

Propagation of singularities for a system of semilinear wave equations with null condition *

伊藤真吾 (東京理科大学大学院理学研究科)

1. 導入

双曲型方程式には，初期値の特異性が時間の経過と共に方程式固有の法則で伝わっていくという現象がある．このことを『特異性の伝播』と呼ぶ．本講演では，以下の半線形波動方程式系の解の特異性伝播を考える．

$$\begin{cases} \square u = h_1(u, v)Q_0(u, u) + h_2(u, v)Q_0(u, v) + h_3(u, v)Q_0(v, v) + h_4(u, v)Q_1(u, v), \\ \square v = h_5(u, v)Q_0(u, u) + h_6(u, v)Q_0(u, v) + h_7(u, v)Q_0(v, v) + h_8(u, v)Q_1(u, v), \\ u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0, x) = u_1(x), \\ v(0, x) = v_0(x), \quad \partial_t v(0, x) = v_1(x). \end{cases} \quad (1.1)$$

但し， $\square = \partial_t^2 - \partial_x^2$ ， $u = u(t, x)$ ， $v = v(t, x)$ は $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ， $u_0(x), u_1(x), v_0(x), v_1(x)$ は $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ， $h_j(u, v) (j = 1, 2, \dots, 8)$ は u と v の多項式で実数係数， $Q_0(f, g) = (\partial_t f)(\partial_t g) - (\partial_x f)(\partial_x g)$ ， $Q_1(f, g) = (\partial_t f)(\partial_x g) - (\partial_x f)(\partial_t g)$ とする．また， $3/2 < s < 2$ とし， $u_0, v_0 \in H^s(\mathbb{R})$ ， $u_1, v_1 \in H^{s-1}(\mathbb{R})$ と仮定する．

L.Hormander[3] は，線型波動方程式 $\square u = 0$ の解 u の波面集合 $\text{WF}(u)$ は \square の零陪特性曲線に沿って伝播することを示した ($p(t, x, \tau, \xi)$ を微分作用素 $P(t, x, D_t, D_x)$ の特性多項式としたとき， $p(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0) = 0$ を満たす点 $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ に対して，その点を通る零陪特性曲線とは $\frac{dt}{ds} = \frac{\partial p}{\partial \tau}(t, x, \tau, \xi)$ ， $\frac{dx}{ds} = \frac{\partial p}{\partial \xi}(t, x, \tau, \xi)$ ， $\frac{d\tau}{ds} = -\frac{\partial p}{\partial t}(t, x, \tau, \xi)$ ， $\frac{d\xi}{ds} = -\frac{\partial p}{\partial x}(t, x, \tau, \xi)$ かつ $t(0) = t_0$ ， $x(0) = x_0$ ， $\tau(0) = \tau_0$ ， $\xi(0) = \xi_0$ で定義される積分曲線である)．これを非線形方程式で考えた場合，一般にはこのような結果を得ることはできず，解 u は線形の場合に得られる箇所以外にも新たな特異性を持つことが知られている．しかし，解 u に仮定する特異性の条件を弱めると線形の場合と似た現象を見ることができ，それに関する様々な結果が示されている．例えば， $\square u = F(u, Du)$ において，その解 u に超局所ソボレフ空間の正則性 $u \in H^s \cap H_{ml}^r(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ を仮定する．このとき， s と r が適切な範囲内の値であれば，線形の場合と同様に， H_{ml}^r の特異性が点 $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ を通る零陪特性曲線に沿って伝播する．これを成立させる s と r の範囲は，J.M.Bony，M.Beals，M.Reedらによってたびたび改良されてきており，現在得られている最良の範囲は，L.Liu[7] による $n/2 + 1 < s < r < 3s - n - 1$ である (n は時空間の次元)．

本研究では，非線形項に null condition を課すことにより， s についての条件を改良した． Q_0, Q_1 は一般に “null form” と呼ばれ，null form によって表される非線形項を “null condition を満たす” などという．null condition は 1986 年に Klainerman によって，ある種 of 非線形波動方程式が時間大域解を持つための十分条件として与えられた．現在も，この null condition を改良し，その条件のもとで，時間大域解，時間局所解の存在を示す試みが多く of 数学者によって研究されており，様々な結果が得られている．

2. 準備

定義(超局所ソボレフ空間) 関数 $u \in D'(\mathbb{R}^2)$ が $H_{ml}^r(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ の元であるとは，ある $\phi(t, x) \in C_0^\infty$ で $\phi(t_0, x_0) = 1$ を満たすものと，ある (τ_0, ξ_0) の錐近傍 K があって， $(1 + |\tau|^2 + |\xi|^2)^{r/2} \chi_K(\tau, \xi) |\widehat{\phi u}(\tau, \xi)| \in L^2(\mathbb{R}^2)$ をみたすことである．ただし， $\chi_K(\tau, \xi)$ は

*本研究は東京理科大学理学部の加藤圭一先生との共同研究に基づくものである．

$(\tau, \xi) \in K$ のとき 1 , $(\tau, \xi) \notin K$ のとき 0 を満たす特性関数である .

(1.1) の解の存在を述べるために , 関数空間 X^s を

$$X^s = \{f \in H^s(\mathbb{R}^2) \mid f|_{t=0} \in H^s(\mathbb{R}), \partial_t f|_{t=0} \in H^{s-1}(\mathbb{R}), \|\langle D_x \rangle^s \square f\|_{L^2_{t,x}} < \infty\}$$

と定義する .

命題 (時間局所解の存在) $3/2 < s \leq 2$ とする . 任意の $u_0, v_0 \in H^s(\mathbb{R})$, $u_1, v_1 \in H^{s-1}(\mathbb{R})$ に対してある正定数 T があって , $(u, v) \in \{X^s \cap L^\infty([-T, T]; H^s_x)\} \times \{X^{s-1} \cap L^\infty([-T, T]; H^{s-1}_x)\}$ を満たす初期値問題 (1.1) の時間局所解が一意に存在する .

$\varphi(x) \in C_0^\infty$ は x_0 の近傍で $\varphi \equiv 1$ とし , $\chi(\tau, \xi)$ は (τ_0, ξ_0) の近傍で $\chi \equiv 1$ である 0 次の斉次関数とする . このとき , シンボルが $p(t, x, \tau, \xi) = \varphi(x + (\xi/\tau)t)\chi(\tau, \xi)$ である作用素 P を $Pf = \int_{\mathbb{R}^2} p(t, x, \tau, \xi) \hat{f}(\tau, \xi) e^{i(t\tau + x\xi)} d\tau d\xi$ と定義する . 主定理の証明において , 次の 2 つの Key Lemma を用いる .

補題 1 $f, g, h \in H^s$, $\square f, \square g \in H^{s-1}$ とする . $0 \leq \epsilon < s - 1$ を満たす任意の ϵ について , $[P, h(t, x)(\partial_t + \partial_x)](\partial_t - \partial_x)f(\partial_t - \partial_x)g$, $[P, h(t, x)(\partial_t - \partial_x)](\partial_t + \partial_x)f(\partial_t + \partial_x)g \in H^{s-2+\epsilon}$ が成り立つ .

補題 2 $a(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ は $|t| \leq 1/2$ に対して $a(t) = 1$ $|t| \geq 1$ に対して $a(t) = 0$ を満たすものとし , $T > 0$ に対して , $a_T(t) = a(t/T)$ とする . また , (u, v) は Proposition 2.2 で構成された (1.1) の解とする . このとき , $a_T(t)Q_0(u, v)$, $a_T(t)Q_1(u, v) \in H^{s-1}(\mathbb{R}^2)$ が成り立つ .

3. 主定理

定理 (特異性の伝播) $(u, v) \in \{X^s \cap L^\infty([-T, T]; H^s_x)\} \times \{X^{s-1} \cap L^\infty([-T, T]; H^{s-1}_x)\}$ (ただし , $3/2 < s \leq 2$) は上記命題で構成した時間局所解とし , \square の零陪特性曲線 Γ 上の点 $(0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ で $(u, v) \in H^r_{ml}(0, x_0, \tau_0, \xi_0) \times H^r_{ml}(0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ とする . このとき , $r < 2s - 1$ であるならば , $|t| < T$ なる t に対して $(u, v) \in H^r_{ml}(\Gamma) \times H^r_{ml}(\Gamma)$ が成立する .

定理の証明は , 方程式の両辺に $P(\partial_t \pm \partial_x)$ を作用させ , 上記の Key Lemma とエネルギー評価を用いてなされる .

