

トーリックカラビヤウ多様体上の特殊ラグランジュ部分多様体 およびラグランジュ自己相似解について

山本 光 (東大数理)

1 特殊ラグランジュ部分多様体の一般論

特殊ラグランジュ部分多様体は almost Calabi–Yau 多様体の中で定義される特殊な部分多様体である。 (M, ω, g, J) を複素 m 次元 Kähler 多様体とする。 M 上至る所消えない正則 $(m, 0)$ -form Ω が存在するとき、 $(M, \omega, g, J, \Omega)$ を almost Calabi–Yau 多様体と呼ぶ。これは M の canonical line bundle K_M が trivial という条件と同値である。 almost Calabi–Yau 多様体 M 上には以下の関係式によって、関数 $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ が定義される。

$$e^{2m\psi} \frac{\omega^m}{m!} = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \left(\frac{i}{2}\right)^m \Omega \wedge \bar{\Omega}. \quad (1)$$

この ψ が恒等的に 0 であるときが Calabi–Yau 多様体である。 Calabi–Yau 多様体は Ricci flat であるが、 almost Calabi–Yau 多様体は Ricci flat とは限らない。今回は Calabi–Yau 多様体よりも条件の緩い almost Calabi–Yau 多様体で議論を展開する。

$(M, \omega, g, J, \Omega)$ を複素 m 次元 almost Calabi–Yau 多様体とし、 $F : L \rightarrow M$ をラグランジュ部分多様体とする。すなわち L は実 m 次元多様体であり $F^*\omega = 0$ 。このとき $F^*\Omega$ は L 上至る所消えない複素数値 m -form である。従って L 上の局所座標 (U, x^1, \dots, x^m) を取ると、 U 上の複素数値関数 h_U が存在して U 上で

$$F^*\Omega = h_U(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$$

と書ける。このとき、 $h_U(x)$ の偏角を $\theta_F(x)$ と書くことにする。座標変換をしても h_U には変換関数つまり実数値関数 (今 L は向き付け可能とは仮定していないので正か負かは分からない) が掛かるだけであるから $h_U(x)$ の偏角は $(\text{mod } \pi)$ で変わらない。従ってこれによって

$$\theta_F : L \rightarrow \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$$

という関数が定義される。この θ_F を写像 F の Lagrangian angle という。

定義 1. θ_F が恒等的に定数 θ であるとき、 $F : L \rightarrow M$ を特殊ラグランジュ部分多様体 (special Lagrangian) with phase $e^{i\theta}$ という。SLag と省略することもある。

ψ を用いて g を $\tilde{g} := e^{2\psi}g$ と共形変形する。すると任意の実数 θ に対して、 $\text{Re}(e^{-i\theta}\Omega)$ はリーマン多様体 (M, \tilde{g}) 上の calibration になる。さらに L が SLag with phase $e^{i\theta}$ であることと L が $\text{Re}(e^{-i\theta}\Omega)$ に関する calibrated submanifold であることは同値である。従って SLag L はリーマン多様体 (M, \tilde{g}) 内の各ホモロジー類の中で体積最小である。このような関係から almost Calabi–Yau 多様体上では通常平均曲率ベクト

ルよりも、そのある種の変形である、T. Behrndt [1] が導入した一般化平均曲率ベクトル (generalized mean curvature vector ^{*1}) を使った方が都合が良いことがある。 $(M, \omega, g, J, \Omega)$ を複素 m 次元 almost Calabi–Yau 多様体 (with ψ) とする。

定義 2 (Behrndt). L を多様体とし、 $F : L \rightarrow M$ を immersion とする。このとき

$$K := H - m(\nabla\psi)^\perp,$$

を generalized mean curvature vector field という。

ここで H は immersion $F : L \rightarrow (M, g)$ に関する通常の意味の平均曲率ベクトル、 $\nabla\psi$ は M 上での ψ の gradient、 \perp はその TL に直交する成分である。 K は H を Calabi–Yau からの “ずれ” ψ を用いて修正したものである。もし ambient が Calabi–Yau ならば ψ は恒等的に 0 であるから K と H は一致する。 K に対して次の式が成り立つ。

