卒研説明会 (小池研究室)

2016 年 1 月 30 日

目次

1. ゼミを行う曜日および時間帯 & 使用する教科書等
2. ゼミで研究する内容
3. 平均曲率流・リッチ流の研究へと・・・
   (リッチ流は 3 次元ポアンカレ予想の証明に用いられた)

1. ゼミを行う曜日および時間帯 & 使用する教科書等

ゼミを行う曜日および時間帯 & 使用する教科書等

ゼミを行う曜日および時間帯

金曜日　１４：３０～１７：３０

教科書

幾何学的変分問題 (西川青季著，岩波書店)

第 1,2 章　曲線のエネルギーと第 1,2 変分公式

第 3 章　写像のエネルギーと第 1,2 変分公式

第 4 章　熱流の方法による (自由ホモトピー類内での)
調和写像の存在性証明

ゼミを行う曜日および時間帯 & 使用する教科書等

ゼミの進め方

- 毎週、**1** 人の方に発表をしてもらいます。
  発表者の方には、下準備をしてもらった上、約 **2,3** 日前に私の研究室に来てもらい、**1** 時間程の打ち合わせをした上、発表に臨んでいただきます。
- 前後期、各々、最後に半年行ったゼミの内容について、レポートとしてまとめ、提出してもらいます。

2. ゼミで研究する内容

曲線のエネルギーと第 1,2 変分公式

$\Omega_{\mathrm{p.s.}}(M;p,q)$ ： リーマン多様体 (M,g) 上の点 p から点 q への区分的に C^∞ 級の ($[0,1]$ を定義域とする) 曲線の全体

定義 (長さ汎関数)

$$L : \Omega_{\mathrm{p.s.}}(M;p,q) \to \mathbb{R}$$

$$\underset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \quad L(c) := \int_0^1 \sqrt{g(c'(t),c'(t))}\,dt \quad (c \in \Omega_{\mathrm{p.s.}}(M;p,q))$$

曲線のエネルギーと第 1,2 変分公式

定義 (エネルギー汎関数)

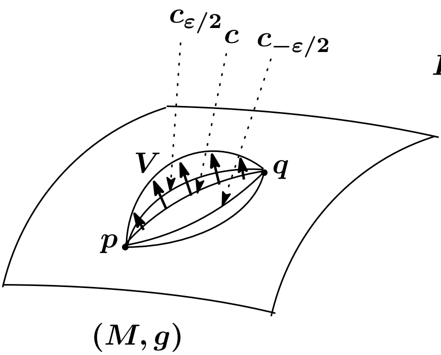
$$\begin{aligned} & \boldsymbol{E} : \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{p.s.}}(\boldsymbol{M};\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \to \mathbb{R} \\ \underset{\mathbf{def}}{\Longleftrightarrow} \quad & \boldsymbol{E}(\boldsymbol{c}) := \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{c}'(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{c}'(\boldsymbol{t}))\boldsymbol{dt} \quad (\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{p.s.}}(\boldsymbol{M};\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})) \end{aligned}$$

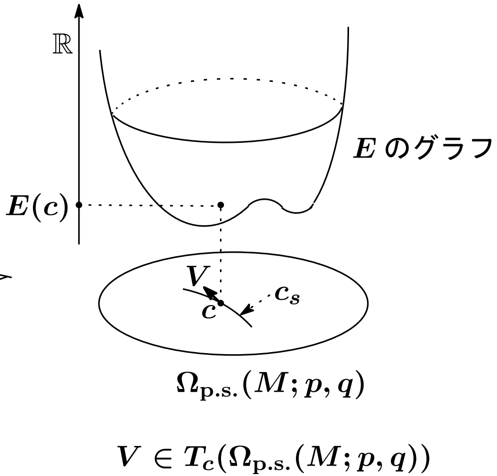
曲線のエネルギーと第 1,2 変分公式

$c \in \Omega_{\mathrm{p.s.}}(M; p, q)$ を固定する。

$c_s\,(-\varepsilon < s < \varepsilon)$ ： $c_0 = c$ となる $\Omega_{\mathrm{p.s.}}(M; p, q)$ に
属する曲線からなる C^∞ 族
(つまり，$\Omega_{\mathrm{p.s.}}(M; p, q)$ 上の C^∞ 曲線)