References

- [1] M. Beals, *Propagation and interaction of singularities in nonlinear hyperbolic problems*, Birkhäuser, Boston(1989).
- [2] M. Beals, and M. Reed, *Propagation of singularities for hyperbolic pseudo differential operators with non-smooth coefficients*, Comm. Pure Appl. Math. **35** (1982), 169-184.
- [3] L. Hörmander, *On the existence and the regularity of solutions of linear psuedodifferential equations*, Enseign. Math. 17(1971), 99-163.
- [4] S. Ito, *Propagation of singularities for semi-linear wave equations with nonlinearity satisfying the null condition*, J. Hyper. Diff. Eq. 4(2007), 197-205.
- [5] S. Ito, *Propagation of singularities for a system of semilinear wave equations with null condition*, preprint.
- [6] S. Klainerman and M. Machedon, *Space-time estimates for null forms and the local existence theorem*, Comm. Pure Appl. Math. 46 (1993), 1221-1268.
- [7] L. Linqi, *Propagation of singularities for semilinear hyperbolic equations*, Canad. J .Math. Vol. **45** (4) (1993), 835-846.
- [8] J. Rauch, *Singularities of solutions to semilinear wave equations*, J. Pures et Appl. 58 (1979), 299-308.

Abstract approach to Schrödinger evolution equations

吉井 健太郎 (東京理科大学理学研究科 博士課程 1年)

本講演では, Hilbert 空間における線形発展方程式の抽象定理を紹介し, 定理が $L^2(\mathbb{R}^N)$ における Schrödinger 発展方程式の Cauchy 問題に応用されることを示す.

1. 抽象定理

$\{A(t); 0 \leq t \leq T\}$ は複素 Hilbert 空間 X における閉線形作用素の族とする. 次のような線形発展方程式について考える:

$$(E) \quad \frac{d}{dt}u(t) + A(t)u(t) = f(t) \quad \text{on } (0, T).$$

S は X における正定値自己共役作用素とする: $(u, Su) \geq \|u\|^2, u \in D(S)$. このとき平方根 $S^{1/2}$ が定義される. $Y := D(S^{1/2})$ とし, $(u, v)_Y := (S^{1/2}u, S^{1/2}v), u, v \in Y$ とする. このとき Y は ノルム $\|v\|_Y := (v, v)_Y^{1/2}$ を備え, X に連続かつ稠密に埋め込まれた Hilbert 空間である.

$\{A(t)\}$ と S について次のように仮定する:

(I) 次を満たす $\alpha \in L^1(0, T), \alpha \geq 0$ が存在する:

$$|\operatorname{Re}(A(t)v, v)| \leq \alpha(t) \|v\|^2, \quad v \in D(A(t)), \quad \text{a.a. } t \in (0, T).$$

(II) $Y \subset D(A(t)), \text{ a.a. } t \in (0, T)$.

(III) 次を満たす $\beta \in L^1(0, T), \beta \geq \alpha$ が存在する:

$$|\operatorname{Re}(A(t)u, Su)| \leq \beta(t) \|S^{1/2}u\|^2, \quad u \in D(S), \quad \text{a.a. } t \in (0, T).$$

(IV) $A(\cdot) \in L^2(0, T; B(Y, X))$.

以上の仮定の下で次の定理が証明される.

定理. $f(\cdot) \in L^2(0, T; X) \cap L^1(0, T; Y)$ とする. このとき (E) かつ $u(0) = u_0 \in Y$ の一意強解 $u(\cdot) \in H^1(0, T; X) \cap C([0, T]; Y)$ が存在する.

特に, $A(\cdot)$ が $[0, T]$ 上から $B(Y, X) \rightarrow B(Y, X)$ へ強連続で, α, β が定数の場合の, 主定理は岡沢 [1] において既に証明されている.

2. Schrödinger 発展方程式

$L^2(\mathbb{R}^N)$ における Schrödinger 発展方程式の Cauchy 問題

$$(SE) \quad \begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = (-\Delta_x + V(x, t))u(x, t), & \text{a.a. } t \in (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

を考える. ここで u_0 は $u_0 \in \Sigma(n) := \{v \in H^n(\mathbb{R}^N); |x|^n v \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$ なるものとする. 主定理において

$$A(t) := i(-\Delta_x + V(x, t)), \quad S := \sum_{k=1}^N \left((-1)^n \frac{\partial^{2n}}{\partial x_k^{2n}} + x_k^{2n} \right) \quad (n \geq 2)$$

を導入する. このとき, S の平方根 $S^{1/2}$ が定義でき, 次のようなノルムを備える:

$$\|v\|_{D(S^{1/2})}^2 = \sum_{k=1}^N \left\| \frac{\partial^n v}{\partial x_k^n} \right\|^2 + \|x_k^n v\|^2.$$

スカラーポテンシャル V は以下の条件を満たすものとする:

(V0) $V(\cdot, t) \in C^n(\mathbb{R}^N)$ a.a. $t \in (0, \infty)$,

(V1) $V \in (L^{p_n}(\mathbb{R}^N) + \langle x \rangle^n L^\infty(\mathbb{R}^N)) \times L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^+)$,

(V2) 各 $j \in \mathbb{N}$ ($1 \leq j \leq n$) について,

$$\sum_{k=1}^N \left| \frac{\partial^j V}{\partial x_k^j} \right| \in (L^{p_j}(\mathbb{R}^N) + \langle x \rangle^j L^\infty(\mathbb{R}^N)) \times L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^+).$$

ここで $\langle x \rangle := (1 + |x|^2)^{1/2}$, $\langle x \rangle^j L^\infty(\mathbb{R}^N) := \{u \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N); \langle x \rangle^{-j} u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)\}$. p_j は次元 N と j によって次のように定まるものとする:

$$p_j := \begin{cases} 2 & (j < N/2), \\ N/j & (j > N/2). \end{cases}$$

また, $j = N/2$ のときは $p_j > 2$ なるものとする.

もし, S の代わりに $\tilde{S} := (-\Delta)^n + |x|^{2n}$ を導入するならば, (V2) の代わりに次を仮定する必要がある:

(V2)' 各 $j \in \mathbb{N}$ ($1 \leq j \leq n$) について, $1 \leq j \leq (n+1)/2$ のとき,

$$\sum_{|\alpha|=j} |D_x^\alpha V| \in (L^{p_j}(\mathbb{R}^N) + \langle x \rangle^j L^\infty(\mathbb{R}^N)) \times L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^+).$$

また, $(n+1)/2 < j \leq n$ のとき,

$$\sum_{|\alpha|=k} |D_x^\alpha \Delta_x^{\frac{j-|\alpha|}{2}} V| \in (L^{p_j}(\mathbb{R}^N) + \langle x \rangle^j L^\infty(\mathbb{R}^N)) \times L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^+).$$

ここで $k = k(j, n)$ は

$$k = \begin{cases} n/2 & (n : \text{even}, j - n : \text{even}), \\ n/2 - 1 & (n : \text{even}, j - n : \text{odd}), \\ (n-1)/2 & (n : \text{odd}, j - n : \text{even}), \\ (n+1)/2 & (n : \text{odd}, j - n : \text{odd}) \end{cases}$$

なるものとする.

参考文献

- [1] N. Okazawa, Remarks on linear evolution equations of hyperbolic type in Hilbert space, Adv. Math. Sci. Appl. **8** (1998), 399–423.

$L^2(\mathbf{R}^N)$ における特異な potential つき 4 階の楕円型作用素の自己共役性について

田村 博志 (東京理科大学大学院理学研究科博士 1 年)

$H := L^2(\mathbf{R}^N)$ を複素 Hilbert 空間, $A := \Delta^2$, $B := |x|^{-4}$ をそれぞれ H で極大な定義域上で定める. A, B それぞれは H で正定値自己共役になる. 本講演では $\kappa \in \mathbf{R}$ につき $A + \kappa B$ が (正定値, または非負) 自己共役となるための κ の条件を見出す. 得られた主張は以下の通りである.

定理. H, A, B , を上記のものとする. 次元に応じた定数 $\kappa_0(N)$ を導入する:

$$\kappa_0(N) := \begin{cases} 112 - 3(N - 2)^2, & N \leq 8 \text{ のとき,} \\ -\frac{N}{16}(N - 8)(N^2 - 16), & N \geq 9 \text{ のとき.} \end{cases}$$

そのとき次の (i), (ii) が成立する.

(i) $N \leq 8$ の場合: $\kappa > \kappa_0(N)$ につき B は $(A + \kappa B)$ -有界となる. すなわち

$$\|Bu\| \leq (\kappa - \kappa_0(N))^{-1} \|(A + \kappa B)u\|, \quad u \in D(A + \kappa B) := D(A) \cap D(B).$$

$\kappa > \kappa_0(N)$ につき $A + \kappa B$ は正定値自己共役, $A + \kappa_0(N)B$ は正定値かつ本質的
自己共役となる.

(ii) $N \geq 9$ の場合: B は A -有界となる. すなわち

$$\|Bu\| \leq (-\kappa_0(N))^{-1} \|Au\|, \quad u \in D(A) \subset D(B).$$

$\kappa > \kappa_0(N)$ につき $A + \kappa B$ は正定値自己共役, $A + \kappa_0(N)B$ は正定値かつ本質的
自己共役となる.

