omega} (\eta_t + \nabla \eta \cdot v) d\mu_t dt \right| \leq C \|\eta\|_{C^0(\Omega \times (0, T))} & \text{for any } \eta \in C_c^1(\Omega \times (0, T)). \end{cases}$$

ここで $T_x \mu_t$ は μ_t の x に対する概接平面とした.

また, このベクトル値関数 v を generalized velocity vector と呼ぶ.

Remark 3.7. [13] で定義されている元の L^2 -flow では, μ_t が integral であることも定義に含まれている. 今回の主結果では, 得られた弱解が integral であることの証明が未解決である為, 定義からは除いている.

(2.6) の解 φ^ε に対して, Ω 上の Radon 測度 μ_t^ε を, 任意の $\phi \in C_c(\Omega)$ に対して

$$\mu_t^\varepsilon(\phi) := \frac{1}{\sigma} \int_{\Omega} \phi \left(\frac{\varepsilon |\nabla \varphi^\varepsilon(x, t)|^2}{2} + \frac{W(\varphi^\varepsilon(x, t))}{\varepsilon} \right) dx \quad (3.1)$$

で定義する. ここで $\sigma := \int_{-1}^1 \sqrt{2W(s)} ds$ とした. 形式的には, μ_t^ε は M_t から導出される Hausdorff 測度 $\mathcal{H}^{d-1} \llcorner M_t$ の近似と見做すことができる. 主結果は以下の通りである:

Theorem 3.8. $d \geq 2$ かつ $U_0 \subset \Omega$ を C^1 級の境界 M_0 を持つ開集合とする. このとき 0 に収束する正の点列 $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^\infty$ と関数の族 $\{\varphi_0^{\varepsilon_i}\}_{i=1}^\infty$ が存在して以下が成り立つ:

- (a) φ^{ε_i} を, 初期値 $\varphi_0^{\varepsilon_i}$ に対する (2.6) の解とする. このときある関数 $\psi \in BV_{loc}(\Omega \times [0, \infty)) \cap C^{\frac{1}{2}}_{loc}([0, \infty); L^1(\Omega))$ が存在して
 - (a1) $\psi(\cdot, 0) = \chi_{U_0}$ a.e. on Ω かつ $\varphi^{\varepsilon_i} \rightarrow 2\psi - 1$ in $L^1_{loc}(\Omega \times [0, \infty))$.
 - (a2) $\psi(\cdot, t)$ は任意の $t \in [0, \infty)$ に対し

$$\int_{\Omega} \psi(\cdot, t) dx = \mathcal{L}^d(U_0)$$

を満たす.

- (b) $(d-1)$ -rectifiable な Ω 上の Radon 測度の族 $\{\mu_t\}_{t \in [0, \infty)}$ が存在して, 任意の $t \in [0, \infty)$ に対し $\mu_t^{\varepsilon_i} \rightarrow \mu_t$ as Radon measures on Ω を満たす.
- (c) 関数 $\lambda \in L^2_{loc}(0, \infty)$ が存在して任意の $T > 0$ に対し

$$\lambda^{\varepsilon_i} \rightarrow \lambda \text{ weakly in } L^2(0, T)$$

を満たす.

(d) ベクトル値関数 $g \in L^2(\mu_t \otimes \mathcal{L}^1; \mathbb{R}^d)$ が存在して $\{\mu_t\}_{t \in (0, \infty)}$ は generalized velocity vector

$$v = h + g$$

を持つ L^2 -flow であり, v は任意の $\Phi \in C_c(\Omega \times [0, \infty); \mathbb{R}^d)$ に対し

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\{|\nabla \varphi^{\varepsilon_i}(\cdot, t)| \neq 0\} \times (0, \infty)} \frac{-\varphi_t^{\varepsilon_i}}{|\nabla \varphi^{\varepsilon_i}|} \frac{\nabla \varphi^{\varepsilon_i}}{|\nabla \varphi^{\varepsilon_i}|} \cdot \Phi d\mu_t^{\varepsilon_i} dt = \int_{\Omega \times (0, \infty)} v \cdot \Phi d\mu_t dt$$

を満たす. さらに $\{(x, t) : \psi(x, t) = 1\}$ の reduced boundary $\partial^* \{(x, t) : \psi(x, t) = 1\}$ 上の正値関数 θ が存在して

$$v = h - \frac{\lambda}{\theta} \nu \quad \mathcal{H}^n\text{-a.e. on } \partial^* \{\psi = 1\}$$

を満たす. ここで $\nu = \nu(x, t)$ は $\{x : \psi(x, t) = 1\}$ に対する $\partial^* \{x : \psi(x, t) = 1\}$ の内向き単位法線ベクトルとした.