曲線のエネルギーと第 1,2 変分公式





曲線のエネルギーと第 1,2 変分公式

c が滑らかであるとする。

L の第 1 変分公式

$$dL_c(V) = \left.\frac{dL(c_s)}{ds}\right|_{s=0} = -\frac{1}{L(c_0)}\int_0^1 g((\nabla_{c'}c')_t, V_t)dt$$
$$\left(V_t := \left.\frac{dc_s(t)}{ds}\right|_{s=0}\right)$$

E の第 1 変分公式

$$dE_c(V) = \left.\frac{dE(c_s)}{ds}\right|_{s=0} = -\int_0^1 g((\nabla_{c'}c')_t, V_t)dt$$
$$\left(V := \left.\frac{dc_s}{ds}\right|_{s=0}\right)$$

曲線のエネルギーと第 1,2 変分公式

注意

$\Omega_{\mathrm{p.s.}}(M; p, q)$ ： 無限次元フレシェ多様体

$$E : \Omega_{\mathrm{p.s.}}(M; p, q) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$dE_c : T_c\Omega_{\mathrm{p.s.}}(M; p, q) \longrightarrow T_{E(c)}\mathbb{R} = \mathbb{R}$$

曲線のエネルギーと第 1,2 変分公式

定義

$$c: L\text{ の臨界点} \underset{\text{def}}{\iff} dL_c = 0$$
$$\iff \left.\frac{dL(c_s)}{ds}\right|_{s=0} = 0 \quad (\forall c_s \text{ s.t. } c_0 = c)$$

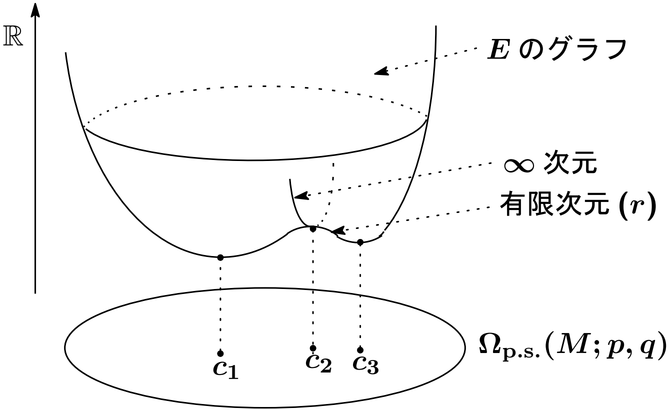
$$c: E\text{ の臨界点} \underset{\text{def}}{\iff} dE_c = 0$$
$$\iff \left.\frac{dE(c_s)}{ds}\right|_{s=0} = 0 \quad (\forall c_s \text{ s.t. } c_0 = c)$$

曲線のエネルギーと第 1,2 変分公式

定理

c : L の臨界点 $\iff$ c : E の臨界点 $\iff$ $\nabla_{c'} c' = 0$

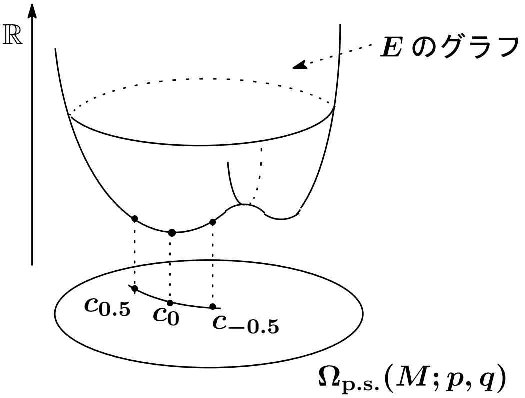
(c : 測地線)

