$f^{-1}(V) \to \mathbb{R}$ $(i=1,\dots,m)$ が C^r 級であることである．f に沿う C^∞ 級ベクトル場の全体 $\Gamma^\infty(f^*T\widetilde{M})$ を $\mathcal{X}_f(M,\widetilde{M})$ と表す．

∇ を C^∞ 実ベクトルバンドル $E \xrightarrow{\pi} \widetilde{M}$ の接続とする．このとき，f^*E の接続 ∇^f で次の条件を満たすようなものがただ1つ存在する：

(*) $\sigma \in \Gamma^\infty(E)$ に対し，$\sigma_f \in \Gamma^\infty(f^*E)$ を $(\sigma_f)_p := \sigma_{f(p)}$ $(p \in M)$ によって定義するとき，任意の $\boldsymbol{X} \in \mathcal{X}(M)$ に対し，$(\nabla^f_X \sigma_f)_p = \nabla_{X_p}\sigma$ $(p \in M)$ が成り立つ．

$df_p(X_p)$

この接続 ∇^f を ∇ の f による**誘導接続 (induced connection)**，または，**引き戻し接続 (pull-back connection)** という．∇^f の存在性と一意性の証明方針を述べる．$\boldsymbol{X} \in \mathcal{X}(M)$ と $\sigma \in \Gamma^\infty(f^*E)$ に対し，$\nabla^f_{\boldsymbol{X}}\sigma$ を以下のように定める．$p_0 \in M$ を任意にとり，$f(p_0)$ の開近傍 U 上の E の C^∞ 級の局所基底場 $(\xi_1,\dots,\xi_k)$ をとる．σ が次のように局所表示されているとする：

$$\sigma(p) = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i(p)(\xi_i)_{f(p)} \quad (p \in f^{-1}(U)).$$

このとき，$(\nabla^f_{\boldsymbol{X}}\sigma)_{p_0}$ を

$$(\nabla^f_{\boldsymbol{X}}\sigma)_{p_0} := \sum_{i=1}^{k} \left(\boldsymbol{X}_{p_0}(\sigma_i)(\xi_i)_{f(p_0)} + \sigma_i(p_0)\,\nabla_{df_{p_0}(\boldsymbol{X}_{p_0})}\xi_i \right)$$

によって定義する．このように定めた $\nabla^f_{\boldsymbol{X}}\sigma$ が C^∞ 級であること，さらに，各 $(\boldsymbol{X},\sigma) \in \mathcal{X}(M) \times \Gamma^\infty(E)$ に $\nabla^f_{\boldsymbol{X}}\sigma$ を対応させる対応 ∇^f が上述の条件 (*) を満たすことが，その定め方と ∇ の性質より示される．以上で，存在性が示されたことになる．一意性は，主に上述の条件 (*) を用いて示される．

特に，∇ の C^∞ 曲線 $c : [a,b] \to \widetilde{M}$ による誘導接続 ∇^c に対し，$\nabla^c_{\frac{d}{dt}}$ は 5.3 節で述べた $\nabla_{c'}$ と一致する．$\sigma \in \Gamma^\infty(c^*E)$ に対し，$\nabla_{c'}\sigma = \boldsymbol{0}$ が成り立つとき，σ を **c に沿う $\boldsymbol{E}$ の平行切断 (parallel section of $\boldsymbol{E}$ along c)** という．

命題 5.3.2 の (i) に類似して，次の事実が示される．

定理 5.5.1. $c : [a,b] \to \widetilde{M}$ を C^∞ 曲線とする．各 $\xi \in E_{c(a)}$ に対し，c に沿う E の平行切断 σ で $\sigma(a) = \xi$ となるようなものが，ただ1つ存在する．