定理 3 (Behrndt). $F : L \rightarrow M$ を Lagrangian としたとき次が成り立つ。

$$K = J\nabla\theta_F.$$

このことから Lagrangian $F : L \rightarrow M$ が special Lagrangian であることと K が消えていることが同値であることも直ちに分かる。

2 ラグランジュ自己相似解の一般論

ラグランジュ自己相似解は almost Calabi–Yau cone の中で定義される部分多様体である^{*2}。まずは almost Calabi–Yau cone に関する説明をする。 almost Calabi–Yau 多様体 $(M, \omega, g, J, \Omega)$ が almost Calabi–Yau cone であるとは、あるリーマン多様体 (S, h) が存在して (M, g) はその計量錐として書けるときをいう。すなわち

$$M = C(S) := S \times \mathbb{R}^+ \quad \text{and} \quad g = \bar{h} := r^2h + dr^2.$$

となっている場合である。このとき (S, h) は佐々木多様体でなければならない。 (S, h) を link と呼ぶ。

計量錐上では位置ベクトルという概念が意味を持つ。この位置ベクトルはユークリッド空間における通常の意味での位置ベクトルの計量錐への拡張である。

定義 4. $p = (s, r) \in M = S \times \mathbb{R}^+$ の position vector \vec{p} を

$$\vec{p} := r \frac{\partial}{\partial r} \in T_p M$$

と定める。また M への写像 $F : L \rightarrow M$ に対して $\vec{F}(x) := \overrightarrow{F(x)}$ と定める ($x \in L$)。すると \vec{F} は L 上の誘導ベクトル束 $F^*(TM)$ の section となる。

さて $(M, \omega, g, J, \Omega)$ を almost Calabi–Yau cone with link (S, h) とし、 $F : L \rightarrow M$ を Lagrangian submanifold とする。

^{*1} 幾何学的測度論に既に平均曲率ベクトルを測度論的に一般化した generalized mean curvature vector という言葉があるが、それは全くの別物である。

^{*2} より一般には Kähler cone の中で定義できる。

定義 5. ある定数 λ が存在して

$$K = \lambda \vec{F}^\perp$$

となるとき $F : L \rightarrow M$ を Lagrangian self-similar solution という.

特に $\lambda > 0$ のときは self-expander, $\lambda < 0$ のときは self-shrinker という. また $\lambda = 0$ のときは先の Remark より SLag である.

Lagrangian self-similar solution は平均曲率流と密接な関係がある. SLag を構成するために平均曲率流の方法というものを考えてみる. Lagrangian submanifold $F : L \rightarrow M$ を fix する. この写像を初期値として平均曲率流に沿って変形する (厳密には平均曲率ベクトル H ではなく一般化平均曲率ベクトル K に沿って変形する);

$$\frac{\partial F_t}{\partial t} = K_t.$$

もしこの flow F_t が時間無限大まで存在して, ある写像 $F_\infty : L \rightarrow M$ に収束するならば, それは SLag となる. しかし一般的には平均曲率流には特異点が生じる. もし特異点が type I という種類の場合は Huisken の仕事により, 特異点の近傍を無限大に拡大すると self-similar solution が現れる. 従って self-similar solution は平均曲率流の特異点の local model と考えられる.

3 toric 幾何の準備

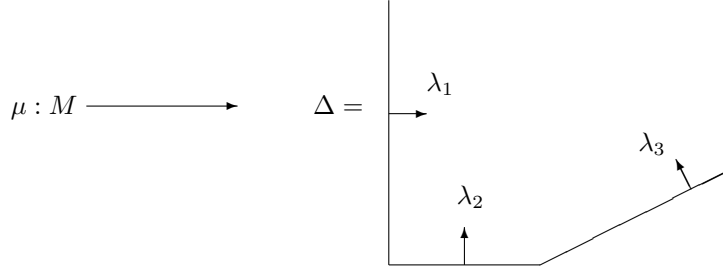
今回は SLag や Lagrangian self-similar solution を ambient がトーリック多様体の場合に具体的に構成する. SLag や Lagrangian self-similar solution は ambient が \mathbb{C}^m の場合に特に盛んに研究されている. それらの具体例をトーリック多様体の場合に拡張する.

この章では toric 幾何学に関する基本的なことを説明する. $T_{\mathbb{C}}^m \cong (\mathbb{C}^\times)^m$ で m 次元複素トーラス, $T^m \cong (S^1)^m$ で $T_{\mathbb{C}}^m$ の中の m 次元実トーラスを表すことにする. また $\mathfrak{g} := \text{Lie}(T^m)$ と表し, $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^m$ と同一視する.