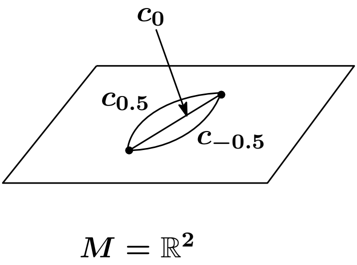


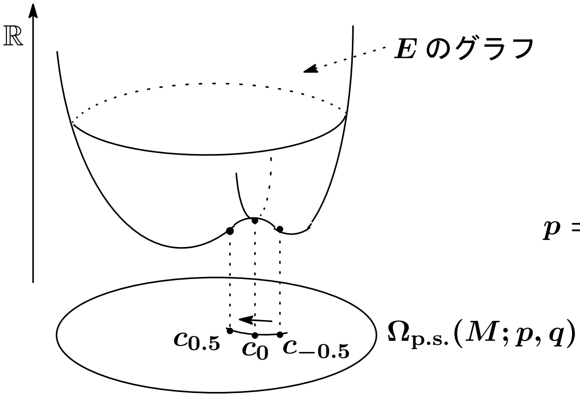
c_1, c_2, c_3 ： E の臨界点 (つまり、測地線)

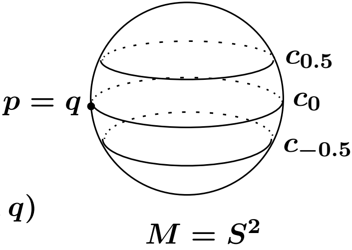
r は臨界点 c_2 の指数とよばれる。

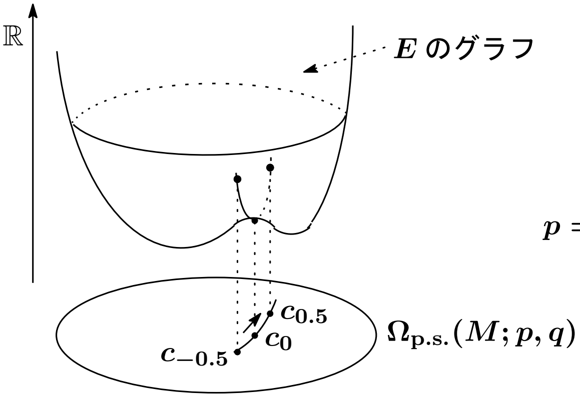
臨界点 c_1, c_2 の指数は 0 である。


$\mathbb{R}$
E のグラフ
$c_{0.5}$
c_0
$c_{-0.5}$
$\Omega_{\mathrm{p.s.}}(M;p,q)$

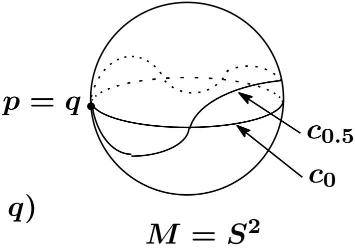

c_0
$c_{0.5}$
$c_{-0.5}$
$M = \mathbb{R}^2$


$\mathbb{R}$
E のグラフ
$c_{0.5}$
c_0
$c_{-0.5}$
$\Omega_{\mathrm{p.s.}}(M; p, q)$


$p = q$
$c_{0.5}$
c_0
$c_{-0.5}$
$M = S^2$



$\mathbb{R}$
E のグラフ
$c_{0.5}$
c_0
$c_{-0.5}$
$\Omega_{\mathrm{p.s.}}(M; p, q)$



$p = q$
$c_{0.5}$
c_0
$M = S^2$

曲線のエネルギーと第 1,2 変分公式

c が測地線であるとする。

E の第 2 変分公式

$$(\nabla dE)_c(V,V) = \left.\frac{d^2E(c_s)}{ds^2}\right|_{s=0}$$
$$= -\int_0^1 g\left(\frac{D^2V}{dt^2} + R(V,c')c',\ V\right)dt$$
$$\left(V := \left.\frac{dc_s}{ds}\right|_{s=0}\right)$$

(R : (M,g) の曲率テンソル場)