定理を示すために 2 つの不等式を導くことが問題になる. そこで $\varepsilon > 0$ につき
 $B_\varepsilon := B(1 + \varepsilon B)^{-1} = B$ の吉田近似, $(B^{\frac{1}{2}})_\varepsilon := B^{\frac{1}{2}}$ の吉田近似 とおくと

$$\operatorname{Re}(Au, B_\varepsilon u) \geq -\kappa_0(N) \|B_\varepsilon u\|^2, \quad u \in D(A),$$

$$\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 \geq \alpha_0(N) \|(B^{\frac{1}{2}})_\varepsilon u\|^2, \quad u \in D(A^{\frac{1}{2}}), \quad N \geq 5 \quad (\text{Rellich の不等式}).$$

ここに $\kappa_0(N)$ は定理中のもので

$$\alpha_0(N) := \frac{N^2}{16}(N - 4)^2.$$

定理の証明のカギは極大単調作用素の摂動定理と上述の2つの不等式である。2つの不等式の意味は $\operatorname{Re}(Au, B_\varepsilon u)$ の評価が $A + \kappa B$ が閉であることを導く指標となり, $\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2$ と $\|B_\varepsilon^{\frac{1}{2}}u\|^2$ の関係が $A + \kappa B$ の符号を決定している。

$\kappa_0(N)$ は $N \leq 8$ のときまでは正で, $N = 9$ のとき負に転じて, それ以降は $-\infty$ に発散する。正定値性に関しても Δ^2 と $|x|^{-4}$ の距離が N^4 のオーダーで離れていく。このことから次元が高くなるにしたがって $|x|^{-4}$ の特異性がだんだん薄れていき, やがて Δ^2 に吸収されてしまう様子がうかがえる。この事実の研究はすでに $L^p(\mathbb{R}^N)$ にも一般化され, E. B. Davies, A. M. Hinz [1] は $(-\Delta)^m$ と $|x|^{-2m}$ の関係が変わる境目が $2mp$ であることを示唆している (今回は $m = 2, p = 2$ で $2mp = 8$)。一般の次元 N で $-\Delta$ と $|x|^{-2}$ の L^p -理論は N. Okazawa [2] によって成されている。斉次性の議論から $N \geq 9$ での $\kappa_0(N)$ の値を予想するのは容易だが, とくに興味深いのは N が小さいとき, すなわち $|x|^{-4}$ の特異性が生きている場合の話である。そこでまず Δ^2 の L^2 -理論から始め, 低次元での様子を探ろうというのが主な動機である。

参考文献

- [1] E. B. Davies, A. M. Hinz, “Explicit constants for Rellich inequalities in $L_p(\Omega)$ ”, Math. Z., **227** (1998), 511-523.
- [2] N. Okazawa, “ L^p -theory of Schrödinger operators with strongly singular potentials”, Japan. J. Math., **22** (1996), 199-239.

On the L_p - L_q maximal regularity for linear thermoelastic plate equation in a bounded domain

内藤 由香 (早大理工)

板の振動を表した thermoelastic plate equation の線形化方程式

$$(*) \quad \begin{aligned} u_{tt} + \Delta^2 u + \Delta \theta &= f & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ \theta_t - \Delta \theta - \Delta u_t &= g & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \Omega \end{aligned}$$

を考える. ここで u は板の変位, θ は温度を表す. $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ とし, Ω は $\mathbb{R}^n (n \geq 2)$ の有界領域, Ω の境界 $\partial\Omega$ は $C^{3,1}$ hypersurface とする. 境界条件は Dirichlet 条件

$$u = D_\nu u = \theta = 0 \quad \text{on } \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega$$

とする. ただし, ν は Ω の単位外法線ベクトルとする. 初期値は

$$u(0, x) = u_0(x), \quad D_t u(0, x) = u_1(x), \quad \theta(0, x) = \theta_0(x)$$

とし、初期値・境界値問題を考える. この方程式系について L_p - L_q maximal regularity が得られたので報告する.

定理 1. $1 < p, q < \infty$ とする. 次を満たす正定数 $\gamma_0 > 0$ が存在するとする:

$U_0 = (u_0, u_1, \theta_0)$, $F = (f, g)$ が次を満たす.

$$(u_0, u_1, \theta_0) \in \mathcal{D}_{q,p}(\Omega), \quad (e^{\gamma t} f, e^{\gamma t} g) \in L_p(\mathbb{R}_+, L_q(\Omega)) \times L_p(\mathbb{R}_+, L_q(\Omega)), \quad (\gamma \in [0, \gamma_0]).$$

このとき (*) はただひとつの解

$$(u, \theta) \in (L_p(\mathbb{R}_+, W_q^4(\Omega)) \cap W_p^1(\mathbb{R}_+, W_q^2(\Omega)) \cap W_p^2(\mathbb{R}_+, L_q(\Omega))) \\ \times (L_p(\mathbb{R}_+, W_q^2(\Omega)) \cap W_p^1(\mathbb{R}_+, L_q(\Omega)))$$

をもち, 次の評価を満たす.

$$\|e^{\gamma t} u\|_{L_p(\mathbb{R}, W_q^4(\Omega))} + \|e^{\gamma t} u\|_{W_p^1(\mathbb{R}, W_q^2(\Omega))} + \|e^{\gamma t} u\|_{W_p^2(\mathbb{R}, L_q(\Omega))} \\ + \|e^{\gamma t} \theta\|_{L_p(\mathbb{R}, W_q^2(\Omega))} + \|e^{\gamma t} \theta\|_{W_p^1(\mathbb{R}, L_q(\Omega))} \leq C_{p,q} \left\{ \|e^{\gamma t} F\|_{L_p(\mathbb{R}, L_q(\Omega))} + \|U_0\|_{\mathcal{D}_{q,p}(\Omega)} \right\}.$$

ここで, それぞれの関数空間は次のように定義した.

$$\begin{aligned} W_{q,0}^2(\Omega) &= \{u \in W_q^2(\Omega) \mid u|_{\partial\Omega} = 0\}, \\ W_{q,D}^4(\Omega) &= \{u \in W_q^4(\Omega) \mid u|_{\partial\Omega} = D_\nu u|_{\partial\Omega} = 0\}, \\ \mathcal{H}_q(\Omega) &= \{F = {}^T(f, g, h) \mid f \in W_{q,D}^2(\Omega), \quad g \in L_q(\Omega), \quad h \in L_p(\Omega)\}, \\ \mathcal{D}_q(\Omega) &= \{U = {}^T(u, v, \theta) \mid u \in W_{q,D}^4(\Omega), \quad v \in W_{q,D}^2(\Omega), \quad \theta \in W_{q,0}^2(\Omega)\}, \\ \mathcal{D}_{q,p}(\Omega) &= [\mathcal{H}_q(\Omega), \mathcal{D}_q(\Omega)]_{1-1/p, p}. \end{aligned}$$

ただし, $[\cdot, \cdot]_{\theta, p}$ は real interpolation functor を表す.

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix}, \quad U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\Delta^2 & 0 & -\Delta \\ 0 & \Delta & \Delta \end{pmatrix}.$$

とおくと, (*) は

$$U_t = AU \quad \text{in } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \quad U|_{t=0} = U_0$$

となる.

$$\mathcal{A}_q U = AU \quad \text{for } U \in \mathcal{D}_q(\Omega)$$

とおくと Denk-Racke-Shibata [1] により以下の結果が知られている.

定理 2. $1 < q < \infty$ とする. \mathcal{A}_q は $\mathcal{H}_q(\Omega)$ 上で analytic semigroup $\{T_q(t)\}_{t \geq 0}$ を生成し, さらに $\{T_q(t)\}_{t \geq 0}$ は次の評価を満たす.

$$\exists \sigma > 0, \quad \forall t > 0, \quad \forall F \in \mathcal{H}_q(\Omega), \quad \|T_q(t)F\|_{\mathcal{H}_q(\Omega)} \leq Ce^{-\sigma t} \|F\|_{\mathcal{H}_q(\Omega)}.$$

ただし正定数 C は t と F によらない.

主定理は定理 2 と operator-valued Fourier multiplier theorem を用いて, Shibata-Shimizu [2] の手法により証明される.

参考文献

- [1] R. Denk, R. Racke and Y. Shibata, *L_p theory for the linear thermoelastic plate equations in bounded and exterior domains*, preprint in 2008.
- [2] Y. Shibata and S. Shimizu, *On the L_p - L_q maximal regularity of the Neumann problem for the Stokes equations in a bounded domain*, J. Reine Angew. Math., 615 (2008) 157-210.

