

# 無限次元線形空間へのリフトを利用した 平均曲率流の研究について

小池 直之

東京理科大学理学部数学科

koike@ma.kagu.tus.ac.jp

**Geometric flows and related problems**

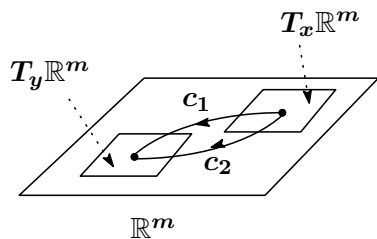
**2016年3月4日**

## 目次

1. モチベーション
2. 平均曲率流の研究方法
- 3 **Hamilton** の定理
4. ゲージ軌道の部分多様体幾何的研究
5. リーマン orbifold における平均曲率流
6. ヒルベルト空間における正則化された平均曲率流
7. 幾何学量の発展
8. **Hamilton** 型最大値の原理
9. 水平強凸性保存性定理
10. 今後の研究計画

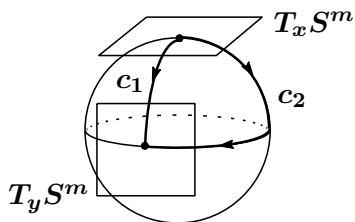
モチベーション

## モチベーション



$$\tau_{c_1} = \tau_{c_2}$$

$$T_x\mathbb{R}^m = T_y\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$$

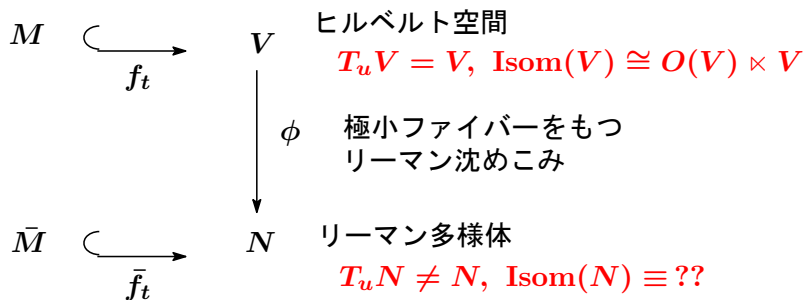


$$\tau_{c_1} \neq \tau_{c_2}$$

$$S^m \neq T_xS^m \neq T_yS^m \neq S^m$$

## モチベーション

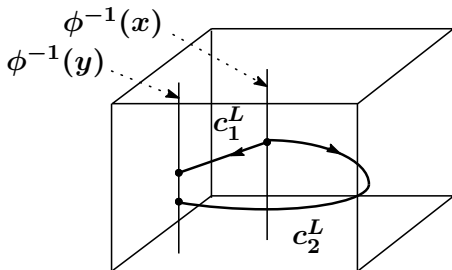
$\bar{f}_t : \bar{M} \hookrightarrow N$  ( $0 \leq t < T$ ) : 平均曲率流



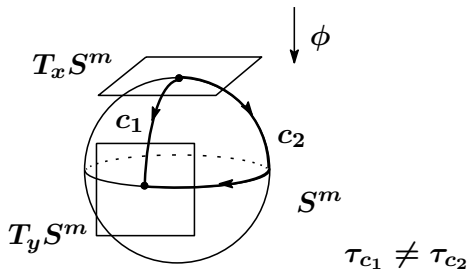
$$f_t(M) = \phi^{-1}(\bar{f}_t(\bar{M}))$$

$f_t : M \hookrightarrow V$  ( $0 \leq t < T$ ) は正則化された平均曲率流になる.

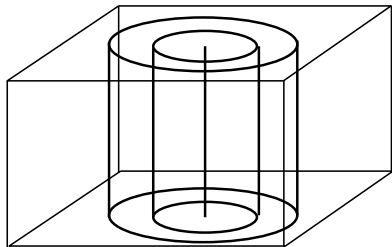
## モチベーション



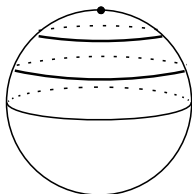
$V$  (ヒルベルト空間)



# モチベーション



$V$  (ヒルベルト空間)



$S^m$

## 2. 平均曲率流の研究手法



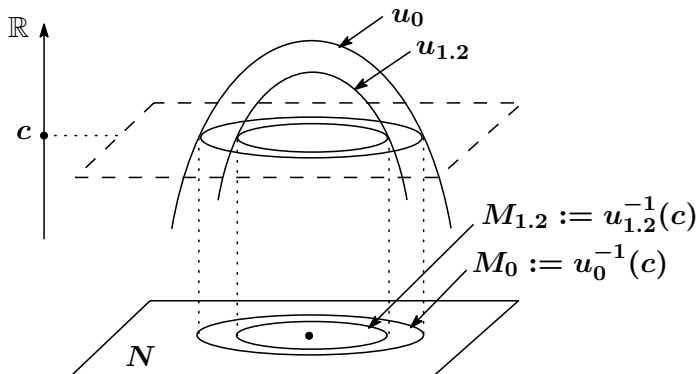
## 平均曲率流の研究手法

$$M_t \subset (N, \tilde{g})$$

平均曲率流のいくつかの研究手法

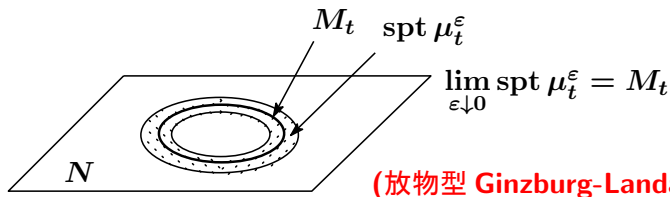
- レベルセット法による研究  
( $N$  上の関数の発展として取り扱う研究)  
利点 位相変化が許される. 弱点 曲率を精密に定義できない.
- 幾何的測度論に基づいた研究  
( $N$  上のグラスマン束上の測度の発展として取り扱う研究)  
利点 位相変化が許される. 弱点 曲率を精密に定義できない.
- $C^\infty$  級はめ込みの発展として取り扱う研究  
( $N$  への  $C^\infty$  級はめ込みの  $C^\infty$  族の発展)  
利点 曲率が精密に定義できる. 弱点 位相変化が許されない.

