ので，c は T_eG 上の直線とみなす．このとき，

$$(d\exp_G)_{\mathbf{0}_e}(\boldsymbol{v}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(\exp_G\circ c) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\exp_G(t\boldsymbol{v})$$
$$= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g_{t\boldsymbol{v}}(1) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g_{\boldsymbol{v}}(t) = \boldsymbol{v}$$

が示される．このように，$T_{\mathbf{0}_e}(T_eG)$ と T_eG を同一視することにより，$(d\exp_G)_{\mathbf{0}_e} = \mathrm{id}_{T_eG}$ をえる．つまり，$(d\exp_G)_{\mathbf{0}_e}$ は線形同型写像なので，逆関数定理（定理 4.4.1）により主張が示される．

□

注意　$\mathfrak{g}_G$ を G の両側不変な擬リーマン計量，つまり，任意の $g\in G$ に対し $L_g^*\mathfrak{g}_G = \mathfrak{g}_G, R_g^*\mathfrak{g}_G = \mathfrak{g}_G$ を満たす擬リーマン計量とする．このとき，擬リーマン多様体 $(G, \mathfrak{g}_G)$ の e における指数写像 $\exp_e$ と，上述のリー群 G の指数写像 $\exp_G$ は一致することが知られている．

次に，リー群，およびそのリー代数の例をいくつか紹介する．

例 6.1.1.　n 次一般線形群 $GL(n,\mathbb{R})$ のリー代数 $\mathrm{Lie}(GL(n,\mathbb{R}))$，および指数写像 $\exp_{GL(n,\mathbb{R})}$ を求めてみよう．この節の最初の方で述べたように $GL(n,\mathbb{R})$ はベクトル空間 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ の開集合なので，$GL(n,\mathbb{R})$ の単位元 E_n（これは n 次単位行列）における接空間 $T_{E_n}GL(n,\mathbb{R})$ は $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ と同一視される．$A\in T_{E_n}GL(n,\mathbb{R})\ (=\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}))$ に対し，$\widehat{\exp}\,A$ を $\widehat{\exp}\,A := \sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^k}{k!}$ によって定義する．右辺の級数は収束することが示される（文献 [Che] 等を参照）．$c(t) := \widehat{\exp}\,tA$ とおく．A に付随する左不変ベクトル場 $\boldsymbol{X}^A$ は，

k=0

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}^A_B = (dL_B)_{E_n}(A) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} L_B(E_n + tA)\\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(B + tBA) = BA \quad (B\in GL(n,\mathbb{R}))\end{aligned} \tag{6.1.2}$$

によって与えられる．それゆえ，$\boldsymbol{X}^A_{c(t)} = (\widehat{\exp}\,tA)A$ をえる．一方，

$$c'(t) = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^kA^k}{k!}\right)' = (\widehat{\exp}\,tA)A$$

k=0

となる．ゆえに，$c'(t) = \boldsymbol{X}^A_{c(t)}$ が示される．また，明らかに $c(0) = E_n$ が成り立つ．これらの事実から，$c(t) = g_A(t)$ が導かれる．特に，