曲線のエネルギーと第 1,2 変分公式

$\mathcal{X}_c(M)$ ： c に沿うベクトル場の全体

$$J_c : \mathcal{X}_c(M) \to \mathcal{X}_c(M)$$
$$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad J_c(V) := \frac{D^2 V}{dt^2} + R(V, c')c' \quad (V \in \mathcal{X}_c(M))$$

この作用素 J_c は、測地線 c におけるヤコビ作用素とよばれる。J_c を調べることにより、E の臨界点 c における指数を調べることができる。

写像のエネルギーと第 1,2 変分公式

(M, g) ： コンパクトリーマン多様体

$(N, \widetilde{g})$ ： リーマン多様体

$C^\infty(M, N)$ ： M から N への C^∞ 写像の全体
(これは、無限次元フレシェ多様体)

定義

$$E : C^\infty(M, N) \to \mathbb{R}$$

$$\underset{\text{def}}{\iff} \quad E(f) := \int_{p \in M} ||df_p||^2_{g_p, \widetilde{g}_{f(p)}} dv_g \quad (f \in C^\infty(M, N))$$

写像のエネルギーと第 1,2 変分公式

$f \in C^\infty(M, N)$ を固定する。

$f_s \, (-\varepsilon < s < \varepsilon)$ ： $f_0 = f$ となる $C^\infty(M, N)$ 上の C^∞ 級の曲線

写像のエネルギーと第 1,2 変分公式

f が滑らかであるとする。

E の第 1 変分公式

$$\boldsymbol{dE_f(V) = \left.\frac{dE(f_s)}{ds}\right|_{s=0} = -\int_M g(\tau(f), V)dV_g}$$
$$\boldsymbol{\left(V := \left.\frac{df_s}{ds}\right|_{s=0}\right)}$$

注意　$\tau(f)$ は、$\tau(f) := \triangle_g f$ によって定義される f に沿うベクトル場で、f のテンション場とよばれるものである。
特に、f が等長はめ込みのとき、f の平均曲率ベクトル場と一致する。

写像のエネルギーと第 1,2 変分公式

<u>注意</u>

$$\boldsymbol{E : C^{\infty}(M, N) \longrightarrow \mathbb{R}}$$

$$\boldsymbol{dE_f : T_f C^{\infty}(M, N) \longrightarrow T_{E(f)}\mathbb{R} = \mathbb{R}}$$

写像のエネルギーと第 1,2 変分公式

定理

$f : E$ の臨界点 $\Longleftrightarrow \tau(f) = 0$ (つまり、f : 調和写像)

写像のエネルギーと第 1,2 変分公式

f が調和写像であるとする。

E の第 2 変分公式

$$(\nabla dE)_f(V,V) = \left.\frac{d^2E(f_s)}{ds^2}\right|_{s=0}$$

$$= -\int_M g\left(\triangle_g V + \mathrm{Tr}_g\,\widetilde{R}(V,df)df,\ V\right)dv_g$$

$$\left(V := \left.\frac{df_s}{ds}\right|_{s=0}\right)$$

($\widetilde{R}$: $(N,\widetilde{g})$ の曲率テンソル場)

写像のエネルギーと第 1,2 変分公式

$\mathcal{X}_f(M,N)$ ： f に沿うベクトル場の全体

$$
\begin{aligned}
&J_f : \mathcal{X}_f(M,N) \to \mathcal{X}_f(M,N) \\
&\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \ J_f(V) := \triangle_g V + \mathrm{Tr}_g \widetilde{R}(V, df)df \quad (V \in \mathcal{X}_f(M,N))
\end{aligned}
$$

この作用素 J_f は、調和写像 f におけるヤコビ作用素とよばれる。J_f を調べることにより、E の臨界点 f における指数を調べることができる。

熱流の方法による自由ホモトピー類内での調和写像の存在性証明

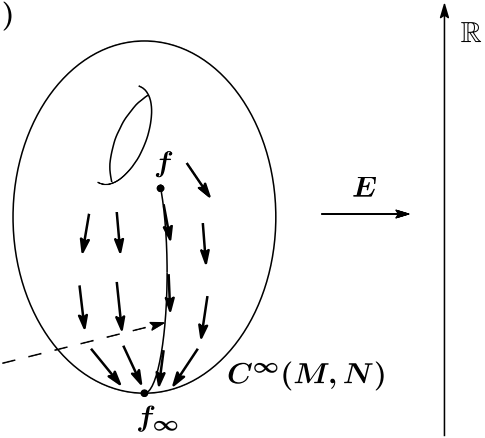
定理 (Eells-Sampson)