放物型仮似変分不等式の応用における解の存在について

千葉大学大学院自然科学研究科 加納 理成

Abstract result

まず, 抽象理論における仮似変分不等式の解の存在について, 簡単に紹介しておく.
 H を Hilbert 空間, X を回帰的 Banach 空間とし, その間にはコンパクトな埋め込みがあるとす. また, 正の数 δ_0 に対して Banach 空間 $\mathcal{V}(-\delta_0, t)$ を以下のように定義する:

$$\mathcal{V}(-\delta_0, t) := W^{1,2}(-\delta_0, t; H) \cap L^\infty(-\delta_0, t; X), \quad 0 \leq t \leq T.$$

$\forall v \in \mathcal{V}(-\delta_0, t)$, に対して, 凸関数 $\{\varphi^s(v; \cdot)\}_{0 \leq s \leq t}$, は以下の条件を満たすとす.

($\Phi 1$) $\varphi^s(v; \cdot)$ は H 上の非負適正下半連続凸関数で,

$$v_1, v_2 \in \mathcal{V}(-\delta_0, t), \quad v_1 = v_2 \text{ on } (-\delta_0, s) \text{ ならば } \varphi^s(v_1; z) = \varphi^s(v_2; z)$$

($\Phi 2$) $\varphi^s(v; z) \geq C_0 |z|_X^2$, $0 \leq \forall s \leq t$, $\forall v \in \mathcal{V}(-\delta_0, t)$, ($C_0 > 0$: 定数)

($\Phi 3$) If $0 \leq s_n \leq t \leq T$, $v_n \in \mathcal{V}(-\delta_0, t)$, $s_n \rightarrow s$ and $v_n \rightarrow v$

weakly in $W^{1,2}(-\delta_0, t; H)$ and weakly $*$ in $L^\infty(-\delta_0, t; X)$,

このとき $\varphi^{s_n}(v_n; \cdot) \rightarrow \varphi^s(v; \cdot)$ on H in the sense of Mosco.

仮似変分不等式

$$\text{CP}(u_0, f) \begin{cases} u'(t) + \partial\varphi^t(u; u(t)) \ni f(t) \text{ in } H, \quad t \in (0, T), \\ u(t) = u_0(t) \text{ in } H, \quad -\delta_0 \leq t \leq 0. \end{cases}$$

の可解性は次の命題によって与えられる.

Proposition.1. 任意の $M > 0$ に対して, 以下の条件を満たす非負関数 $a_M \in L^2(0, T)$, $b_M \in L^1(0, T)$, が存在すると仮定する.

(**H1**) For each $v \in \mathcal{V}_M(-\delta_0, T)$, $\{\varphi^s(v; \cdot)\}$ satisfies that $\forall s, t \in [0, T]$ with $s \leq t$ and $\forall z \in D(\varphi^s(v; \cdot)) \exists \tilde{z} \in D(\varphi^t(v; \cdot))$ such that

$$\begin{cases} |\tilde{z} - z|_H \leq \int_s^t a_M(\tau) d\tau (1 + \varphi^s(v; z)^{\frac{1}{2}}), \\ \varphi^t(v; \tilde{z}) - \varphi^s(v; z) \leq \int_s^t b_M(\tau) d\tau (1 + \varphi^s(v; z)). \end{cases}$$

このとき, $f \in L^2(0, T; H)$, $\varphi^0(u_0; u_0(0)) < +\infty$ となる $u_0 \in W^{1,2}(-\delta_0, 0; H) \cap L^p(-\delta_0, 0; X)$ に対して, $\text{CP}(u_0, f)$ は $[0, T']$ ($0 < T' \leq T$) 上で少なくとも一つ解を持ち, 次を満たす.

$$u \in \mathcal{V}(-\delta_0, T') \quad \sup_{0 \leq t \leq T'} \varphi^t(u; u(t)) < \infty.$$

Remark(時間大域解の存在)

Banach 空間 $\tilde{\mathcal{V}}(-\delta_0, t)$ を以下のように定義する,

$$\tilde{\mathcal{V}}(-\delta_0, t) := L^\infty(-\delta_0, t; H) \cap L^2(-\delta_0, t; X), \quad 0 \leq t \leq T.$$

条件 (H1) に関して, $\mathcal{V}(-\delta_0, t)$ を $\tilde{\mathcal{V}}(-\delta_0, t)$ に置き換えて弱めた条件 ($\tilde{H}1$) を与え, さらに次の条件 ($\tilde{H}3$) を加える.

($\tilde{H}3$) there are a positive number R_0 and a family $\{h_v\} := \{h_v; v \in \tilde{\mathcal{V}}(-\delta_0, T)\}$ of functions in $W^{1,2}(0, T; H)$ such that

$$|h_v|_{W^{1,2}(0, T; H)} \leq R_0, \quad \int_0^T \varphi^t(v; h_v(t)) dt \leq R_0, \quad \forall v \in \tilde{\mathcal{V}}(-\delta_0, T).$$

Proposition.2. 任意の $M > 0$ に対して, ($\tilde{H}1$) を満たす非負関数 $a_M \in L^2(0, T)$, $b_M \in L^1(0, T)$, が存在すると仮定する. また ($\tilde{H}3$) を満たすとする. このとき, $f \in L^2(0, T; H)$, $\varphi^0(u_0; u_0(0)) < +\infty$ となる $u_0 \in W^{1,2}(-\delta_0, 0; H) \cap L^p(-\delta_0, 0; X)$ に対して, $\text{CP}(u_0, f)$ は少なくとも一つ時間大域解を持つ.

Application

Ω を \mathbb{R}^3 上の滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域, κ, ν を正定数, h を \mathbb{R}^3 上の滑らかな有界関数, $g(u) = (g_1(u), g_2(u))$ を \mathbb{R}^2 上の滑らかなベクトル値関数とする. 任意の実数 θ に対して, \mathbb{R}^2 上のコンパクト凸集合 $K_0(\theta)$ が与えられる. $0 < \delta_0 < \infty$, $0 < T < \infty$ とする.

このとき, 次の仮似変分不等式 (AP) を考える.

$$(\text{AP}) \left\{ \begin{array}{l} \theta_t - \kappa \Delta \theta = h(\theta, u) \text{ in } Q := (0, T) \times \Omega \\ u \in K_0(\theta) \text{ in } Q \\ \int_0^T \int_\Omega u_{1t}(u_1 - v_1) + \int_0^T \int_\Omega u_{2t}(u_2 - v_2) + \nu \int_0^T \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla(u_1 - v_1) \\ + \nu \int_0^T \int_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla(u_2 - v_2) + \int_0^T \int_\Omega g(u) \cdot (u - v) \leq \int_0^T \int_\Omega f \cdot (u - v) \\ \text{for } \forall v \in L^2(0, T; H^1(\Omega)^2), v \in K_0(\theta) \text{ in } Q \\ \theta = 0 \text{ on } \Sigma := (0, T) \times \partial\Omega \\ \theta(0, \cdot) = \theta_0 \text{ in } \Omega \\ u = u_0 \text{ in } (-\delta_0, 0] \times \Omega. \end{array} \right.$$

本講演ではこの連立系で表現される仮似変分不等式の可解性について述べる.

References

1. Risei Kano, Applications of abstract parabolic quasi-variational inequalities to obstacle problems, *preprint*
2. Risei Kano, Nobuyuki Kenmochi, Yusuke Murase, Nonlinear evolution equations generated by subdifferentials with nonlocal constraints, *preprint*
3. R. Kano, N. Kenmochi and Y. Murase, Elliptic Quasi-Variational Inequalities and Applications, *preprint*,

ある楕円型仮似変分問題の可解性について

村瀬勇介 (千葉大・自然科学)

X は回帰的実 Banach 空間, X^* は X の共役空間とし, X, X^* は共に狭義凸であるとする。
 A は X から X^* への (一般的には多価の) 作用素である。また, $|\cdot|_X$ でノルムを, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で X^* と X の duality pairing を表すとする。

定義 $\tilde{A}: X \times X \rightarrow X^*$ は次の (SM1) 及び (SM2) を満たすとする。

(SM1) $\tilde{A}(v, \cdot)$; maximal monotone, $D(\tilde{A}(v, \cdot)) = X$ for $\forall v \in X$

(SM2) $\{v_n\} \subset X, v_n \rightarrow v$ weakly in $X \implies \forall u^* \in \tilde{A}(v, u), \exists u_n^* \in \tilde{A}(v_n, u)$ s.t. $u_n^* \rightarrow u^*$ in X^*

このとき, \tilde{A} は semi-monotone であるという。

定理 (R. Kano-N. Kenmochi-Y. M. [1], Y. M. [2])

$\tilde{A}: D(\tilde{A}) = X \times X \rightarrow X^*$ は有界な semi-monotone 作用素とし, $Au := \tilde{A}(u, u)$ と表すこととする。

$\forall v \in X$ に対して, $K(v) \subset X$ は空でない閉凸部分集合であり次を満たすとする。

・有界閉凸集合 $G_0 \subset X$ が存在し, $K(v) \cap G_0 \neq \emptyset$ for $\forall v \in X$ を満たす。

・ $\inf_{w^* \in Aw} \frac{\langle w^*, w-v \rangle}{|w|_X} \rightarrow \infty$ as $|w|_X \rightarrow \infty$ uniformly in $v \in G_0$,