(e) a.e. $t \in (0, \infty)$ に対し

$$\int_{\Omega} v \cdot \nu d\|\nabla \psi(\cdot, t)\| = 0$$

が成り立つ. ここで $\|\nabla \psi(\cdot, t)\|$ は $\nabla \psi(\cdot, t)$ の total variation measure である.

4. 単調性公式とその応用

μ_t^ε がある測度 μ_t に Radon 測度の意味で収束したと仮定する. このとき, μ_t が rectifiable であることを示すには, Ilmanen の単調性公式を用いた手法 [11] と, $d = 2, 3$ のみで成り立つ Röger と Schätzle のエネルギー評価を用いた次の手法 [15] が知られている.

Theorem 4.1 ([15]). $d = 2, 3$ とし, $U \subset \mathbb{R}^d$ を開集合とする. 関数 $\varphi^\varepsilon \in C^2(U)$ に対して $\mu^\varepsilon(\phi) := \frac{1}{\sigma} \int_U \phi \left(\frac{\varepsilon |\nabla \varphi^\varepsilon|^2}{2} + \frac{W(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon} \right) dx$ とする.

$$\sup_{\varepsilon > 0} \mu^\varepsilon(U) < \infty, \quad \sup_{\varepsilon > 0} \int_U \varepsilon \left(\Delta \varphi^\varepsilon - \frac{W'(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon^2} \right)^2 dx < \infty$$

かつ

$$\mu^\varepsilon \rightarrow \mu \quad \text{as Radon measures}$$

を仮定する. このとき μ は integral, 即ち μ は rectifiable かつ multiplicity は $\mathcal{H}^{d-1}$ 測度の意味で殆ど至る所 1 以上の整数値である. さらに μ の generalized mean curvature vector h と符号付き測度 $\xi^\varepsilon(\phi) := \frac{1}{\sigma} \int_U \phi \left(\frac{\varepsilon |\nabla \varphi^\varepsilon|^2}{2} - \frac{W(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon} \right) dx$ に対し

$$\int_U |h|^2 d\mu \leq \frac{1}{\sigma} \liminf_{\varepsilon > 0} \int_U \varepsilon \left(\Delta \varphi^\varepsilon - \frac{W'(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon^2} \right)^2 dx \quad \text{and} \quad |\xi^\varepsilon| \rightarrow 0$$

が成り立つ.

[17] では [15] の結果を用いた為に (1.1) の弱解の存在定理の仮定で $d = 2, 3$ が必要であったものの, 今回の主結果の証明では, 次に述べる単調性公式を用いて [11] と同様に任意の $d \geq 2$ に対して μ_t が rectifiable であることを示した.

$$\rho_{y,s}(x,t) := \frac{1}{(4\pi(s-t))^{\frac{d-1}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(s-t)}}, \quad t < s, \quad x, y \in \mathbb{R}^d$$

と定義する. また Ω 上の測度 μ_t^ε は $\mathbb{R}^d$ 上に周期的に拡張されたものとする.

Proposition 4.2 (単調性公式). φ^ε を Lemma 2.1 の仮定及び

$$|\varphi_0^\varepsilon| < 1, \quad \frac{\varepsilon|\nabla\varphi_0^\varepsilon|^2}{2} \leq \frac{W(\varphi_0^\varepsilon)}{\varepsilon} \quad \text{on } \Omega$$

を満たす (2.6) の解とする. このとき任意の $y \in \mathbb{R}^d$, $0 \leq t_1 < t_2 < s$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ に対し

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_{y,s}(x, t) d\mu_t^\varepsilon \Big|_{t=t_2} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \rho_{y,s}(x, t) d\mu_t^\varepsilon \Big|_{t=t_1} \exp\left(\frac{c_1}{2}(1+t_2-t_1)\right) \quad (4.1)$$

が成り立つ.