定義 6. (M, ω, g, J) を複素 m 次元 Kähler 多様体とする. このとき (M, ω, g, J) が toric Kähler 多様体であるとは以下を満たすことである. まず (M, J) は複素多様体としては $T_{\mathbb{C}}^m$ が作用する algebraic toric variety で, (M, ω) は symplectic 多様体としては T^m が作用する toric symplectic 多様体である. 特に ω は T^m の作用で不変である.

toric Kähler 多様体 M には moment map $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ とその像である moment polytope $\Delta := \mu(M)$ と fan Σ というデータが付随している. 従って M の複素多様体としての構造は fan Σ により決定され, M の中には open dense な $T_{\mathbb{C}}^m$ -orbit がある. また Δ は凸多面体になっている. moment polytope Δ は, \mathbb{Z}^m の primitive な元 λ_i ($i = 1, \dots, d$) と定数 c_i ($i = 1, \dots, d$) を用いて次のように書ける.

$$\Delta = \{ y \in \mathbb{R}^m \mid \langle y, \lambda_i \rangle \geq c_i, i = 1, \dots, d \}$$



$\{\lambda_i\}_{i=1}^d$ は fan Σ の 1 次元 cone の primitive generator のことと定義しても同じである。実は toric Kähler 多様体上には anti-holomorphic かつ anti-symplectic な involution $\sigma : M \rightarrow M$ ($\sigma^2 = id$) が存在する。このとき σ の fixed point 全体を

$$M^\sigma := \{p \in M \mid \sigma(p) = p\}$$

と書き, M の実形と呼ぶ。するとこれは M 中の半次元の部分多様体である。moment map の実形 M^σ への制限を $\mu^\sigma : M^\sigma \rightarrow \Delta$ と書くと, μ^σ は Δ の 2^m -fold ramified covering になっている。ここで m は M の複素次元である。従って M^σ は位相的には Δ のコピーを 2^m 個用意して, 各面をしかるべき組み合わせで張り合わせたものに同形である。

例 7. 例えば \mathbb{C}^2 は簡単な toric Kähler 多様体で, involution は通常の複素共役, 実形は実平面 \mathbb{R}^2 全体である。moment map は $\mu(z_1, z_2) := \frac{1}{2}(|z_1|^2, |z_2|^2)$ であり, Δ は \mathbb{R}^2 の第一象限である。すると \mathbb{R}^2 全体は第一象限の 4 枚のコピーを貼り合わせたものになっている。

実は (M, ω, g, J) が toric Kähler のときは K_M が trivial になる条件, つまり almost Calabi–Yau になる条件, は簡単に記述できる。それは以下である:

$$\exists \gamma \in \mathbb{Z}^m \quad \text{s.t.} \quad \langle \gamma, \lambda_i \rangle = 1 \quad \text{for all } i = 1, \dots, d$$

実際このような γ があると, γ を用いて M 上至る所消えない正則 $(m, 0)$ -form Ω_γ を構成することができる。 Ω_γ は M の open dense $T_{\mathbb{C}}^m$ -orbit 上では具体的に,

$$\Omega_\gamma = \exp(\gamma_1 z_1 + \dots + \gamma_m z_m) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_m$$

と書くことができる。ここで z_i は $T_{\mathbb{C}}^m \cong (\mathbb{C}^\times)^m$ の通常の座標 (w_1, \dots, w_m) に対して $w_i = e^{z_i}$ で定義される $T_{\mathbb{C}}^m$ 上の座標³である。この $(M, \omega, g, J, \Omega_\gamma)$ を toric almost Calabi–Yau 多様体と呼ぶことにする。

例 8. 例えば \mathbb{C}^m の moment polytope は第一象限すなわち

$$\Delta = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \langle y, e_i \rangle \geq 0, i = 1, \dots, m\}$$