さらに次の (K1), (K2) を満たすとする。

(K1) $\{v_n\} \subset X, v_n \rightarrow v$ weakly in $X \implies \forall w \in K(v), \exists w_n \in K(v_n)$ s.t. $w_n \rightarrow w$ in X

(K2) $v_n \rightarrow v$ weakly in $X, w_n \in K(v_n), w_n \rightarrow w$ weakly in $X \implies w \in K(v)$

このとき, $\forall g^* \in X^*$ に対して (QVI) は少なくとも一つ解 u を持つ。

$$(QVI) \quad \begin{cases} u \in K(u), u^* \in Au; \\ \langle u^* - g^*, u - v \rangle \leq 0 \text{ for } \forall v \in K(u) \end{cases}$$

仮似変分不等式の応用

Ω は \mathbb{R}^N 上の滑らかな境界を持つ有界領域とし, $u = (u_1, u_2)$ は \mathbb{R}^2 のベクトル場, u_i はそれぞれ Ω 上の関数とする。また, 各 $\theta \in \mathbb{R}$ に対してコンパクトで凸な部分集合 $K_0(\theta) \subset \mathbb{R}^2$ が対応しているものとする。

本研究では次の系についての考察を行った。

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\kappa \Delta \theta = h(\theta, u) & \text{in } \Omega \\ \theta = 0 & \text{on } \partial\Omega \\ u = (u_1, u_2) \in K_0(\theta) & \text{in } \Omega \\ \int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla (u_1 - z_1) dx + \int_{\Omega} \nabla u_2 \cdot \nabla (u_2 - z_2) dx + \int_{\Omega} g_1(u)(u_1 - z_1) dx + \int_{\Omega} g_2(u)(u_2 - z_2) dx \\ \leq \int_{\Omega} f_1(u_1 - z_1) dx + \int_{\Omega} f_2(u_2 - z_2) dx & \\ \text{for } z = (z_1, z_2) \in (H^1(\Omega))^2, z \in K_0(\theta) \text{ in } \Omega & \end{array} \right.$$

但し, $h = h(\theta, u)$ は第 1 変数について非増加, 第 2 変数については Lipschitz 連続となる $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ 上の有界関数であり, $g_i = g_i(v)$ は共に Lipschitz 連続で, 次の条件を満たす関数である。

$$\forall M > 0, \exists c_0 > 0, \exists c_1(M) > 0 \text{ s.t. } g(w) \cdot (w - v) \geq c_0 |w|_X^2 - c_1(M) \text{ for } \forall w \in \mathbb{R}^2, |v|_{\mathbb{R}^2} \leq M$$

また, 各 $\theta \in \mathbb{R}$ に対して \mathbb{R}^2 から \mathbb{R}^2 への C^2 級微分同相写像で $X_\theta(K_0(0)) = K_0(\theta)$, かつ $\theta \mapsto X_\theta \in D^2(\mathbb{R}^2)$ が C^2 級となる X_θ が存在するとする。これを用いて, $\forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ に対して, $X_{\theta_1, \theta_2} := X_{\theta_2} \circ X_{\theta_1}^{-1} \in D^2(\mathbb{R}^2)$ と定義すると, $X_{\theta_1, \theta_2}(K_0(\theta_1)) = K_0(\theta_2)$ となる。

《主定理》

\tilde{A} は有界かつ semi-monotone, $Au = \tilde{A}(u, u)$ とする。 $\forall \theta \in \mathbb{R}$ に対してコンパクト凸集合 $K_0(\theta)$ が対応しており, X_θ, g_1, g_2 , 及び関数 h が上に書かれた条件を満たしているとする。このとき, $\forall f = (f_1, f_2) \in (L^2(\Omega))^2$ に対し少なくとも一つ解 $(\theta, u) \in (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \times H^1(\Omega)^2$ が存在する。

(proof) 以下の通りに定義すれば, 次の補題によって抽象定理が適用できる。

$$\begin{aligned} X &= H^1(\Omega) \times H^1(\Omega), \quad \tilde{A} : X \times X \rightarrow X^* \\ \langle \tilde{A}(v, u), w \rangle &= \int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla w_1 dx + \int_{\Omega} \nabla u_2 \cdot \nabla w_2 dx + \int_{\Omega} g_1(v) w_1 dx + \int_{\Omega} g_2(v) w_2 dx \\ K(v) &= \{w \in (H^1(\Omega))^2 \mid w \in K_0(\Lambda v) \text{ a.e. on } \Omega\} \\ G_0 &= \{w \in (H^1(\Omega))^2 \mid |w|_{(H^1(\Omega))^2} \leq M_1\} \end{aligned}$$

ここで Λ は $\forall u \in H^1(\Omega)$ に対して下の方程式の解 θ を与える作用素である。

$$\begin{cases} -\kappa \Delta \theta = h(\theta, u) & \text{in } \Omega \\ \theta = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

《補題》 任意の $M > 0$ に対して, M のみに依存する正定数 $C(M)$ が存在して次を満たす。

$$(1) \quad \forall |\theta_k| \leq M \ (k = 1, 2, 3, 4), \quad \forall |v_i| \leq M \ (v = (v_1, v_2), i = 1, 2) \\ \implies |X_{\theta_1, \theta_2}^{(i)}(v) - X_{\theta_3, \theta_4}^{(i)}(v)| \leq C(M)(|\theta_1 - \theta_3| + |\theta_2 - \theta_4|) \quad (i = 1, 2)$$

$$(2) \quad \theta_1, \theta_2 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \text{ and } v_1, v_2 \in H^1(\Omega), \quad |\theta_1|, |\theta_2|, |v_1|, |v_2| \leq M$$

$$\implies \left| \frac{\partial X_{\theta_1, \theta_2}^{(i)}(v)}{\partial x_j} - \frac{v_i}{x_j} \right| \leq C(M) (|\nabla \theta_1| + |\nabla \theta_2| + |\nabla v| + 1) (|\nabla(\theta_1 - \theta_2)| + |\theta_1 - \theta_2|) \\ \text{for } i = 1, 2, \ j = 1, 2, \dots, N, \text{ a.e. on } \Omega.$$

参考文献

- [1] Risei Kano, Nobuyuki Kenmochi, Yusuke Murase :An existence theorem for elliptic quasi-variational inequalities in Banach spaces. *Recent Advance in Nonlinear Analysis: Proceedings of the International Conference on Nonlinear Analysis (2008)*, pp. 149–170
- [2] Yusuke Murase :Abstract quasi-variational inequalities of elliptic type and applications. *(To be published; Banach Center Publications)*
- [3] Risei Kano, Nobuyuki Kenmochi, Yusuke Murase :Elliptic quasi-variational inequalities and applications. *(preprint)*

Hölder stability in inverse problems for the Schrödinger equation

加藤 孝盛 (名古屋大学大学院 多元数理科学研究所)

本講演では, Schrödinger 方程式の低階項の係数を決定するという逆問題について考える. まず, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は有界な領域であり, その境界 $\Gamma := \partial\Omega$ は C^2 級であると定める. $(0, T) \times \Omega$ 上で次の初期値境界値問題を考える.

$$\begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \Delta u(t, x) - p(x)u(t, x) = 0 & \text{in } (0, T) \times \Omega, \\ u(t, x) = 0 & \text{on } (0, T) \times \Gamma, \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (1)$$

ある程度滑らかな (1) の解が存在するとする. このとき Γ の空でない任意の開集合 Γ_1 上に観測データである Neumann データが与えられれば, 逆問題の解の一意性と安定性が従うことを証明するのが本講演の目的である.

関連する Schrödinger 方程式を扱った既存の結果をとしては, Baundouin and Puel [2] が観測領域を光学幾何条件を満たす部分境界 Γ_1 , つまり $\Gamma_1 := \{x \in \Gamma; (x - x_0) \cdot \nu(x) \geq 0, x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}\}$ としたとき, 逆問題の解の Lipschitz stability を導いた. また Bellassoued [1] は波動方程式に対する逆問題において, Ω に含まれる Γ の任意の部分境界 ω 上で低階項の係数の情報が得られているとき, 観測領域を任意の部分境界とすれば logarithmic stability が得られること証明した. Bellassoued [2] は, 可制御性の結果を応用することで観測領域に課せられる幾何条件を削減することに成功した. 私の結果はこの理論を応用し, Schrödinger 方程式に対する可制御性の結果を導出し, 任意の部分境界 Γ_1 を観測することで Hölder stability が成立することを証明した.

既存の結果に対する改善点としては, Schrödinger 方程式に対する逆問題で観測領域を何の幾何条件も課さない部分境界にできた. また, 波動方程式を扱った Bellassoued [2] に対して安定性評価の精度を Hölder stability に高めることができ, 観測時間 $T > 0$ を十分大きくとる必要がなくなった.