証明の概略. (2.6) と Cauchy-Schwarz inequality より, 任意の $t < s$ に対し

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \rho d\mu_t^\varepsilon \leq \frac{1}{2(s-t)} \int_{\mathbb{R}^d} \rho \left(\frac{\varepsilon|\nabla\varphi^\varepsilon|^2}{2} - \frac{W(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon} \right) dx + \frac{1}{2}(\lambda^\varepsilon)^2 \int_{\mathbb{R}^d} \rho d\mu_t^\varepsilon \quad (4.2)$$

が成り立つ. また, (2.6) と後に示す Lemma 4.3 より

$$\frac{\varepsilon|\nabla\varphi^\varepsilon|^2}{2} \leq \frac{W(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon} \quad \text{in } \mathbb{R}^d \times [0, \infty) \quad (4.3)$$

を得る [17]. よって (2.10), (4.2), (4.3), Gronwall's inequality より (4.1) が成り立つ. $\square$

Lemma 4.3. $u \in C^1((0, \infty))$ とし, 関数 $\varphi^\varepsilon \in C^2(\mathbb{R}^d \times (0, \infty)) \cap C(\mathbb{R}^d \times [0, \infty))$ は

$$\sup_{\mathbb{R}^d} |\varphi^\varepsilon(x, 0)| < 1, \quad \frac{\varepsilon|\nabla\varphi^\varepsilon|^2}{2} - \frac{W(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon} \Big|_{t=0} \leq 0 \quad \text{on } \mathbb{R}^d$$

を満たす, 方程式

$$\varepsilon\varphi_t^\varepsilon = \varepsilon\Delta\varphi^\varepsilon - \frac{W'(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon} + u\sqrt{2W(\varphi^\varepsilon)} \quad (4.4)$$

の解とする. このとき

$$\frac{\varepsilon|\nabla\varphi^\varepsilon|^2}{2} - \frac{W(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon} \leq 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^d \times [0, \infty) \quad (4.5)$$

が成り立つ.

証明の概略. $q^\varepsilon(r) := \tanh(r/\varepsilon)$ とする. 関数 $r : \mathbb{R}^d \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\varphi^\varepsilon(x, t) = q^\varepsilon(r(x, t))$$

で定義する. すると, $\frac{\varepsilon|q_r^\varepsilon|^2}{2} = \frac{W(q^\varepsilon)}{\varepsilon}$ より,

$$\frac{\varepsilon|\nabla\varphi^\varepsilon|^2/2}{W(\varphi^\varepsilon)/\varepsilon} \leq |\nabla r|^2 \quad \text{on } \mathbb{R}^d \times [0, \infty)$$

を得る. もし $|\nabla r| \leq 1$ であれば $\frac{\varepsilon|\nabla\varphi^\varepsilon|^2/2}{W(\varphi^\varepsilon)/\varepsilon} \leq 1$ より (4.5) を得る. よって $|\nabla r| \leq 1$ on $\mathbb{R}^d \times [0, \infty)$ を示せば十分である.

$g(q) := k'(q) = \sqrt{2W(q)}$ とおく. q^ε の性質から

$$q_r^\varepsilon = \frac{g(q^\varepsilon)}{\varepsilon}, \quad q_{rr}^\varepsilon = \frac{(g(q^\varepsilon))_r}{\varepsilon} = \frac{g_q(q^\varepsilon)}{\varepsilon} q_r^\varepsilon \quad (4.6)$$

が成り立つ. (4.4) と (4.6) より

$$\begin{aligned} q_r^\varepsilon r_t &= q_r^\varepsilon \Delta r + q_{rr}^\varepsilon |\nabla r|^2 - q_{rr}^\varepsilon + u q_r^\varepsilon \\ &= q_r^\varepsilon \Delta r + q_r^\varepsilon \frac{g_q}{\varepsilon} (|\nabla r|^2 - 1) + u q_r^\varepsilon. \end{aligned}$$

よって

$$r_t = \Delta r + \frac{g_q}{\varepsilon} (|\nabla r|^2 - 1) + u$$

と

$$\partial_t |\nabla r|^2 = \Delta |\nabla r|^2 - 2|\nabla^2 r|^2 + \frac{2}{\varepsilon} \nabla r \cdot \nabla g_q (|\nabla r|^2 - 1) + \frac{2g_q}{\varepsilon} \nabla r \cdot \nabla |\nabla r|^2 \quad (4.7)$$

を得る. ここで $\nabla u = 0$ であることを使った. 仮定より $|\nabla r(\cdot, 0)| \leq 1$ on $\mathbb{R}^d$ であるから, (4.7) に対して最大値原理を用いて $|\nabla r| \leq 1$ in $\mathbb{R}^d \times [0, \infty)$ を得る. $\square$

Remark 4.4. 方程式 (2.2) に関しては, 同様の議論で (4.5) を得ることは出来ない. (4.5) は重要な評価であり, これが成り立たない場合, 単調性公式の評価が悪くなる為, 弱解の存在等に関する証明の議論は複雑となる [18].