## 平均曲率流の研究手法



$$\frac{\partial u}{\partial t} = \|\text{grad } u_t\| \cdot \text{div} \left( \frac{\text{grad } u_t}{\|\text{grad } u_t\|} \right)$$

## 平均曲率流の研究手法

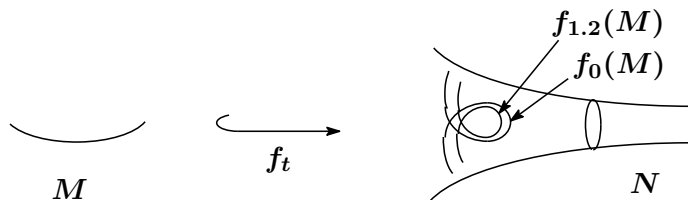


$u_t^\varepsilon$  ( $0 \leq t < \infty$ ) :  $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u_t - \frac{1}{\varepsilon^2} u_t(1 - |u_t|^2)$  の解

$$\mu_t^\varepsilon := \frac{1}{\ln(1/\varepsilon)} \left( \frac{1}{2} \|\text{grad } u_t^\varepsilon\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2} (1 - |u_t^\varepsilon|^2)^2 \right) dV_N \quad (t \in [0, \infty))$$

- $\exists \{\varepsilon_i\}_{i=1}^\infty$  s.t.  $\lim_{i \rightarrow \infty} \varepsilon_i = 0$  &  $\exists \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_t^{\varepsilon_i}$
- $\{\mu_t\}_{t \in [0, \infty)}$  ( $\mu_t := \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_t^{\varepsilon_i}$ ) は Brakke flow になる.
- $\{M_t := \text{spt } \mu_t\}_{t \in [0, T)}$  は余次元 2 の平均曲率流になる.
- $\text{spt } \mu_t^\varepsilon$  は  $M_t$  上のディスクバンドル構造をもつ.

## 平均曲率流の研究方法



$N = \mathbb{R}^{n+r}$  のとき,  $f_t$  をグラフ写像  $f_t^G : M \rightarrow M \times \mathbb{R}^{n+r}$  と同一視することにより, 自明なベクトル束  $M \times \mathbb{R}^{n+r} \rightarrow M$  の切断とみなすことにより,  $\{f_t\}$  をベクトル束の切断の発展とみなすことができる.

### 3. Hamilton の定理

## Hamilton の定理

$C^\infty$  級はめ込みの発展としての平均曲率流方程式と  
リッチ流方程式は、共に、ベクトルバンドルの切断に対する  
**R.S. Hamilton** の意味の弱放物型非線形偏微分方程式  
のクラスに属する。それゆえ、**Hamilton** の定理により、  
任意の滑らかな初期データに対する短時間における解の  
存在性と一意性が示される。

## Hamilton の定理

$M$  :  $n$  次元コンパクト多様体

$V$  :  $M$  上の  $C^\infty$  ベクトルバンドル

$\Gamma(V)$  :  $V$  の  $C^\infty$  切断全体のなす空間

$E$  :  $V$  から  $V$  への階数 2 の微分作用素

$DE_f$  :  $E$  の  $f (\in \Gamma(V))$  における線形化

$\sigma(DE_f)$  :  $DE_f$  の表象

$f_t (0 \leq t < T)$  :  $V$  の  $C^\infty$  切断の  $C^\infty$  族

$$F : M \times [0, T) \rightarrow V$$

$$\underset{\text{def}}{\iff} F(x, t) := f_t(x) \quad ((x, t) \in M \times [0, T))$$

## Hamilton の定理

$$(*) \quad \frac{\partial f_t}{\partial t} = E(f_t)$$

任意の  $f \in \Gamma(V)$  と任意の  $\xi (\neq 0) \in \mathbb{R}^n$  に対し,  
 $\sigma(DE_f)(\xi)_x$  ( $\forall x \in M$ ) のすべての固有値の実部が  
正であるとき, PDE(\*) は**放物型**であるとよばれる.

(注)  $\sigma(DE_f)(\xi)_x$  のすべての固有値の実部が正であるとは,  
 $\sigma(DE_f)(\xi)_x$  ( $: V_x \rightarrow V_x$ ) の対称パートが正定値である  
ことを意味する.



## Hamilton の定理

$E$  が下記の条件を満たす写像

$$L : U \times \Gamma(V) \rightarrow \Gamma(W)$$

$$\left( \begin{array}{l} U : \Gamma(V) \text{ の } 0 \text{ 切断を含む開集合} \\ W : M \text{ 上のある } C^\infty \text{ ベクトルバンドル} \end{array} \right)$$

を許容するとする :

- 各  $f \in U$  に対し,  $L(f, \cdot)$  は 1 階の微分作用素である
- $Q : f \mapsto L(f, E(f))$  ( $f \in U$ ) は 1 階の微分作用素になる
- 各  $f \in U$  と各  $\xi (\neq 0) \in \mathbb{R}^n$  に対し,  
 $\sigma(DE_f)(\xi) |_{N(\sigma(L(f))(\xi))}$  のすべての固有値の実部が  
 正である ( $N(\cdot) : (\cdot)$  の零化空間)

## Hamilton の定理

このとき, PDE

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = E(f_t)$$

は, 弱放物型 (**weakly parabolic**) とよばれる.

(注) 平均曲率流方程式

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = H(f_t)$$

および, リッチ流方程式

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = -2\text{Ric}(f_t)$$

は, 弱放物型である.

## Hamilton の定理

## 定理 3.1(Hamilton).

各  $\phi \in \Gamma(V)$  に対し, 弱放物型偏微分方程式

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = E(f_t)$$

の解  $f$  で初期条件  $f_0 = \phi$  を満たすものは,  
短時間において一意に存在する.

## 4. ゲージ軌道の部分多様体幾何的研究

## ゲージ軌道の部分多様体幾何的研究

$M$  :  $n$  次元コンパクトリーマン多様体

$G$  : コンパクトリー群

$\pi : P \rightarrow M$  :  $M$  上の  $G$  バンドル

$\mathcal{C}(P)$  :  $P$  の  $H^0$  接続のなす空間  
(リーマンヒルベルト多様体)

$\mathcal{FC}(P)$  :  $P$  の平坦な  $H^0$  接続のなす空間  
(リーマンヒルベルト多様体)

$\mathcal{G}(= H^1(M, G))$  :  $P$  の  $H^1$  ゲージ変換群

$\phi : \mathcal{C}(P) \rightarrow \mathcal{C}(P)/\mathcal{G}$  : 軌道写像

## ゲージ軌道の部分多様体幾何的研究

リーマンヒルベルト多様体

$$\mathcal{FC}(P) \subset$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \phi|_{\mathcal{FC}(P)} \end{array}$$

$$\mathcal{FC}(P)/\mathcal{G} \subset$$

有限次元の層分割をもつ空間

リーマンヒルベルト多様体

$$\mathcal{C}(P)$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \phi \end{array}$$

