数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の場合を考えよう．$\boldsymbol{e}_i^o := (0,\dots,0,\overset{i}{1},0,\dots,0)$ $(i=1,\dots,n)$ とする．ここで，$\overset{i}{1}$ は i 成分が1であることを意味する．このとき，

$$\mathcal{O}(V) = \{[(\boldsymbol{e}_1^o, \boldsymbol{e}_2^o, \dots, \boldsymbol{e}_n^o)],\ [(-\boldsymbol{e}_1^o, \boldsymbol{e}_2^o, \dots, \boldsymbol{e}_n^o)]\}$$

となるが，$[(\boldsymbol{e}_1^o, \boldsymbol{e}_2^o, \dots, \boldsymbol{e}_n^o)]$ を $\mathbb{R}^n$ の**正の向き** (**positive orientation**)，$[(-\boldsymbol{e}_1^o, \boldsymbol{e}_2^o, \dots, \boldsymbol{e}_n^o)]$ を $\mathbb{R}^n$ の**負の向き** (**negative orientation**) という．$n=2$ のとき，$[(\boldsymbol{e}_1^o, \boldsymbol{e}_2^o)]$ は**反時計回り** (**anticlockwise rotation**) とよばれ，$[(-\boldsymbol{e}_1^o, \boldsymbol{e}_2^o)]$ は**時計回り** (**clockwise rotation**) とよばれる．$n=3$ のとき，$[(\boldsymbol{e}_1^o, \boldsymbol{e}_2^o, \boldsymbol{e}_3^o)]$ は**右手系** (**right-handed system**) とよばれ，$[(-\boldsymbol{e}_1^o, \boldsymbol{e}_2^o, \boldsymbol{e}_3^o)]$ は**左手系** (**left-handed system**) とよばれる．

問 1.2.2　$(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n)$ を $\mathbb{R}^n$ の基底とし，$\boldsymbol{e}_i = (e_{i1},\dots,e_{in})$ $(i=1,\dots,n)$ とする．このとき，$\det(e_{ij}) > 0$ ならば，$[(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n)]$ は $\mathbb{R}^n$ の正の向きであることを示せ．

外積について，次の事実が成り立つ．

命題 1.2.3　V のベクトル $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_{n-1}$ が1次独立系であるとき，次の事実が成り立つ．

(i)　$\boldsymbol{v}_i \cdot (\boldsymbol{v}_1 \times \dots \times \boldsymbol{v}_{n-1}) = 0$　$(i=1,\dots,n-1)$ である；

(ii)　$[(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_{n-1},\boldsymbol{v}_1 \times \dots \times \boldsymbol{v}_{n-1})]$ は $\mathbb{R}^n$ の正の向きである；

(iii)　$\|\boldsymbol{v}_1 \times \dots \times \boldsymbol{v}_{n-1}\|$ は，$\mathrm{Span}\{\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_{n-1}\}$ $(=\mathbb{R}^{n-1})$ の領域

$$D = \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \boldsymbol{v}_i \ \middle|\ 0 \le \alpha_i \le 1 \quad (i=1,\dots,n-1) \right\}$$

の $(n-1)$ 次元体積（つまり，$(n-1)$ 重積分 $\displaystyle\int \cdots \int_D 1\,dx_1 \cdots dx_{n-1}$）に等しい．

証明　$\boldsymbol{v}_i = (v_{i1},\dots,v_{in})$ $(i=1,\dots,n)$ とする．(i) の主張は，命題 1.2.2 を用いて次のように示される：

$$\boldsymbol{v}_i \cdot (\boldsymbol{v}_1 \times \dots \times \boldsymbol{v}_{n-1}) = |\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_i, \dots, \boldsymbol{v}_{n-1}|$$

$$= \begin{vmatrix} v_{i1} & \cdots & v_{in} \\ v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ v_{i1} & \cdots & v_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ v_{n-1,1} & \cdots & v_{n-1,n} \end{vmatrix} = 0.$$

次に，(ii) の主張を示そう．$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ v_{n-1,1} & \cdots & v_{n-1,n} \end{pmatrix}$ とする．このとき，$\boldsymbol{v}_1 \times \dots \times \boldsymbol{v}_{n-1} = (A_{11},\dots,A_{1n})$ となり，一方，行列式の展開を用いて，

$$\begin{vmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n-1,1} & \cdots & v_{n-1,n} \\ A_{11} & \cdots & A_{1n} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} A_{1j}^2 > 0$$

が示される．それゆえ，問 1.2.2 から，$(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_{n-1},\boldsymbol{v}_1 \times \dots \times \boldsymbol{v}_{n-1})$ が $\mathbb{R}^n$ の正の向きであることがわかる．(iii) の証明は長い計算を要するので，省く．

□

命題 1.2.3 によれば，$\mathbb{R}^3$ の1次独立なベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ の外積 $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$ は図 1.2.1 のようになる．

スカラー n 重積について，次の事実が成り立つ．

命題 1.2.4　$(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n)$ を V の基底とし，$\mathbb{R}^n$ の領域 D を

$$D = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{e}_i \ \middle|\ 0 \le \alpha_i \le 1 \quad (i=1,\dots,n) \right\}$$