おく．このとき，

$$
\begin{aligned}
[dF(\boldsymbol{X}), dF(\boldsymbol{Y})]_p &= (\mathcal{L}_{dF(\boldsymbol{X})} dF(\boldsymbol{Y}))_p \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (d\widehat{\phi}_t)_p^{-1} (dF(\boldsymbol{Y})_{\widehat{\phi}_t(p)}) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (d(\widehat{\phi}_t^{-1} \circ F)_{F^{-1}(\widehat{\phi}_t(p))}((\boldsymbol{Y})_{F^{-1}\widehat{\phi}_t(p)}) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (d(F \circ \phi_t^{-1})_{\phi_t(F^{-1}(p))}((\boldsymbol{Y})_{\phi_t(F^{-1}(p))}) \\
&= dF_{F^{-1}(p)} \left( \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (d\phi_t^{-1})_{(\phi_t(F^{-1}(p))}((\boldsymbol{Y})_{\phi_t(F^{-1}(p))}) \right) \\
&= dF_{F^{-1}(p)}([\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}]_{F^{-1}(p)}) = dF([\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}])_p
\end{aligned}
$$

が示される．それゆえ，$p$ の任意性により $[dF(\boldsymbol{X}), dF(\boldsymbol{Y})] = dF([\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}])$ が導かれる． □

## 4.7 接分布・葉層構造

この節において，多様体上の接分布および葉層構造を定義する．$M$ を $n$ 次元 $C^\infty$ 級多様体とし，$\pi : E \to M$ を階数 ~~$k$~~ m の $C^\infty$ 級ベクトルバンドルとする．各ファイバー $E_p$ の $k$ (k≤m) 次元部分ベクトル空間 $F_p$ を束ねた集合 $F := \amalg_{p\in M} F_p$ で，$\pi|_F : F \to M$ が $C^r$ 級ベクトルバンドルになるとき，$\pi : F \to M$ を $E$ の**階数 $k$ の $C^r$ 級部分ベクトルバンドル ($C^r$-vector subbundle of rank $k$)** という．特に，接ベクトルバンドル $\pi : TM \to M$ の階数 $k$ の $C^r$ 級部分ベクトルバンドルを **$M$ 上の $C^r$ 級 $k$ 次元接分布 ($k$-dimensional distribution of class $C^r$ on $M$)** という．$\pi_{\mathcal{D}} := \pi|_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \to M$ を $M$ 上の $C^r$ 級の $k$ 次元接分布とする ($r \geq 2$)．各点 $p \in M$ に対し，$p$ を通る $M$ 内の $1:1$ にはめ込まれた $C^{r+1}$ 級 $k$ 次元部分多様体 $L_p$ で，$T_qL_p = \mathcal{D}_q$ ($q \in L_p$) となるようなものが存在するとき，$\mathcal{D}$ は**積分可能 (integrable)** であるといい，$L_p$ を，$p$ を通る $\mathcal{D}$ の**積分多様体 (integral manifold)** という（図 4.7.1 を参照）．ここで，$L_p$ が $1:1$ にはめ込まれた $C^r$ 級 $k$ 次元部分多様体であるとは，$L_p$ がある $C^r$ 級 $k$ 次元多様体から $M$ への $1:1$ の $C^r$ 級はめ込み写像の像であることを意味する．一方，任意の $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \Gamma^r_{\mathrm{loc}}(\mathcal{D})$ に対し，$[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}] \in \Gamma^{r-1}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{D})$ が成り立つとき，$\mathcal{D}$ は**対合的 (involutive)** であるとい