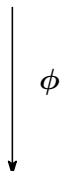
$$\mathcal{C}(P)/\mathcal{G}$$

無限次元の層分割をもつ空間

## ゲージ軌道の部分多様体幾何的研究

ゲージ軌道 (=ファイバー)      リーマンヒルベルト多様体

$$\mathcal{G} \cdot \omega \subset \mathcal{C}(P)$$



$$\mathcal{C}(P)/\mathcal{G}$$

$$\dim(\mathcal{G} \cdot \omega) = \infty, \quad \text{codim}(\mathcal{G} \cdot \omega) = \infty$$

## ゲージ軌道の部分多様体幾何的研究

ゲージ軌道 (=ファイバー)      リーマンヒルベルト多様体

$$\mathcal{G} \cdot \omega \subset \mathcal{FC}(P)$$

$\phi$

$$\mathcal{FC}(P)/\mathcal{G}$$

$$\dim(\mathcal{G} \cdot \omega) = \infty, \quad \text{codim}(\mathcal{G} \cdot \omega) < \infty$$



## ゲージ軌道の部分多様体幾何的研究

## 事実 4.1 (Maeda-Rosenberg-Tondeur).

- $G$  がアーベル群のとき, 任意の  $\omega \in \mathcal{C}(P)$  に対して,  $\mathcal{G} \cdot \omega$  は全測地的部分多様体になる.
- 任意の  $\omega \in \mathcal{FC}(P)$  に対して,  $\mathcal{G} \cdot \omega$  は, 正則化された平均曲率ベクトル場をもつ.
- $\dim M = 2$  or odd のとき, 任意の  $\omega \in \mathcal{C}(P)$  に対して,  $\mathcal{G} \cdot \omega$  は正則化された平均曲率ベクトル場をもつ.
- $\dim M = 4$  のとき,  
     $\mathcal{G} \cdot \omega$  が正則化された平均曲率ベクトル場をもつ  
     $\iff \omega$  が Yang-Mills 接続である

## ゲージ軌道の部分多様体幾何的研究

## 事実 4.2.

$M = [0, 1]$ ,  $P = [0, 1] \times G$  (自明な  $G$  バンドル) のとき,  
次が成り立つ:

- $\mathcal{C}(P) = \mathcal{FC}(P) = H^0([0, 1], \mathfrak{g})$ ,  $\mathcal{G} = H^1([0, 1], G)$   
( $\mathfrak{g} = \text{Lie } G$ )
- $\mathcal{C}(P)/\mathcal{G}$  は 1 点集合になる.

## ゲージ軌道の部分多様体幾何的研究

$(G, K)$  : コンパクト対称対

$P(G, \{e\} \times K)$

$:= \{g \in H^1([0, 1], G) \mid (g(0), g(1)) \in \{e\} \times K\}$

とおく.

## 事実 4.3.

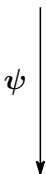
- $H^0([0, 1], \mathfrak{g})/P(G, \{e\} \times K) = G/K$  となり, 軌道写像  $\psi : H^0([0, 1], \mathfrak{g}) \rightarrow H^0([0, 1], \mathfrak{g})/P(\{e\} \times K) = G/K$  の各ファイバーは, 極小な正則化可能固有フレッドホルム部分多様体になる.
- $G/K$  に誘導される計量の下,  $G/K$  はリーマン対称空間になる (この計量は非負曲率をもつ).

## ゲージ軌道の部分多様体幾何的研究

ヒルベルト空間

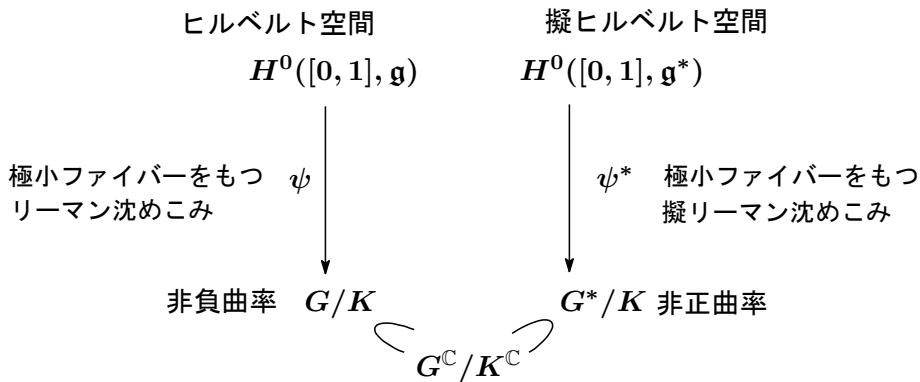
$$H^0([0, 1], \mathfrak{g})$$

極小ファイバーをもつ  
リーマン沈めこみ

非負曲率  $G/K$  $G^*/K$  非正曲率

$$G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$$

## ゲージ軌道の部分多様体幾何的研究



## ゲージ軌道の部分多様体幾何的研究

$\phi$  : ヒルベルト空間  $V$  からリーマン多様体  $N$  への  
極小ファイバーをもつリーマン沈めこみ

$\bar{M}$  : コンパクト多様体

$\bar{f}_t : M \hookrightarrow N$  ( $0 \leq t < T$ ) : 平均曲率流

## ゲージ軌道の部分多様体幾何的研究

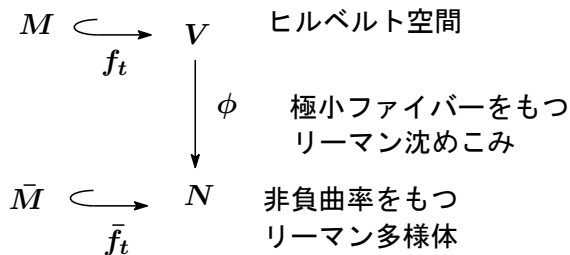
$$M := \bigcup_{x \in \bar{M}} (\{x\} \times \phi^{-1}(f_0(x)))$$

$$f_t : M \hookrightarrow V \quad (t \in [0, T))$$

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} f_t(x, u) := (c_x)_u^L(t) \quad ((x, u) \in M)$$

$$\left( \begin{array}{c} c_x \stackrel{\text{def}}{\iff} c_x(t) := \bar{f}_t(x) \\ (c_x)_u^L : c_x \text{ の } u \text{ を発する水平リフト} \end{array} \right)$$