単調性公式を用いて, 任意の $d \geq 2$ に対する以下の結果を得た.

Proposition 4.5. Lemma 2.1, Proposition 4.2 の仮定の下で, さらに任意の $t \geq 0$ に対し μ_t^ε がある Radon 測度 μ_t に Radon 測度の意味で収束すると仮定する. このとき, a.e. $t \geq 0$ に対し,

$$\frac{\varepsilon |\nabla \varphi^\varepsilon|^2}{2} - \frac{W(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon} \rightarrow 0 \quad \text{in } L^1(\Omega) \quad (4.8)$$

かつ μ_t は rectifiable である.

Remark 4.6. (4.8) は, ディリクレエネルギーとポテンシャルエネルギーの釣り合いを表し, フェイズフィールド法による弱解の構成で重要な評価の 1 つである. また, $d\xi_t^\varepsilon := \left(\frac{\varepsilon |\nabla \varphi^\varepsilon|^2}{2} - \frac{W(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon} \right) dx$ で定義される符号付き測度 ξ_t^ε は discrepancy measure と呼ばれる. また μ_t が rectifiable であることの証明には, (4.8) 及び Allard の rectifiability theorem [1] を用いる [11].

REFERENCES

- [1] Allard, W., *On the first variation of a varifold*, Ann. of Math. (2) **95** (1972), 417–491.
- [2] Bronsard, L. and Stoth, B., *Volume-preserving mean curvature flow as a limit of a nonlocal Ginzburg-Landau equation*, SIAM J. Math. Anal., **28** (1997), 769–807.
- [3] Brakke, K. A., *The motion of a surface by its mean curvature*, Princeton University Press, Princeton, N.J., (1978).
- [4] Brassel, M. and Bretin, E., *A modified phase field approximation for mean curvature flow with conservation of the volume*, Math. Methods Appl. Sci., **34** (2011), 1157–1180.
- [5] Chen, X., Hilhorst, D. and Logak, E., *Mass conserving Allen-Cahn equation and volume preserving mean curvature flow*, Interfaces Free Bound., **12** (2010), 527–549.
- [6] Escher, J. and Simonett, G., *The volume preserving mean curvature flow near spheres*, Proc. Amer. Math. Soc., **126** (1998), 2789–2796.
- [7] Evans, L. C. and Soner, H. M. and Souganidis, P. E., *Phase transitions and generalized motion by mean curvature*, Comm. Pure Appl. Math., **45** (1992), 1097–1123.
- [8] Gage, M., *On an area-preserving evolution equation for plane curves*, Nonlinear problems in geometry (Mobile, Ala., 1985), Contemp. Math., **51** (1986), 51–62.
- [9] Golovaty, D., *The volume-preserving motion by mean curvature as an asymptotic limit of reaction-diffusion equations*, Quart. Appl. Math., **55** (1997), 243–298.
- [10] Huisken, G., *The volume preserving mean curvature flow*, J. Reine Angew. Math., **382** (1987), 35–48.
- [11] Ilmanen, T., *Convergence of the Allen-Cahn equation to Brakke’s motion by mean curvature*, J. Differential Geom., **38** (1993), 417–461.
- [12] Kasai, K. and Tonegawa, Y., *A general regularity theory for weak mean curvature flow*, Calc. Var. Partial Differential Equations, **50** (2014), 1–68.
- [13] Mugnai, L. and Röger, M., *The Allen-Cahn action functional in higher dimensions*, Interfaces Free Bound., **10** (2008), 45–78.

- [14] Mugnai, L., Seis, C. and Spadaro, E., *Global solutions to the volume-preserving mean-curvature flow*, Calc. Var. Partial Differential Equations, **55** (2016), 55:18.
- [15] Röger, M. and Schätzle, R., *On a modified conjecture of De Giorgi*, Math. Z., **254** (2006), 675–714.
- [16] Rubinstein, J. and Sternberg, P., *Nonlocal reaction-diffusion equations and nucleation*, IMA Journal of Applied Mathematics, **48** (1992), 249–264.
- [17] Takasao, K., *Existence of weak solution for volume preserving mean curvature flow via phase field method*, to appear in Indiana University Mathematics Journal.
- [18] Takasao, K. and Tonegawa, Y., *Existence and regularity of mean curvature flow with transport term in higher dimensions*, Math. Ann., **364** (2016), 857–935.

E-mail address: takasao@ms.u-tokyo.ac.jp