(M,g) をコンパクトリーマン多様体，$(N,\tilde{g})$ を非正曲率をもつリーマン多様体とする。このとき、各 $f \in C^\infty(M,N)$ に対し、f と自由ホモトープな調和写像が存在する。

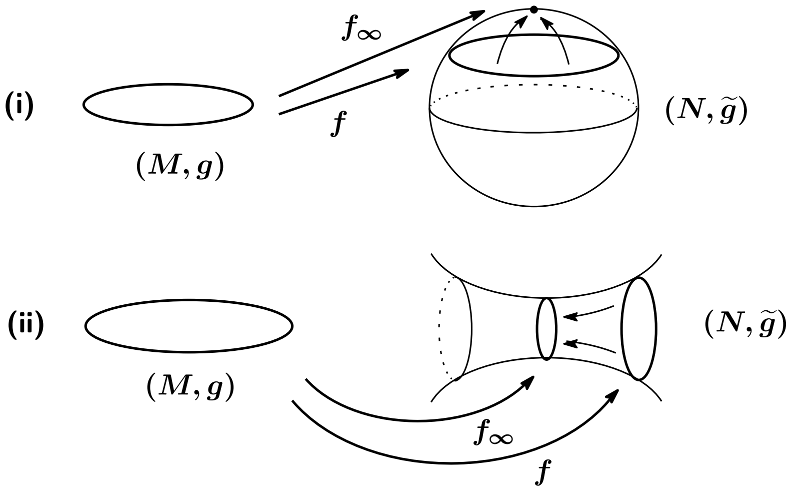
証明方法　無限次元多様体上のモース理論を参考に、**熱流の方法 (heat flow method)** とよばれる方法を用いて示される。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_s}{\partial s} = \tau(f_s)(= \triangle_g f_s) \\ f_0 = f \end{cases}$$

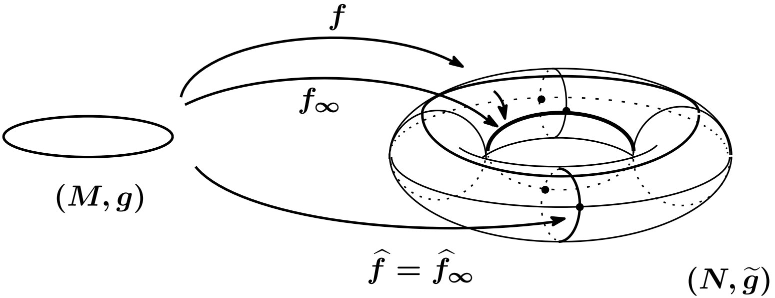
$$\tau(\bullet) = -(\mathrm{grad}\, E)_\bullet$$