## ゲージ軌道の部分多様体幾何的研究

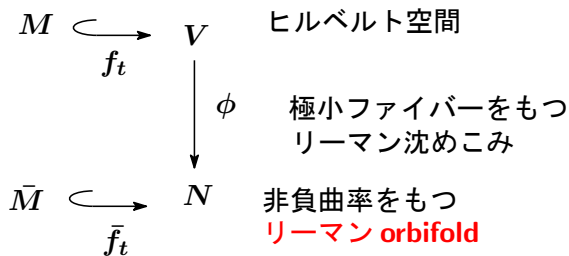


$$\phi^{-1}(\bar{f}_t(\bar{M})) = f_t(M)$$

$\{\bar{f}_t\}_{t \in [0, T]}$  : 平均曲率流  $\iff$   $\{f_t\}_{t \in [0, T]}$  : 正則化された平均曲率流



## ゲージ軌道の部分多様体幾何的研究



$$\phi^{-1}(\bar{f}_t(\bar{M})) = f_t(M)$$

$\{\bar{f}_t\}_{t \in [0, T]}$  : 平均曲率流  $\iff$   $\{f_t\}_{t \in [0, T]}$  : 正則化された平均曲率流

## 5. リーマン orbifold における平均曲率流

## リーマン orbifold における平均曲率流

$\bar{M}$  :  $n$  次元コンパクト orbifold

$(N, \tilde{g})$  :  $(n + r)$  次元リーマン orbifold

$\bar{f}_t : M \hookrightarrow N$  ( $0 \leq t < T$ ) :  $C^\infty$  はめ込みの  $C^\infty$  族

$$\bar{F} : \bar{M} \times [0, T) \rightarrow N$$

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \bar{F}(x, t) := \bar{f}_t(x) \quad ((x, t) \in \bar{M} \times [0, T))$$

$\bar{H}_t$  :  $\bar{f}_t$  の平均曲率ベクトル場

## リーマン orbifold における平均曲率流

## 定義

$$\begin{aligned} \bar{f}_t \quad (0 \leq t < T) : \text{平均曲率流} \\ \iff_{\text{def}} \frac{\partial \bar{F}}{\partial t} = \bar{H}_t \quad (0 \leq t < T) \end{aligned}$$

(注)  $(N, \tilde{g}) = \mathbb{R}^{n+r}$  のとき,  $\bar{H}_t = \bar{\Delta}_t \bar{f}_t$  となる.

(  $\bar{\Delta}_t : \tilde{g}$  から  $\bar{f}_t$  によって誘導されるオービ計量  $\bar{g}_t$  のリーマン接続  $\bar{\nabla}^t$  に関するラプラス作用素 )

## リーマン orbifold における平均曲率流

### 事実 5.1.

任意の  $\bar{M}$  から  $N$  への  $C^\infty$  級はめ込み  $\varphi$  に対して,  
 $\varphi$  を初期データとする平均曲率流が短時間において  
存在する.

## 6. ヒルベルト空間における正則化された 平均曲率流

## ヒルベルト空間における正則化された平均曲率流

$V$  : (可分な) ヒルベルト空間

$M$  : ヒルベルト多様体

## 定義 (C.L. Terng)

$f : M \hookrightarrow V$  : 固有フレッドホルム

$\Leftrightarrow_{\text{def}} \left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{codim } M < \infty, \\ \bullet \exp^\perp|_{B^{\perp_1}(M)} : \text{固有写像} \\ \bullet \exp_{*v}^\perp : \text{フレッドホルム作用素 } (\forall v \in T^\perp M) \end{array} \right.$

## ヒルベルト空間における正則化された平均曲率流

$A_v$  :  $f$  の  $v(\in T^\perp M)$  に対する形作用素

事実 6.1.

$A_v$  はコンパクト作用素



## ヒルベルト空間における正則化された平均曲率流

 $f : M \hookrightarrow V$  : 固有フレッドホルム

**定義 (Heintze-Liu-Olmos)**
 $f : M \hookrightarrow V$  : **正則化可能**  $\iff$   
def

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall v \in T^\perp M, \\ \exists \text{Tr}_r A_v (< \infty), \quad \exists \text{Tr}(A_v^2) (< \infty) \\ \left( \begin{array}{l} \text{Tr}_r A_v := \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i + \mu_i) \\ (\text{Spec } A_v = \{\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq 0 \leq \dots \leq \lambda_2 \leq \lambda_1\}) \\ \text{Tr}(A_v^2) := \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i \\ (\text{Spec } A_v^2 = \{\nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots > 0\}) \end{array} \right) \end{array} \right.$$

## ヒルベルト空間における正則化された平均曲率流

## 定義

$$H \stackrel{\text{def}}{\iff} \langle H, v \rangle = \text{Tr}_r A_v \quad (\forall v \in T^\perp M)$$

この法ベクトル場  $H$  は,  $f$  の正則化された平均曲率ベクトル場とよばれる.

$$\Delta_r f \stackrel{\text{def}}{\iff} \langle \Delta_r f, v \rangle = \text{Tr}_r \langle (\nabla df)(\cdot, \cdot), v \rangle^\sharp$$

$$(\forall v \in T^\perp M)$$

(  $\nabla$  :  $f$  によって誘導される  $M$  上のリーマン計量のリーマン接続 )

このとき,  $H = \Delta_r f$  が成り立つ.

## ヒルベルト空間における正則化された平均曲率流

$f_t : M \hookrightarrow V$  ( $0 \leq t < T$ ) : 正則化可能固有フレッドホルム  
 $C^\infty$  はめ込みの  $C^\infty$  族

$$F : M \times [0, T) \rightarrow V$$

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} F(x, t) := f_t(x) \quad ((x, t) \in M \times [0, T))$$

$H_t$  :  $f_t$  の正則化された平均曲率ベクトル場

## ヒルベルト空間における正則化された平均曲率流

## 定義

$$f_t \ (0 \leq t < T) : \text{正則化された平均曲率流}$$
$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \frac{\partial F}{\partial t} = H_t (= (\Delta_t)_r f_t) \ (0 \leq t < T)$$