である。ここで e_i は \mathbb{R}^m の標準基底である。この場合は $\gamma := (1, \dots, 1)$ と取れば全ての e_i に対して $\langle \gamma, e_i \rangle = 1$ となる。従って Ω_γ は

$$\Omega_\gamma = e^{z_1 + \dots + z_m} dz_1 \wedge \dots \wedge dz_m$$

となる。これは standard coordinate $w_i := e^{z_i}$ では

$$\Omega_\gamma = dw_1 \wedge \dots \wedge dw_m$$

と書ける。これは \mathbb{C}^m の標準的正則体積要素に他ならない。

³ logarithmic holomorphic coordinates という

4 Lagrangian の具体的構成

$(M, \omega, g, J, \Omega_\gamma)$ を上で説明した toric almost Calabi–Yau 多様体とする. この章では, この $(M, \omega, g, J, \Omega_\gamma)$ の中にどのように Lagrangian を具体的に構成するかについて説明する. そこでまずは \mathbb{C}^m の場合で考察してみることにする. \mathbb{C}^m 内の Joyce の例 [2] は次のような表示をしていた.

$$L_{\zeta, c} = \{(e^{i\zeta_1 t} x_1, \dots, e^{i\zeta_m t} x_m) \mid t \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}^m, \zeta_1 x_1^2 + \dots + \zeta_m x_m^2 = c\}$$

ここで ζ は \mathbb{Z}^m 内の primitive な元で c は定数. するとこのように作られる $L_{\zeta, c}$ は必ず Lagrangian になり, さらにこれが special Lagrangian になるのは

$$\zeta_1 + \dots + \zeta_m = 0$$

のときであるという事実があった.

この例を toric 多様体上で formulate するには次のように見る. $L_{\zeta, c}$ は \mathbb{C}^m における moment map $\mu: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$; $\mu(z_1, \dots, z_m) = \frac{1}{2}(|z_1|^2, \dots, |z_m|^2)$ と複素共役 $\sigma: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$; $\sigma(z_1, \dots, z_m) = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)$ と実形すなわち $(\mathbb{C}^m)^\sigma := “\sigma$ の固定点全体” $= \mathbb{R}^m$ を用いて次のように書ける.

$$L_{\zeta, c} = “\exp(t\zeta)\text{-orbit of } \{x \in (\mathbb{C}^m)^\sigma \mid \langle \mu(x), \zeta \rangle = c\}”.$$

ここで $\exp(t\zeta) = (e^{i\zeta_1 t}, \dots, e^{i\zeta_m t}) \in T^m$ である.

これはもっと intrinsic に書くことができる. まず ζ と c が定める \mathbb{R}^m 内の hyperplane を $H_{\zeta, c} := \{y \in \mathbb{R}^m \mid \langle y, \zeta \rangle = c\}$ と書くことにする. また moment map μ の実形 (今の場合は \mathbb{R}^m) への制限を $\mu^\sigma: (\mathbb{C}^m)^\sigma \rightarrow \Delta$ と書くことにする. 当然今の場合は Δ は \mathbb{R}^m の第一象限である. さて Δ と $H_{\zeta, c}$ との共通部分を $\Delta_{\zeta, c} := \Delta \cap H_{\zeta, c}$ と置き, これを μ^σ で実形に pull-back した多様体を $M_{\zeta, c}^\sigma := (\mu^\sigma)^{-1}(\Delta_{\zeta, c})$ とおくと,

$$M_{\zeta, c}^\sigma = \{x \in (\mathbb{C}^m)^\sigma \mid \langle \mu(x), \zeta \rangle = c\}$$

となっている. $L_{\zeta, c}$ は \mathbb{C}^m の中の subset として書かれてしまっているが, 写像の像して書くならば, 以下のようになる. まず

$$L_{\zeta, c} := M_{\zeta, c}^\sigma \times T^1$$

とし, $L_{\zeta, c}$ から \mathbb{C}^m への写像 $F_{\zeta, c}: L_{\zeta, c} \rightarrow \mathbb{C}^m$ としては

$$F_{\zeta, c}(p, t) := \exp(t\zeta) \cdot p$$

というものを考えればよい. するとここに使われている全ての notation は \mathbb{C}^m の構造に依存していない. 従ってこのまま toric 多様体上で formulate できる.