主定理のステートメントを述べる. 低階項の係数 p は次の関数空間に属するとする.

$$\Lambda(\omega, M, \eta) := \{p \in W^{1, \infty}(\Omega); \|p\|_{W^{1, \infty}(\Omega)} \leq M, p(x) = \eta(x) \text{ in } \omega\}$$

ここで M は正の定数とし, η は ω 上滑らかな関数とした.

主定理(stability estimate)

$u_0 \in H_0^1(\Omega)$ とし, ある $\varepsilon_0 > 0$ があり $|u_0(x)| \geq \varepsilon_0$ in $\overline{\Omega \setminus \omega}$ を満たしているとする. また $u \in H^1((0, T); L^\infty(\Omega))$, $\partial_\nu u \in H^1((0, T); L^2(\Omega))$ を満たすような (1) の解 u が存在するとする. $p, q \in \Lambda(\omega, M, \eta)$ に対応する (1) の解をそれぞれ u_p, u_q とおくとある $T > 0$ と $\mu \in (0, 1)$ が存在して次の評価が従う.

$$\|p - q\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\partial_t(\partial_\nu u_p - \partial_\nu u_q)\|_{L^2((0, T); L^2(\Gamma_1))}^\mu \quad (2)$$

ここで $C = C(\Omega, \omega, M, T, \|u_0\|_{H^1(\Omega)}) > 0$ は $p, q \in \Lambda(\omega, M, \eta)$ に依存しない定数とする.

系(uniqueness theorem)

主定理と同様の仮定の下で $\partial_\nu u_p(t, x) = \partial_\nu u_q(t, x)$ on $(0, T) \times \Gamma_1$ が成立しているとき, $p(x) = q(x)$ in Ω かつ $u_p(t, x) = u_q(t, x)$ in $(0, T) \times \Omega$ が従う.

安定性評価から一意性は直ちに導ける.

主定理の証明の鍵となる Schrödinger 方程式に対する可制御性の結果をを述べる.

補題

主定理と同様の仮定の下で $v := \partial_t u_p - \partial_t u_q$ とおく. このときある $T > 0$ と $\mu \in (0, 1)$ が存在して次の評価が成立する.

$$\int_0^T \|v(t, \cdot)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \leq C \|\partial_\nu v\|_{L^2((0, T); L^2(\Gamma_1))}^{2\mu} \quad (3)$$

ここで $\omega(\rho, 3\rho) := \{x \in \Omega; \rho \leq \text{dist}(x, \Gamma) \leq 3\rho\}$ とする.

この補題より主定理を示すためには $\|p - q\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^T \|v(t, \cdot)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt$ を示せばよいことがわかり, これは Schrödinger 方程式に対するエネルギー評価と Carleman 評価を用いれば証明できる.

参考文献

- [1] Bellassoued M. *Global logarithm stability in inverse hyperbolic problem by arbitrary boundary observation*, Inverse Problems, **20**, 2004, 1033-1052
- [2] Baundouin L and Puel J-P. *Uniqueness and stability in an inverse problem for the Schrödinger equation*, Inverse Problems, **18**, 2002, 1537-1554

半古典ハートリー方程式のWKB解析

眞崎 聡 (京都大学)

正のパラメータ ε を持つ次の半古典ハートリー方程式を考える.

$$i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta u^\varepsilon = \lambda(|x|^{-\gamma} * |u^\varepsilon|^2)u^\varepsilon, \quad u^\varepsilon(0, x) = a_0^\varepsilon(x) \exp(i\frac{\phi_0(x)}{\varepsilon}), \quad (1)$$

但し $(t, x) \in \mathbb{R}^{1+N}$ で, $N \geq 3$, $\gamma > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ とする. a_0^ε は複素数値, ϕ_0 は実数値とする. この方程式において, $\varepsilon \rightarrow 0$ としたときに解 u^ε がどのような漸近挙動を示すかを調べる. 我々の目的は WKB 型の近似を正当化することである. つまり

$$u^\varepsilon(t, x) = e^{i\frac{\phi(t, x)}{\varepsilon}} (b_0(t, x) + \varepsilon b_1(t, x) + \varepsilon^2 b_2(t, x) + \dots) \quad (2)$$

という, 位相と振幅が分かれている形の近似解を求めたい. ここで, 位相を表す関数 ϕ はパラメータ ε に依存しないものを用いるとする.

このような形の近似解を得る際, 考えられる最も単純な方法は, $u^\varepsilon(t, x) = e^{i\phi(t, x)/\varepsilon} a^\varepsilon(t, x)$ という形を方程式に代入することである. この手法は方程式が線型である場合には上手く働く, 実際, $(i\varepsilon\partial_t + (\varepsilon^2/2)\Delta)u_{\text{lin}}^\varepsilon = 0$ に代入すると

$$\varepsilon^0 \text{の項} \Rightarrow \partial_t \phi + \frac{1}{2}|\nabla \phi|^2 = 0, \quad \text{アイコナール方程式}$$

$$\varepsilon^1 \text{の項} \Rightarrow \partial_t a^\varepsilon + \nabla \phi \cdot \nabla a^\varepsilon + \frac{1}{2}a^\varepsilon \Delta \phi = 0, \quad \text{輸送方程式}$$

のようになるので, まずアイコナール方程式から ϕ が決まり, その後で a^ε を決定 (もしくは近似) することにより (2) が得られる. しかし, この議論は非線形方程式である (1) にはそのままでは適用できない. それはアイコナール方程式に非線形項に由来する項 $\lambda(|x|^{-\gamma} * |a^\varepsilon|^2)$ が現れるからである. この項によって, アイコナール方程式は単独で解くことができなくなる. またこの量は ε に依存しているので, ϕ をパラメータ ε と無関係に取ることができなくなる.

ここでは Grenier による次のような方法を用いる. 上で述べた問題点を解決するため, まず ϕ が ε に依存することを許し ϕ^ε とおく. そしてアイコナール方程式と輸送方程式を同時に解く, つまり次のシステムを解くことを考える.

$$\begin{cases} \partial_t a^\varepsilon + \nabla \phi^\varepsilon \cdot \nabla a^\varepsilon + \frac{1}{2}a^\varepsilon \Delta \phi^\varepsilon = i\frac{\varepsilon}{2}\Delta a^\varepsilon, \\ \partial_t \phi^\varepsilon + \frac{1}{2}|\nabla \phi^\varepsilon|^2 + \lambda(|x|^{-\gamma} * |a^\varepsilon|^2) = 0, \\ a^\varepsilon(0, x) = a_0^\varepsilon(x), \quad \phi^\varepsilon(0, x) = \phi_0(x) \end{cases} \quad (3)$$

ここでこのシステムの解 $(a^\varepsilon, \phi^\varepsilon)$ に対して, $a^\varepsilon \exp(i\phi^\varepsilon/\varepsilon)$ は (1) の厳密解となることに注意する. さらにもし, この解 $(a^\varepsilon, \phi^\varepsilon)$ の ε のべきによる展開

$$a^\varepsilon = b_0 + \varepsilon b_1 + \varepsilon^2 b_2 + \cdots, \quad \phi^\varepsilon = \psi_0 + \varepsilon \psi_1 + \varepsilon^2 \psi_2 + \cdots,$$

が得られれば, 解の WKB 近似 (2) を得ることが出来る. この手法は非線型方程式に適しており, E. Grenier ([1]) において $|u|^2 u$ という非線型項に対して初めて示され. 以後 Alazard and Carles, Chiron and Rousset などにより様々な非線型項に対して応用がなされている. 非線型項の違いによって手法が異なっており, 現時点ではべき乗型などの局所非線型項では $\lambda < 0$ が取り扱えていない. 以下, 我々の主結果を述べる. 詳細は [2].

定義 1. $N \geq 3, s > N/2 + 1, p \in [1, \infty], q \in [1, N[$ に対し $Y_{p,q}^s(\mathbb{R}^N) := \overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^N)}^{\|\cdot\|_{Y_{p,q}^s}}$ と定める, ただし $\|\cdot\|_{Y_{p,q}^s} := \|\cdot\|_{L^p} + \|\nabla \cdot\|_{L^q} + \|\nabla^2 \cdot\|_{H^{s-2}}$.

仮定 2. $N \geq 3, \max(N/2 - 2, 0) < \gamma \leq N - 2, \lambda \in \mathbb{R}$ とし, a_0^ε は $a_0^\varepsilon \in H^\infty$ でさらに ε について一様に有界, つまり $\exists C > 0$ s.t. $\|a_0^\varepsilon\|_{H^s} \leq C \forall \varepsilon \geq 0, \forall s \geq 0$ を仮定. また, ϕ_0 はある $q_0 \in]N/(\gamma + 1), N[$ に対して $\phi_0 \in Y_{\infty, q_0}^s$ であるとする.