## 7. 幾何学量の発展

## 幾何学量の発展

$V$  : ヒルベルト空間

$(N, \tilde{g})$  :  $(n + 1)$  次元次元リーマン orbifold

$\phi : V \rightarrow N$  : 極小ファイバーをもつリーマン沈め込み

$\bar{M}$  :  $n$  次元コンパクト orbifold

$\bar{f} : \bar{M} \hookrightarrow N$  :  $C^\infty$  はめ込み

$\{\bar{f}_t\}_{t \in [0, T)}$  :  $\bar{f}$  を発する平均曲率流

## 幾何学量の発展

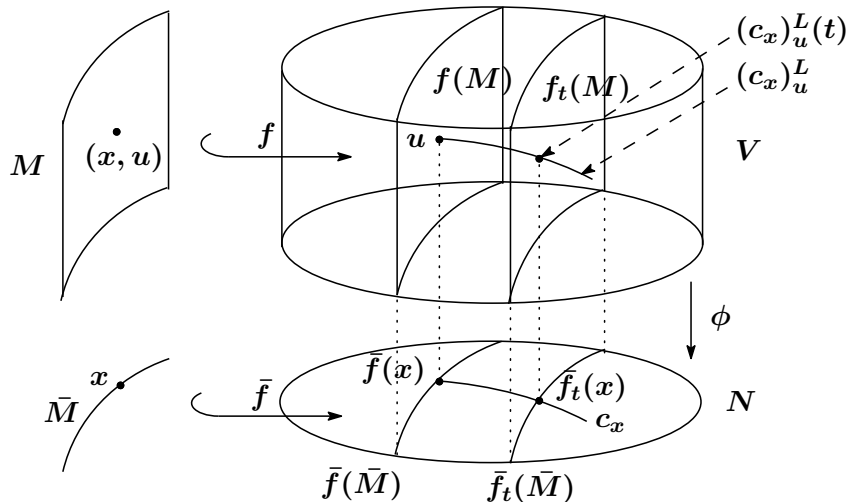
$$M := \bigcup_{x \in \bar{M}} (\{x\} \times \phi^{-1}(\bar{f}(x)))$$

$$f_t : M \hookrightarrow V \quad (t \in [0, T))$$

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} f_t(x, u) := (c_x)_u^L(t) \quad ((x, u) \in M)$$

$$\left( \begin{array}{c} c_x \stackrel{\text{def}}{\iff} c_x(t) := \bar{f}_t(x) \\ (c_x)_u^L : c_x \text{ の } u \text{ を発する水平リフト} \end{array} \right)$$

## 幾何学量の発展





## 幾何学量の発展

- $f_t(M) = \phi^{-1}(\bar{f}_t(\bar{M}))$  となる.
- $\{f_t\}_{t \in [0, T)}$  は正則化された平均曲率流になる.

## 幾何学量の発展

$A_t$  :  $f_t$  の形作用素

$h_t$  :  $f_t$  の第 2 基本形式

$H_t$  :  $f_t$  の正則化された平均曲率ベクトル場

$\pi_M$  :  $M \times [0, T)$  から  $M$  への自然な射影

## 幾何学量の発展

$g$  :  $g_t$  達から得られる誘導バンドル  $\pi_M^*(T^{(0,2)}M)$  の切断

$A$  :  $A_t$  達から得られる誘導バンドル  $\pi_M^*(T^{(1,1)}M)$  の切断

$h$  :  $h_t$  達から得られる誘導バンドル  $\pi_M^*(T^{(0,2)}M)$  の切断

$H$  :  $H_t$  達から得られる誘導バンドル  $F^*TV$  の切断

## 幾何学量の発展

$\tilde{\mathcal{H}}$  :  $\phi$  の水平分布

$\mathcal{H}_t$  :  $\phi \circ f_t$  の水平分布

$\mathcal{H}$  :  $\mathcal{H}_t$  から得られる  $\pi_M^* TM$  の部分バンドル

$\text{pr}_{\mathcal{H}}$  :  $\pi_M^*(TM)$  から  $\mathcal{H}$  へのバンドル直交射影

$g_{\mathcal{H}} := g \circ (\text{pr}_{\mathcal{H}} \times \text{pr}_{\mathcal{H}})$

$h_{\mathcal{H}} := h \circ (\text{pr}_{\mathcal{H}} \times \text{pr}_{\mathcal{H}})$

$A_{\mathcal{H}} := \text{pr}_{\mathcal{H}} \circ A \circ \text{pr}_{\mathcal{H}}$

## 幾何学量の発展

$\nabla$  :  $\nabla^t$  達から誘導される  $\pi_M^* TM$  の接続

$$\left( \begin{array}{l} (\nabla_X Y)_{(x,t)} := \nabla_{X(x,t)}^t Y(\cdot, t), \quad (\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Y)_{(x,t)} = \frac{dY(x,\cdot)}{dt} \\ (X, Y \in \Gamma(\pi_M^*(TM))) \end{array} \right)$$

$\nabla^{\mathcal{H}}$  :  $\nabla^t$  達から誘導される  $\mathcal{H}$  の接続

$$\left( \begin{array}{l} (\nabla_X^{\mathcal{H}} Y)_{(x,t)} := \text{pr}_{\mathcal{H}t}(\nabla_{X(x,t)}^t Y(\cdot, t)), \quad (\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\mathcal{H}} Y)_{(x,t)} = \frac{dY(x,\cdot)}{dt} \\ (X \in \Gamma(\pi_M^*(TM)), Y \in \Gamma(\mathcal{H})) \end{array} \right)$$

## 幾何学量の発展

$\Delta_{\mathcal{H}}$  :  $\nabla^{\mathcal{H}}$  を用いて定義されるサブラフラス作用素

$$\left( \begin{array}{l} (\Delta_{\mathcal{H}} S_{\mathcal{H}})_{(u,t)} := \sum_{i=1}^n \nabla^{\mathcal{H}}_{e_i} \nabla^{\mathcal{H}}_{e_i} S_{\mathcal{H}} \quad (S \in \Gamma(\pi_M^*(T^{(r,s)}M))) \\ ((e_1, \dots, e_n) : \text{an o.n.b of } \mathcal{H}_{(x,t)} \text{ w.r.t. } (g_{\mathcal{H}})_{(x,t)}) \end{array} \right)$$

## 幾何学量の発展

[K3] において,  $g_{\mathcal{H}}, h_{\mathcal{H}}, \|H\|$  が満たす発展方程式を得た.  
([K2] も参照)

命題 7.1[K3].