次のようにすればいい. toric almost Calabi–Yau 多様体 $(M, \omega, g, J, \Omega_\gamma)$ に対して, $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^m$ 内の元 ζ と定数 c を取り, moment polytope の中の超平面 $\Delta_{\zeta, c} := \Delta \cap \{y \in \mathbb{R}^m \mid \langle y, \zeta \rangle = c\}$ を考える. またこの集合を covering $\mu^\sigma: M^\sigma \rightarrow \Delta$ で実形上に引き戻すことのできる実形の中の codimension-1 部分多様体を $M_{\zeta, c}^\sigma := (\mu^\sigma)^{-1}(\Delta_{\zeta, c})$ と置く. $I \subset \mathbb{R}$ を开区間とし, 多様体 $L_{\zeta, c}$ を

$$L_{\zeta, c} := M_{\zeta, c}^\sigma \times I$$

と定める. そして写像 $F_{\zeta, c}: L_{\zeta, c} \rightarrow M$ を

$$F_{\zeta, c}(p, t) := \exp(t\zeta) \cdot p$$

と定める. このとき次が成り立つ.

定理 9 (Y). $F_{\zeta,c} : L_{\zeta,c} \rightarrow M$ は Lagrangian 部分多様体であり Lagrangian angle は

$$\theta_{F_{\zeta,c}}(p, t) = 2\pi \left(\langle \gamma, \zeta \rangle t \right) + \frac{1}{2}\pi$$

で与えられる.

系 10 (Y). $F_{\zeta,c} : L_{\zeta,c} \rightarrow M$ が SLAG であることと $\langle \gamma, \zeta \rangle = 0$ であることは同値である. なおこのときの phase は $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ である.

注意 11. $M = \mathbb{C}^m$ のときは, $\gamma = (1, \dots, 1)$ であるから $L_{\zeta,c}$ が SLAG であることと $\langle \gamma, \zeta \rangle = \zeta_1 + \dots + \zeta_m = 0$ であることは同値である. これは Joyce の例の条件に他ならない.

注意 12. $L_{\zeta,c}$ は $L_{\zeta,c} = M_{\zeta,c}^\sigma \times I$ という topology をしていて, $M_{\zeta,c}^\sigma$ の topology は実形の topology 同様, $\Delta_{\zeta,c}$ のコピーを 2^m 個用意してそれぞれの境界で張り合わせたものになっている. 従って, $L_{\zeta,c}$ は多様な topology を持つが, その topology は fan Σ の組み合わせ的なデータだけから分かる.

注意 13. ζ と c の取り方次第では $L_{\zeta,c}$ は singular ($F_{\zeta,c}$ がある点で immersion ではなくするという意味) になる. 例えば \mathbb{C}^m で紹介した Joyce の例も $L_{\zeta,c}$ は $c = 0$ とすると, 原点に singularity を持つ Lagrangian になる. この現象と同様のことが一般の toric の場合でも起こる. 例えば $\Delta_{\zeta,c}$ が Δ の vertex を含む時は singular になる.

5 ambient が cone shape を持つとき

ここからはさらに $(M, \omega, g, J, \Omega_\gamma)$ が cone shape を持つ場合を考える. すなわち, あるリーマン多様体 (S, h) が存在して,

$$M = C(S) := S \times \mathbb{R}^+ \quad \text{and} \quad g = \bar{h} := r^2 h + dr^2$$

という場合を考える.

注意 14. 従って (S, h) は toric Sasaki 多様体. 今回は ξ を Reeb 場としたとき $\xi \in \mathfrak{g}$ であることを仮定する. すなわち Reeb type であることを仮定する.

M は cone の形をしているので, torus 作用の他に \mathbb{R}^+ 作用もある; $r' \in \mathbb{R}^+$ と $p = (s, r) \in M = S \times \mathbb{R}^+$ に対して,

$$r' \cdot p := (s, r'r).$$

さて $(M, \omega, g, J, \Omega_\gamma)$ を toric almost Calabi–Yau cone with link (S, h) とし, Δ を moment polytope とする. moment polytope も cone の形をしている. まず先と同じく $\zeta \in \mathbb{R}^m \cong \mathfrak{g}$ と $c \in \mathbb{R}$ を取り, moment polytope 中の超平面 $\Delta_{\zeta,c}$ をつくり, それを covering $\mu^\sigma : M^\sigma \rightarrow \Delta$ で実形上に引き戻して $M_{\zeta,c}^\sigma$ をつくり, それを開区間 I と直積して $L_{\zeta,c} := M_{\zeta,c}^\sigma \times I$ をつくる. ここまでは先と同じだが ambient が cone shape を持つ場合はさらに正值関数 $\rho(t)$ を取り, これを半径方向に作用させることで写像 $F_{\zeta,c,\rho} : L_{\zeta,c} \rightarrow M$ を

$$F_{\zeta,c,\rho}(p, t) := \rho(t) \cdot \exp(t\xi) \cdot p$$

と定める.