定理 3 (Carles and M.). 仮定 2 が満たされているとする. このとき ε によらない $T > 0$ が存在し, (3) は $(a^\varepsilon, \phi^\varepsilon) \in C([0, T] : H^\infty \times Y_{\infty, q_0}^\infty)$ となる解を持つ. このとき $u^\varepsilon = a^\varepsilon e^{i\frac{\phi^\varepsilon}{\varepsilon}}$ は (1) の区間 $[0, T]$ での厳密解を与える. さらに, 初期振幅 a_0^ε がある $n \geq 0$ に対して

$$a_0^\varepsilon = \sum_{j=0}^n a_j + o(\varepsilon^n) \quad \text{in } H^\infty$$

という展開をもつとき, $b_j \in C([0, T] : H^\infty) (j = 0, 1, \dots, n)$ と $\phi_j \in C([0, T] : Y_{\infty, q_0}^\infty) (j = 0, 1, \dots, n)$ が存在して a^ε と ϕ^ε は次の展開を持つ:

$$a^\varepsilon = \sum_{j=0}^n b_j + o(\varepsilon^n) \quad \text{in } H^\infty, \quad \phi^\varepsilon = \sum_{j=0}^n \psi_j + o(\varepsilon^n) \quad \text{in } Y_{\infty, q_0}^\infty.$$

この定理から, もし初期振幅が $a_0^\varepsilon = a_0 + \varepsilon a_1 + o(\varepsilon)$ という展開を持つならば, 我々の目標であった解の WKB 近似

$$u^\varepsilon(t, x) = e^{i\frac{\psi_0(t, x)}{\varepsilon}} (\beta_0(t, x) + o(1))$$

が得られる. ここで $\beta_0 = b_0 e^{i\psi_1}$ であり, この表示から非線型における WKB 近似では, 振幅の主要部分に初期振幅の ε^1 の項の影響が現れることが分かる. より詳しく述べると, β_0 中の ψ_1 を定めるためには, (b_1, ψ_1) に関するシステム ((3) 中の ε^1 の項についてのシステム) を解く必要があるのだが, その初期条件として初期振幅の ε^1 の項である a_1 が現れるため, この a_1 が ψ_1 に影響を与える. このように位相部分と振幅部分には実は相互作用があり, (3) がそれを記述している.

参考文献

- [1] E. Grenier, *Semiclassical limit of the nonlinear Schrödinger equation in small time*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), no. 2, pp.523–530.
 [2] R. Carles and S. Masaki, *Semiclassical analysis for Hartree equation*, Asymptotic Anal. **58** (2008), no. 4, pp.211–227.

実数直線上の KdV 方程式の初期値問題の適切性

岸本 展^{の3} (京都大学大学院理学研究科 D1)

本講演では、次の KdV 方程式の初期値問題

$$(1) \quad \begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u = \partial_x(u^2), & u : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x \rightarrow \mathbb{R} \text{ (または } \mathbb{C}), \\ u(0, x) = u_0(x) \in H^s(\mathbb{R}), \end{cases}$$

の適切性について考える。ここで H^s は次で定義される Sobolev 空間である。

$$H^s(\mathbb{R}) := \{ \varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \mid \|\varphi\|_{H^s} := \|\langle \xi \rangle^s \hat{\varphi}\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})} < \infty \},$$
$$\langle \xi \rangle := (1 + |\xi|^2)^{1/2}, \quad \hat{\cdot} \text{ は Fourier 変換.}$$

初期値問題が $H^s(\mathbb{R})$ において適切であるとは、一般に、初期値 $u_0 \in H^s$ に対して (i) ある時間区間 $t \in [0, T]$ において方程式を満たす解 $u(t)$ が存在し、(ii) そのような解は適当な関数空間において一意的であり、(iii) 解は $\forall t \in [0, T]$ において初期値と同じ空間 H^s に属し、さらに (iv) 初期値 \mapsto 解の対応が連続である、といった性質をさし、具体的な解の表示が得られにくい非線形偏微分方程式を研究する上で基本的な問題として常に論じられている。個々の初期値に対して個別に $T > 0$ が定まり上記 4 条件を満たすとき時間局所的に適切であるといい、 T が初期値によらずいくらでも大きく取れるとき時間大域的に適切であるという。

KdV 方程式については、運河などを伝播する浅水波のモデルとなるなど多くの物理現象を記述する方程式として古くから盛んに研究が行われ、初期値問題の適切性についても大部分が解明されていると言える。それらを紹介する前に、まず適切性証明の流れを簡単に述べる。

(時間局所) 適切性を得るための手法としては、以下に示すような iteration の方法が一般的である。即ち、Duhamel の原理により初期値問題 (1) を積分方程式

$$u(t) = W(t)u_0 + \int_0^t W(t-t')[\partial_x(u(t'))^2] dt', \quad t \in [0, T]$$

に置き換えた上で、 $u(t, x)$ に対して上式右辺を対応させる写像が適当な Banach 空間 S_T における縮小写像であることを示す。ここで $\{W(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ は KdV 方程式の線形部分 (Airy 方程式) が与える発展群である。この方法を用いれば解の Lipschitz 連続依存性が自然に導かれ、また S_T を $C([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$ に含まれるようにとれば (iii) の性質も得られる。結局、問題は次の 3 つの評価を満たすような Banach 空間 S_T および \mathcal{N}_T (nonlinearity space) を構成することに帰着される。

$$\|W(t)u_0\|_{S_T} \leq C\|u_0\|_{H^s}, \quad \left\| \int_0^t W(t-t')f(t') dt' \right\|_{S_T} \leq C\|f\|_{\mathcal{N}_T},$$
$$\|\partial_x(uv)\|_{\mathcal{N}_T} \leq C\|u\|_{S_T}\|v\|_{S_T}.$$

中でも第 3 式 (双線形評価式) が適切性証明の鍵となる。

Kenig-Ponce-Vega[KPV96] は、Banach 空間

$$X^{s,b} := \{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2) \mid \|u\|_{X^{s,b}} := \|\langle \xi \rangle^s \langle \tau - \xi^3 \rangle^b \hat{u}\|_{L^2_{\tau,\xi}(\mathbb{R}^2)} < \infty \}$$

を解空間 S に取り、(1) の $s > -\frac{3}{4}$ での時間局所適切性を得た (\mathcal{N} としては空間 $X^{s,b-1}$ を用いる)。実数のパラメータ b は通常 $\frac{1}{2}$ より大きく取るので、このノルムは Fourier 空間において曲線 $\{\tau = \xi^3\}$ から離れたところに多く分布する関数ほど大きくなる。Airy 方程式の解は Fourier 空間でちょうどこの曲線上に分布するので、KdV 方程式の非線形部分を摂動とみなせばその解もまた曲線の近くに分布することが予想され、 $X^{s,b}$ が解を探す空間として適当であることがわかる。

さらに実数値の場合はこの結果を大域的にできることが Colliander 他 [CKSTT] によって示された。この際用いられた “I-method” と呼ばれる手法は、保存則が意味を持たなくなる低い正則性 (今の場合 $s < 0$) において大域解を構成する際に効果的であり、他の多くの方程式にも有効であることがわかっている。

しかしながら、 $s \leq -\frac{3}{4}$ において同様に空間 $X^{s,b}$ を用いることはできない。実際、証明に本質的に必要となる双線形評価式は反例 ([KPV96],[NTT]) が知られている上に、 $s < -\frac{3}{4}$ に対してはそもそも (1) がある意味で不適切であることが証明されている [KPV01]。

$s = -\frac{3}{4}$ については、iteration の方法ではなく、ある変換を用いて別の方程式に帰着させることで時間局所適切性が示された [CCT] が、この場合は解の一意性がその変換の像の中でしか言えず、Banach 空間である $X^{s,b}$ で一意性が成り立っている $s > -\frac{3}{4}$ の場合に比べて弱い適切性である。この結果は、与えられた関数に変換の像に入るかどうかの判定が困難なことから、大域適切性のための I-method の適用が難しいということの、少なくとも 2 点において十分なものではない。

今回の結果は、(1) の $s = -\frac{3}{4}$ の場合にも他と同様の iteration の方法で適切性が証明できる、というものである。この結果に I-method を適用することは容易であり、従って大域適切性も得られる。解を探す空間 S_T としては、 $X^{-3/4,1/2}$ に “Besov 空間” 的な修正を加えたものと $C(H^{-3/4})$ との共通部分を考える。 $X^{-3/4,1/2}$ を用いた場合の双線形評価式の反例がなくなるように、うまく修正を加えるところが最大のポイントである。

定理. (1) は $s = -\frac{3}{4}$ のとき時間局所的に適切である。特に、解は Banach 空間 S_T において一意である。

系. 実数値の場合、(1) は $s = -\frac{3}{4}$ のとき時間大域的に適切である。

参考文献

- [CCT] M. Christ, J. Colliander and T. Tao, Amer. J. Math. **125** (2003), 1235–1293.
- [CKSTT] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 705–749.
- [KPV96] C.E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), 573–603.
- [KPV01] C.E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, Duke Math. J. **106** (2001), 617–633.
- [NTT] K. Nakanishi, H. Takaoka and Y. Tsutsumi, Methods Appl. Anal. **8** (2001), 569–578.