$$\frac{\partial g_{\mathcal{H}}}{\partial t} = -2\|H\|h_{\mathcal{H}}$$

## 幾何学量の発展

## 命題 7.2[K3].

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h_{\mathcal{H}}}{\partial t}(X, Y) &= (\Delta_{\mathcal{H}} h_{\mathcal{H}})(X, Y) - 2\|H\|h_{\mathcal{H}}(A_{\mathcal{H}}X, Y) \\
&\quad - 2\|H\|g_{\mathcal{H}}((\mathcal{A}_{\xi}^{\phi})^2(X), Y) + \text{Tr} \left( (A_{\mathcal{H}})^2 - (\mathcal{A}_{\xi}^{\phi})^2 \right) h(X, Y) \\
&\quad - \text{Tr}_{g_{\mathcal{H}}}^{\bullet} h(\mathcal{A}_{\bullet}(\mathcal{A}_{\bullet}X), Y) - \text{Tr}_{g_{\mathcal{H}}}^{\bullet} h(\mathcal{A}_{\bullet}(\mathcal{A}_{\bullet}Y), X) \\
&\quad - \text{Tr}_{g_{\mathcal{H}}}^{\bullet} h((\nabla_{\bullet}\mathcal{A})_{\bullet}X, Y) - \text{Tr}_{g_{\mathcal{H}}}^{\bullet} h((\nabla_{\bullet}\mathcal{A})_{\bullet}Y, X) \\
&\quad - 2\text{Tr}_{g_{\mathcal{H}}}^{\bullet} (\nabla_{\bullet}h)(\mathcal{A}_{\bullet}X, Y) - 2\text{Tr}_{g_{\mathcal{H}}}^{\bullet} (\nabla_{\bullet}h)(\mathcal{A}_{\bullet}Y, X) \\
&\quad - 2\text{Tr}_{g_{\mathcal{H}}}^{\bullet} h(\mathcal{A}_{\bullet}X, \mathcal{A}_{\bullet}Y) \quad (X, Y \in \mathcal{H})
\end{aligned}$$



## 幾何学量の発展

命題 7.3[K3].

$$\frac{\partial \|H\|}{\partial t} = \Delta_{\mathcal{H}} \|H\| + \|H\| \text{Tr}(A_{\mathcal{H}})^2 - 3\|H\| \text{Tr}((\mathcal{A}_{\xi}^{\phi})^2)_{\mathcal{H}}$$

## 幾何学量の発展

命題 7.2, 7.3 における  $\mathcal{A}^\phi$ ,  $\mathcal{A}$  について説明する.

- $\mathcal{A}^\phi (\in \Gamma(\tilde{\mathcal{H}}^* \otimes \tilde{\mathcal{H}}^* \otimes \tilde{\mathcal{V}}))$  : リーマン沈めこみ  $\phi : V \rightarrow N$   
 の O'Neill の基本テンソル場  

$$\left( \begin{array}{l} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mathcal{A}_X^\phi Y := (\nabla_X Y)_\nu \quad (X, Y \in \Gamma(\tilde{\mathcal{H}})) \\ (\tilde{\mathcal{H}} \text{ の積分可能性の障害度を表すもの}) \end{array} \right)$$
- $\mathcal{A}_t (\in \Gamma(\mathcal{H}_t^* \otimes \mathcal{H}_t^* \otimes \mathcal{V}_t))$  :  $\phi \circ f_t : M \rightarrow \bar{f}_t(\bar{M}_t)$  の  
 O'Neill の基本テンソル場
- $\mathcal{A} (\in \Gamma(\mathcal{H}^* \otimes \mathcal{H}^* \otimes \mathcal{V}))$  :  $\mathcal{A}_t$  達から得られるテンソル場

## 幾何学量の発展

- $(N, \tilde{g})$  は非負曲率をもつ.
- $(N, \tilde{g})$  : 平坦  $\Rightarrow \mathcal{A}^\phi = 0, \mathcal{A} = 0$   
    ( それゆえ, 命題 7.2, 7.3 における発展方程式  
      の右辺における後半部の項達は消える. )

## 幾何学量の発展

命題 7.2, 7.3 の証明で使用される基本的な関係式は次の通りである :

- $AX = A_{\mathcal{H}}X + \mathcal{A}_{\xi}^{\phi}X$
- $(A^2)_{\mathcal{H}}X = (A_{\mathcal{H}})^2X - (\mathcal{A}_{\xi}^{\phi})^2X$
- $\left[ \frac{\partial}{\partial t}, \bar{X}_{\mathcal{H}} \right] = 2\|H\|\mathcal{A}_{\xi}^{\phi}(\bar{X}_{\mathcal{H}})$

( $X \in \Gamma(TM)$ ). ここで,  $\xi$  は  $f_t(M)$  の単法ベクトル場から定義される  $\Gamma(F^*TV)$  の元を表し,  $\bar{X}$  は  $\bar{X}_{(x,t)} := X_x$  ( $(x,t) \in M \times [0, T)$ ) によって定義される  $\Gamma(\pi_M^*TM)$  の元を表す.

## 幾何学量の発展

例  $G$  : コンパクト半単純リー群

$K$  :  $G$  の閉部分リー群

$\Gamma$  :  $G$  の有限部分群

$\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$  :  $G, K$  のリー代数

$B$  :  $\mathfrak{g}$  のキリング形式

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$  が簡約分解  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$  を許容するとする.

## 幾何学量の発展

$H^0([0, 1], \mathfrak{g})$  に  $B$  に関する  $L^2$  内積を与える.

$H^1([0, 1], G)$  は,  $H^0([0, 1], \mathfrak{g})$  にゲージ変換の接続への作用として次のように作用する :

$$(a * u)(t) = \text{Ad}_G(a(t))(u(t)) - (R_{a(t)})_*^{-1}(a'(t))$$
$$(a \in H^1([0, 1], G), u \in H^0([0, 1], \mathfrak{g}))$$

## 幾何学量の発展

$$P(G, \Gamma \times K) := \{a \in H^1([0, 1], G) \mid (a(0), a(1)) \in \Gamma \times K\}$$

- $P(G, \Gamma \times K)$  は,  $H^0([0, 1], \mathfrak{g})$  に概自由かつ等長的に作用する.
- $H^0([0, 1], \mathfrak{g})/P(G, \Gamma \times K)$  は  $\Gamma \backslash G / K$  にオービ微分同相になる.

## 幾何学量の発展

$\Gamma \backslash G / K$  に  $B|_{\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}}$  から誘導される  
 $G$  不変リーマン (オービ) 計量を与える.

- $\phi : H^0([0, 1], \mathfrak{g}) \rightarrow \Gamma \backslash G / K$  は, 極小ファイバーをもつリーマン沈めこみになる.