ここでは $\langle \gamma, \zeta \rangle \neq 0$ を仮定する. このとき必要ならば ζ をこの値で割って $\langle \gamma, \zeta \rangle = 1$ と仮定してよい. このとき次が成り立つ.

定理 15 (Y). $\rho(t) = \frac{1}{\sin(t)}$ と定めると $F_{\zeta, c, \rho} : L_{\zeta, c} \rightarrow M$ は SLag

定理 16 (Y). $\rho(t) \equiv 1$ とする. 超平面を定める ζ を Reeb 場 ξ (のスカラー倍) に一致させる. i.e. $\zeta := \frac{1}{\langle \xi, \xi \rangle} \xi$ と取る. すると $F_{\zeta, c, \rho} : L_{\zeta, c} \rightarrow M$ は Lagrangian self-shrinker となる.

6 Lagrangian mean curvature flow の挙動

我々は $F_{\zeta, c} : L_{\zeta, c} \rightarrow M$ という Lagrangian を構成し, そしてその Lagrangian angle を求めることで, $\langle \gamma, \zeta \rangle = 0$ であることと, この $F_{\zeta, c} : L_{\zeta, c} \rightarrow M$ が special Lagrangian であることが同値であることも分かった. では $\langle \gamma, \zeta \rangle \neq 0$ の場合は, $F_{\zeta, c} : L_{\zeta, c} \rightarrow M$ は special Lagrangian ではないので, これを初期値とする平均曲率流は動き出すわけである. では実際どのように動いて行くだろうか. 実はこの動きも explicit に分かる. まず $L_{\zeta, c}$ の動きを考える前に $\Delta_{\zeta, c}$ の動きを考える. $\Delta_{\zeta, c}$ は moment polytope Δ と ζ, c が定める超平面 $H_{\zeta, c}$ との共通部分であった. この超平面 $H_{\zeta, c}$ を速度 $2\pi\langle \gamma, \zeta \rangle$ で平行に動かして行く. 具体的には切片 $c(s)$ を以下のようにする.

$$c(s) := c - 2\pi\langle \gamma, \zeta \rangle s, \quad \Delta_{\zeta, c(s)} := \Delta \cap H_{\zeta, c(s)}.$$

s の動く範囲は $[0, s_0)$ とし, s_0 は平行に動く超平面が初めて Δ のどれかの vertex に当たる時刻とする. そして

$$M_{\zeta, c(s)}^\sigma := (\mu^\sigma)^{-1}(\Delta_{\zeta, c(s)}), \quad L_{\zeta, c(s)} := M_{\zeta, c(s)}^\sigma \times T^1$$

とおく. すると

$$\{ F_{\zeta, c(s)} : L_{\zeta, c(s)} \rightarrow M \}_{t \in [0, s_0)}$$

は平均曲率流である. これが平均曲率流の挙動である. ただしここで平均曲率流と言った場合は通常平均曲率ベクトル H ではなく K を使った意味での平均曲率流のことである.

smooth な平均曲率流としては flow は, 平行に動く超平面が Δ のどれかの vertex に当たる直前までしか定義できない. 超平面が vertex に当たると特異点ができる. しかし, 適当な意味で特異点の形成も許して flow をさらに先に進める事はできると思われる. そして一般には特異点通過後には多様体の topology が変わることが期待される. これを数学的に formulate することは今後の課題である. おそらく Brakke flow として formulate することが有効であろうと考えられる.

参考文献

- [1] T. Behrndt. Generalized Lagrangian mean curvature flow in Kähler manifolds that are almost Einstein. In *Complex and Differential Geometry*, volume 8 of *Springer Proceedings in Mathematics*, pages 65–79. Springer-Verlag, 2011.
- [2] D. Joyce. Special Lagrangian m -folds in \mathbb{C}^m with symmetries. *Duke Math. J.*, 115(1):1–51, 2002.