熱流の方法による自由ホモトピー類内での調和写像の存在性証明



熱流の方法による自由ホモトピー類内での調和写像の存在性証明



熱流の方法による自由ホモトピー類内での調和写像の存在性証明

熱方程式

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = \triangle_g f_t$$

は、非線形放物型偏微分方程式であり、任意の滑らかな初期データに対し、短時間における解の一意存在性が示される。

平均曲率流

大学院進学希望者のために、発展的内容について紹介します。

M : m 次元コンパクト多様体

$(N, \tilde{g})$: $n(> m)$ 次元リーマン多様体

$\mathrm{Imm}^{\infty}(M, N)$: M から N への C^{∞} はめ込みの全体

$f_t\ (0 \leq t < T)$: $\mathrm{Imm}^{\infty}(M, N)$ 上の C^{∞} 級の曲線

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = H_t \tag{1}$$

$(H_t$: f_t の平均曲率ベクトル場$)$ が成り立つとき、
$f_t\ (0 \leq t < T)$ を平均曲率流とよぶ。

平均曲率流

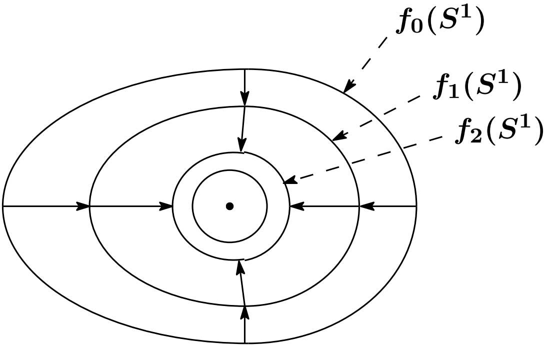
注意

$(N, \widetilde{g})$ がユークリッド空間のとき、$H_t = \triangle_{g_t} f_t \ (g_t := f_t^* \widetilde{g})$ となり、それゆえ、(1) は、

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = \triangle_{g_t} f_t$$

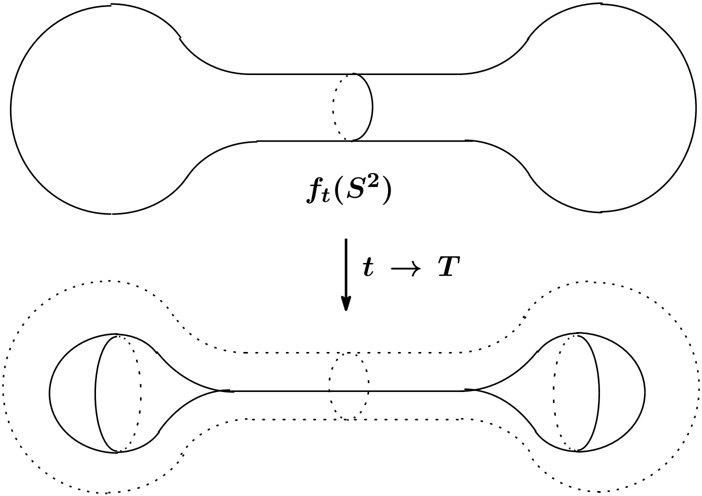
となる。これは、非線形放物型偏微分方程式であり、任意の滑らかな初期データに対し、短時間における解の一意存在性が示される。

平均曲率流



$$f_t : S^1 \to \mathbb{R}^2$$

平均曲率流



$$f_t : S^2 \to \mathbb{R}^3$$

3 次元ポアンカレ予想の解決に用いられたリッチ流

M ： コンパクト多様体

$\mathcal{RM}^\infty(M)$ ： M の C^∞ リーマン計量の全体

$g_t\ (0 \leq t < T)$ ： $\mathcal{RM}^\infty(M)$ 上の C^∞ 級の曲線

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = \mathrm{Ric}_t \tag{2}$$

(Ric_t ： g_t のリッチテンソル) が成り立つとき、$g_t\ (0 \leq t < T)$ をリッチ流とよぶ。

3 次元ポアンカレ予想の解決に用いられたリッチ流

3 次元ポアンカレ予想は、リッチ流を用いて次のように証明された。

Σ^3 を 3 次元ホモトピー球面とする。

Σ^3 のリーマン計量 g を任意にとり、$g_0 = g$ となるリッチ流 g_t を考える。

g_t は、有限時間 (これを T とする) で爆発をしてしまう。

爆発をする寸前に手術をする。

そして、その手術をして得られるリーマン計量を g_1 とする。

3 次元ポアンカレ予想の解決に用いられたリッチ流

g_1 を発するリッチ流 $(g_1)_t$ を考える。

$(g_1)_t$ は、再び有限時間 (これを T_1 とする) で爆発をしてしまう。

爆発をする寸前に、再び手術をする。

そして、その手術をして得られるリーマン計量を g_2 とする。

この操作を有限回繰り返すことにより、良いリーマン計量に到達する。

Σ^3 がその良いリーマン計量を許容することから、3 次元球面 S^3 と同相であることが示される。