## 8. Hamilton 型最大値の原理

## Hamilton 型最大値の原理

$\tilde{G}$  : ヒルベルトリー群

$M$  : ヒルベルト多様体

$\tilde{G} \curvearrowright M$  : 概自由な等長作用で, 各軌道が正則化可能な  
部分多様体であるようなもの

$g_t (t \in [0, T))$  :  $M$  の  $\tilde{G}$  不変なリーマン計量の  $C^\infty$  族

$g$  :  $\{g_t\}_{t \in [0, T)}$  を用いて定義される  $\pi_M^*(T^{(0,2)}M)$  の切断

## Hamilton 型最大値の原理

$$B \in \Gamma(\pi_M^*(T^{(r_0, s_0)} M))$$

- $\bullet \psi_{B \otimes} : \Gamma(\pi_M^*(T^{(r, s)} M)) \rightarrow \Gamma(\pi_M^*(T^{(r+r_0, s+s_0)} M))$   
 $\xLeftrightarrow{\text{def}} \psi_{B \otimes}(S) := B \otimes S \quad (S \in \Gamma(\pi_M^*(T^{(r, s)} M)))$
- $\bullet \psi_{\otimes^k} : \Gamma(\pi_M^*(T^{(r, s)} M)) \rightarrow \Gamma(\pi_M^*(T^{(kr, ks)} M))$   
 $\xLeftrightarrow{\text{def}} \psi_{\otimes^k}(S) := \underbrace{S \otimes \cdots \otimes S}_{(k\text{-times})} \quad (S \in \Gamma(\pi_M^*(T^{(r, s)} M)))$

## Hamilton 型最大値の原理

$$\begin{aligned}
 & \bullet \psi_{g_{\mathcal{H}},ij} : \Gamma(\pi_M^*(T^{(r,s)}M)) \rightarrow \Gamma(\pi_M^*(T^{(r,s-2)}M)) \\
 & \stackrel{\text{def}}{\iff} \left\{ \begin{array}{l} (\psi_{g_{\mathcal{H}},ij}(S))_{(x,t)}(X_1, \dots, X_{s-2}) \\ := \sum_{k=1}^n S_{(x,t)}(X_1, \dots, \underset{i}{e_k}, \dots, \underset{j}{e_k}, \dots, X_{s-2}) \\ (S \in \Gamma(\pi_M^*(T^{(r,s)}M)), X_1, \dots, X_{s-2} \in T_x M) \\ \left( \{e_1, \dots, e_n\} : \mathcal{H}_{(x,t)} \text{ の } (g_{\mathcal{H}})_{(x,t)} \text{ に関する} \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. \text{正規直交基底} \right) \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

## Hamilton 型最大値の原理

- $\bullet \psi_{\mathcal{H},i} : \Gamma(\pi_M^*(T^{(1,s)}M)) \rightarrow \Gamma(\pi_M^*(T^{(0,s-1)}M)) \xleftrightarrow[\text{def}]{} \left\{ \begin{array}{l} (\psi_{\mathcal{H},i}(S))_{(x,t)}(X_1, \dots, X_{s-1}) := \\ \text{Tr}(\text{pr}_{\mathcal{H}(x,t)} \circ S_{(x,t)}(X_1, \dots, X_{i-1}, \bullet, X_i, \dots, X_{s-1}) |_{\mathcal{H}(x,t)}) \\ (S \in \Gamma(\pi_M^*(T^{(r,s)}M)), X_1, \dots, X_{s-1} \in T_x M). \end{array} \right.$

## Hamilton 型最大値の原理

$P : \Gamma(\pi_M^*(T^{(r,s)}M))$  から  
 $\Gamma(\pi_M^*(\bigoplus_{r',s'=0}^{\infty} T^{(r',s')}M))$  への写像

## 定義

$P$  が  $\psi_{B \otimes}, \psi_{\otimes B}, \psi_{\otimes k}, \psi_{g_{\mathcal{H},ij}}, \psi_{\mathcal{H},i}$  達の合成や和によって与えられているとき、 $P$  を **多項式型写像** という。

## Hamilton 型最大値の原理

$P : \Gamma(\pi_M^*(T^{(0,2)}M))$  からそれ自身への多項式型写像

$\{S_t\}_{t \in [0, T]}$  :  $M$  上の  $\tilde{G}$  不変な対称 2 次共変テンソル場の  $C^\infty$  級の 1 パラメーター族

## Hamilton 型最大値の原理

## 定理 8.1.

$\{S_t\}_{t \in [0, T)}$  が次の発展方程式を満たしているとする :

$$\frac{\partial S_{\mathcal{H}}}{\partial t} = \Delta_{\mathcal{H}} S_{\mathcal{H}} + \nabla_{X_0}^{\mathcal{H}} S_{\mathcal{H}} + P(S)_{\mathcal{H}}$$

$$(X_0 \in \Gamma(\pi_M^*(TM)))$$

$P$  は次の零ベクトル条件を満たしているとする :

$$(\forall \varepsilon > 0, \forall (x, t) \in \widetilde{M} \times [0, T))$$

$[X \in \text{Ker}((S + \varepsilon g)_{\mathcal{H}})_{(x, t)} \Rightarrow P(S + \varepsilon g)_{(x, t)}(X, X) \geq 0]$   
 このとき,  $(S_0)_{\mathcal{H}} > 0 \Rightarrow (S_t)_{\mathcal{H}} > 0 \quad (\forall t \in [0, T))$



## 9. 水平強凸性保存性定理

## 水平強凸性保存性定理

$\tilde{G}$  : ヒルベルトリー群

$V$  : ヒルベルト空間

$\tilde{G} \curvearrowright V$  : 概自由な等長作用で, 各軌道が極小な正則化可能  
部分多様体であるようなもの

$\phi : V \rightarrow V/\tilde{G}$  : 軌道写像

## 水平強凸性保存性定理

$M(\subset V)$  :  $\tilde{G}$  不変な超曲面で, コンパクトな射影像をもつ  
( $\phi(M)$  : コンパクト) ようなもの

$f : M \hookrightarrow V$  :  $M$  から  $V$  への包含写像

$\{f_t\}_{t \in [0, T]}$  :  $f$  を発する正則化された平均曲率流

- $f_t$  は  $\tilde{G}$  同変になる  
(つまり,  $f_t(g \cdot u) = g \cdot f_t(u)$  ( $\forall g \in \tilde{G}, \forall u \in M$ ))

## 水平強凸性保存性定理

$$L := \sup_{u \in V} \max_{(X_1, \dots, X_5) \in (\mathcal{H}_1^\phi)^5} |\langle \mathcal{A}_{X_1}^\phi ((\tilde{\nabla}_{X_2} \mathcal{A}^\phi)_{X_3} X_4), X_5 \rangle|$$

$$\left( \begin{array}{l} \mathcal{H}_1^\phi := \{X \in \mathcal{H}^\phi \mid \|X\| = 1\} \\ \tilde{\nabla} : V \text{ のリーマン接続} \end{array} \right)$$

$L < \infty$  であると仮定する ( $V/\tilde{G}$  コンパクト  $\Rightarrow L < \infty$ ).

