$\widetilde{M}$ 内の C^∞ 曲線 $c:[a,b]\to\widetilde{M}$ に対し，$E_{c(a)}$ から $E_{c(b)}$ への写像 P_c を

$$P_c(\xi) := \sigma(b) \qquad (\xi\in E_{c(a)})$$
$$(\sigma : \sigma(a)=\xi \text{ を満たす } c \text{ に沿う平行切断})$$

によって定義する．この写像 P_c を **∇ に関する c に沿う平行移動 (the parallel translation along c with respect to ∇)** という．$p\in\widetilde{M}$ に対し，

$$\mathcal{C}_p := \{c:[0,1]\to\widetilde{M}\,|\,c: \text{区分的に } C^\infty \text{ 級の曲線 s.t. } c(0)=c(1)=p\}$$

とし，集合 Φ_p^∇ を $\Phi_p^\nabla := \{P_c\,|\,c\in\mathcal{C}_p\}$ によって定義する．ここで，P_c は ∇ に関する c に沿う平行移動を表す．各 P_c は E_p からそれ自身へのの線形同型写像であり，$P_{c_1}\circ P_{c_2} = P_{c_1\cdot c_2}$ $(c_1,c_2\in\mathcal{C}_p)$,　$(P_c)^{-1} = P_{c^{-1}}$ $(c\in\mathcal{C}_p)$ が成り立つ．このように，Φ_p^∇ は E_p からそれ自身への線形同型写像全体のなす群 $GL(E_p)$ の部分群になり，6.1 節で定義する C^∞ 級リー群とよばれるものになる．この C^∞ 級リー群 Φ_p^∇ を **∇ の p におけるホロノミー群 (holonomy group)** といい，その単位元の連結成分 $(\Phi_p^\nabla)^0$ を **∇ の p における制限ホロノミー群 (restricted holonomy group)** という．

5.6　測地変分とヤコビ場

この節において，アフィン接続多様体上の測地線に沿うヤコビ場を定義し，測地変形の変分ベクトル場がヤコビ場であることを示す．(M,∇) を C^∞ 級アフィン接続多様体とし，R を ∇ の曲率テンソル場とする．この節において，∇ は捩れ 0 であるとする．$\gamma:I\to M$ を (M,∇) 上の測地線とし，$\boldsymbol{Y}:I\to TM$ を γ に沿う C^∞ 級ベクトル場とする．簡単のため $\nabla_{\gamma'}\boldsymbol{Y}$, $\nabla_{\gamma'}(\nabla_{\gamma'}\boldsymbol{Y})$ を各々，$\boldsymbol{Y}'$, $\boldsymbol{Y}''$ と表すことにする．$\boldsymbol{Y}$ が

$$\boldsymbol{Y}''(s) + R_{\gamma(s)}(\boldsymbol{Y}(s),\gamma'(s))\gamma'(s) = 0 \quad (s\in I) \tag{5.6.1}$$

を満たすとき，$\boldsymbol{Y}$ を γ に沿う**ヤコビ場 (Jacobi field)** といい，式 (5.6.1) を**ヤコビ方程式 (Jacobi equation)** という．C^∞ 写像 $\delta: I\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ で，各 $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ に対し，$s\mapsto\delta(s,t)$ $(s\in I)$ が測地線で $\delta(s,0)=\gamma(s)$ $(s\in I)$ を満たすようなものを γ の C^∞ 級の**測地変形 (geodesic deformation)** といい，$\delta_*(\frac{\partial}{\partial s})|_{s=0}$ をその**変分ベクトル場 (variational vector field)** という．

t