## 水平強凸性保存性定理

(注) 次式が成り立つ :

$$0 = \langle R(X^L, Y^L)Z^L, W^L \rangle$$

$$\bullet \quad = \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle + 2\langle \mathcal{A}_{X^L}Y^L, \mathcal{A}_{Z^L}W^L \rangle \\ - \langle \mathcal{A}_{Y^L}Z^L, \mathcal{A}_{X^L}W^L \rangle - \langle \mathcal{A}_{Z^L}X^L, \mathcal{A}_{Y^L}W^L \rangle,$$

$$\bullet \quad \langle (\bar{\nabla}_X \bar{R})(Y, Z)W, U \rangle = C \langle \mathcal{A}_{X^L}^\phi((\tilde{\nabla}_{Y^L} \mathcal{A}^\phi)_{Z^L} W^L), U^L \rangle \\ + \dots\dots\dots$$

$$(X, Y, Z, W, U \in \Gamma(TM)).$$

ここで,  $\bar{\nabla}$ ,  $\bar{R}$  は,  $\bar{g}$  のリーマン接続, 曲率テンソルを表す.

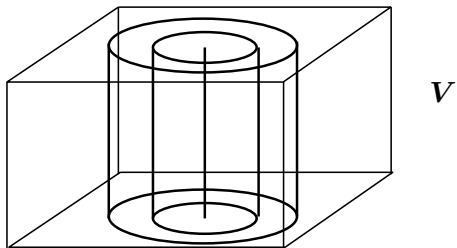
## 水平強凸性保存性定理

定理 9.1(水平強凸性保存性定理).

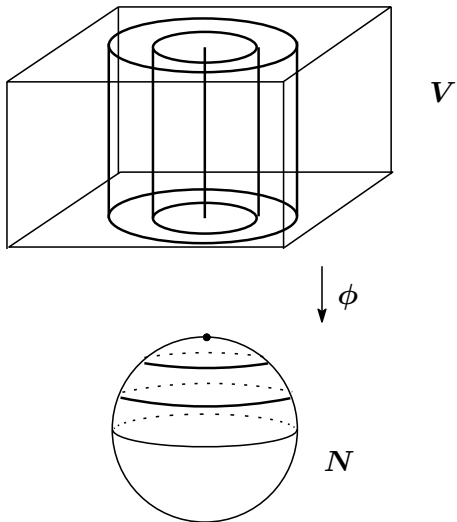
$\|H_0\|^2(h_{\mathcal{H}})_{(\cdot,0)} > 2n^2L(g_{\mathcal{H}})_{(\cdot,0)}$  であるととする.  
このとき,  $T < \infty$  であり, 各  $t \in [0, T)$  に対して,  
$$\|H_t\|^2(h_{\mathcal{H}})_{(\cdot,t)} > 2n^2L(g_{\mathcal{H}})_{(\cdot,t)}$$
が成り立つ.

(注) この結果は, **G. Huisken**([Hu1,2]) による完備リーマン多様体における平均曲率流に沿う強凸性保存性定理に類似するものである.

# 水平強凸性保存性定理



# 水平強凸性保存性定理





## 10. 今後の研究計画

## 今後の研究計画

## 問題

定理 9.1 の条件下で,  $t \uparrow T$  のとき,  
 $f_t(M)$  は  $\phi$  の 1 つのファイバーに崩壊するのか?

この問題を,  $\tilde{G}$  不変な様々な  $M$  上の幾何学量に対する  
積分不等式 (積分領域は  $\bar{M} = \phi(M)$ ) を求め, それらを用いて  
肯定的に解決したいと考えている.

## 今後の研究計画

## グリーンの定理

$$\int_{\bar{M}} \overline{\Delta_{\mathcal{H}_t} \rho} dv_{\bar{g}_t} = 0$$
$$(\rho \in C^\infty(M)_{\tilde{G}})$$

ここで、 $\overline{\Delta_{\mathcal{H}_t} \rho}$  は、 $\Delta_{\mathcal{H}_t} \rho = \overline{\Delta_{\mathcal{H}_t} \rho} \circ \phi$  となる  $\bar{M}$  上の関数を表す ( $\Delta_{\mathcal{H}_t} \rho$  は  $\tilde{G}$  不変になる)。

(注)  $\bar{M}$  は orbifold ではあるが、この等式は成り立つ。

## 今後の研究計画

## 部分多様体に関するソボレフ不等式

ある条件を満たす  $\rho \in C^1(M)_{\tilde{G}}$  に対して、次式が成り立つ：

$$\left( \int_{\bar{M}} \bar{\rho} dv_{\bar{g}_t} \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq c_n \left( \int_{\bar{M}} \overline{\|\text{grad}_{g_{\mathcal{H}_t}} \rho\|_{g_{\mathcal{H}_t}}} dv_{\bar{g}_t} + \int_{\bar{M}} \overline{\|\mathbf{H}_t\|} \cdot |\rho| dv_{\bar{g}_t} \right).$$

## 今後の研究計画

## ヘルダー不等式

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (p > 0, q > 0) \text{ および}$$

$$\rho_i \in \text{Map}(M, \mathbb{R})_{\tilde{G}} \text{ s.t. } \bar{\rho}_i \in L^p(\bar{M}) \cap L^q(\bar{M}) \quad (i = 1, 2)$$

に対して、次式が成り立つ：

$$\int_{\bar{M}} |\bar{\rho}_1 \bar{\rho}_2| dv_{\bar{g}_t} \leq \|\bar{\rho}_1\|_{L^p, \bar{g}_t} \times \|\bar{\rho}_2\|_{L^q, \bar{g}_t}.$$

## 今後の研究計画

## 補間不等式

$1 \leq p < q < r \leq \infty$ ,  $\theta := \frac{1/p - 1/q}{1/p - 1/r}$  および

$\rho \in \text{Map}(M, \mathbb{R})_{\tilde{G}}$  s.t.  $\bar{\rho} \in L^p(\bar{M}) \cap L^r(\bar{M})$

に対して、次式が成り立つ：

$$\|\bar{\rho}\|_{L^q, \bar{g}_t} \leq \|\bar{\rho}\|_{L^p, \bar{g}_t}^{1-\theta} \times \|\bar{\rho}\|_{L^r, \bar{g}_t}^{\theta}.$$

ご清聴どうも有難うございました.