非線形シュレディンガー方程式の 定在波解について

前田昌也 (京都大学理学研究科)

この講演では次の非線形シュレディンガー方程式

$$iu_t = -\Delta u + V(x)u - (|x|^{-1} * |u|^2)u, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3, \quad (1)$$

の定在波解の集中点について考察する. ただし, $*$ は畳み込み積である. 定在波解とは (1) の $u(t, x) = e^{i\omega t}\varphi_\omega$ という形をした解であり, このとき φ_ω は

$$-\Delta\varphi_\omega + (V + \omega)\varphi_\omega - (|x|^{-1} * |\varphi_\omega|^2)\varphi_\omega = 0 \quad (2)$$

の解である.

方程式 (1) は Bose-Einstein 凝縮 (BEC) や非線形光学においてモデル方程式となっている. BEC においては (1) のエネルギー汎関数

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla u|^2 + V|u|^2) dx - \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u(x)|^2 |u(y)|^2}{|x-y|} dx dy,$$

を L^2 ノルム一定の条件下で最小化する関数が極低温下での Bose ガスの振る舞いを記述していると考えられている. (最小化関数は定在波になる.)

今回は, L^2 ノルム一定の条件下での最小化関数について L^2 ノルムを大きくしていったときの挙動を調べる.

定義 1 (基底状態解). 次の集合を, 基底状態解と呼ぶ.

$$\mathcal{G}_\alpha := \left\{ u \in H_V^1 \mid \|u\|_{L^2} = \alpha, \mathcal{E}(u) = \inf_{\|v\|_{L^2} = \alpha} \mathcal{E}(v) \right\},$$

ただし, $H_V^1 = \{u \in H^1 \mid V|u|^2 \in L^1\}$.

Aschbacher 達 [1] は L^2 ノルム α が大きくなるにつれ, 基底状態解はその L^2 ノルムの大部分をポテンシャル V のある最小点に集中させるこ

とを示した. 今回, 我々は基底状態解が V のどの集中点に集中するか, 及び基底状態解の L^2 ノルム α に依存した形での指数減衰について調べた.

以下, ポテンシャル $V \in C^3(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ について次を仮定する.

$$(V1) \quad 0 = \inf_{x \in \mathbb{R}^3} V(x) < \lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = \sup_{x \in \mathbb{R}^3} V(x) \leq \infty.$$

$$(V2) \quad \beta \text{ を多重指数とする. } |\beta| \leq 3 \text{ のとき, ある } r > 0 \text{ について } |\partial^\beta V(x)| \leq C(1 + |x|)^r.$$

これらの仮定の下では, 基底状態解の存在は保証されている.

命題 1. 各 $\alpha > 0$ について, $\mathcal{G}_\alpha \neq \emptyset$.

以下に主定理を述べる.

定理 1. α を十分大きいとする. このとき, L^2 ノルムが α の任意の基底状態解 $u \in \mathcal{G}_\alpha$ は唯一つの極大点 $y_{\alpha, u} \in \mathbb{R}^3$ を持ち, 次を満たす.

$$u(x) \leq C\alpha^4 \exp(-C\alpha^2|x - y_{\alpha, u}|).$$

さらに任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある α_ε が存在し, 任意の $\alpha \geq \alpha_\varepsilon$ と $u \in \mathcal{G}_\alpha$ に対し, u の唯一の極大点 $y_{\alpha, u}$ は Θ_ε に含まれる. ただし,

$$\Theta_\varepsilon := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \inf_{y \in \Theta} |x - y| < \varepsilon \right\},$$

$$\Theta := \left\{ x \in V^{-1}(\{0\}) \mid \Delta V(x) = \min_{y \in V^{-1}(\{0\})} \Delta V(y) \right\}.$$

この定理により, 基底状態解は V の最小点の中でも ΔV の値が最も小さいものを選択して集中することがわかる.

注意 1. この結果は Hartree 型非線形項だけでなく, 冪乗型非線形項においても適用可能である. また, 半古典近似の場合においても適用できる. 半古典近似の場合は Wang [2] により最小点に集中していることが示されているので, その結果の精密化を与える.

参考文献

- [1] W. H. Aschbacher, J. Fröhlich, G. M. Graf, K. Schnee, and M. Troyer, *Symmetry breaking regime in the nonlinear Hartree equation*, J. Math. Phys., **43** (2002), 3879–3891.
- [2] X. Wang, *On concentration of positive bound states of nonlinear Schrödinger equations*, Commun. Math. Phys., **153** (1993), 229–244.

非線型シュレディンガー方程式系に対する定在波解

早稲田大学大学院基幹理工学研究科 生駒 典久

次の非線型連立シュレディンガー方程式系を考える:

$$\begin{cases} i\frac{\partial\psi_1}{\partial t} + \Delta_x\psi_1 + \lambda_1(x)\psi_1 + (\mu_1|\psi_1|^2 + \beta|\psi_2|^2)\psi_1 = 0 & \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^N, \\ i\frac{\partial\psi_2}{\partial t} + \Delta_x\psi_2 + \lambda_2(x)\psi_2 + (\beta|\psi_1|^2 + \mu_2|\psi_2|^2)\psi_2 = 0 & \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (1)$$

ここで $N = 2, 3$ とし $\mu_1, \mu_2, \beta > 0$ は定数とする. (1) の解で定在波解について考える. 定在波解とは $\psi_j(t, x) = e^{\bar{\lambda}_j t} u_j(x)$ という形の解のことである. したがって, 以下の方程式系について考える:

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + V_1(x)u_1 = \mu_1 u_1^3 + \beta u_1 u_2^2 & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta u_2 + V_2(x)u_2 = \beta u_1^2 u_2 + \mu_2 u_2^3 & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ u_1, u_2 > 0, u_1, u_2 \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (2)$$

ただし, $V_j(x) = \bar{\lambda}_j - \lambda_j(x)$ とする. この講演では $V_j(x) (j = 1, 2)$ は次を満たすとする.

$$(V1) \quad V_j(x) \in C^1(\mathbb{R}^N),$$

$$(V2) \quad 0 < \inf_{\mathbb{R}^N} V_j \leq \sup_{\mathbb{R}^N} V_j = V_{j,\infty} < \infty,$$

$$(V3) \quad V_j(x) \rightarrow V_{j,\infty} \quad \text{as } |x| \rightarrow \infty.$$

ここでは $\mu_1, \mu_2 > 0$ を固定し, $\beta > 0$ をパラメータとみて (2) の解の存在, 非存在を議論する. $V_j(x) = \text{const.} > 0 (j = 1, 2)$ のときは, ある $0 < \beta_1 < \beta_2$ が存在して, $0 \leq \beta < \beta_1$ または $\beta_2 < \beta$ であれば (2) の球対称解が存在する (Ambrosetti-Colorado [1, 2], Sirakov [3]).

この講演では, ポテンシャル $V_1(x), V_2(x)$ が x に依存する場合を考える. このときは球対称な関数空間で考えることができない. (2) の解を得るために汎関数 $I : H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$I(u) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_j|^2 + V_j(x)u_j^2 \, dx - \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 u_1^4 + 2\beta u_1^2 u_2^2 + \mu_2 u_2^4 \, dx$$

により定め, $I'(u) = 0$ となる点 $u = (u_1, u_2), u_1 \neq 0, u_2 \neq 0$ を求める. (2) を解析する上で困難な点は以下の点等である.

1. ‘半自明解’が存在する (Remark 1).

2. I が (PS) 条件を満たさない.

ここで, I が (PS) 条件をみたすとは, $(I(u_m))_{m=1}^{\infty}$ が有界で, $I'(u_m) \rightarrow 0$ を満たせば, (u_m) が強収束部分列を持つときを言う. (V1)–(V3) を仮定したとき, 以下が成り立つ.

Theorem 1. (V1)–(V3) を仮定する. このとき, ある $0 < \tilde{\beta}_1 < \tilde{\beta}_2$ が存在して次が成り立つ.

1. $0 \leq \beta < \tilde{\beta}_1$ ならば (2) の解が存在する.

2. $\tilde{\beta}_2 < \beta$ ならば (2) の解が存在する.

Theorem 1 の証明においては Nehari 多様体 \mathcal{N} とその部分多様体 \mathcal{M} , Concentration-Compactness Lemma を使う. ここで, \mathcal{N} , \mathcal{M} は

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &:= \{u = (u_1, u_2) \in (H^1(\mathbb{R}^N))^2 \mid u \neq (0, 0), \quad I'(u)u = 0\}, \\ \mathcal{M} &:= \{u = (u_1, u_2) \in M \mid u_1, u_2 \neq 0, \quad I'(u)(u_1, 0) = I'(u)(0, u_2) = 0\}\end{aligned}$$

で定められる. \mathcal{N} , \mathcal{M} の上で I の挙動を調べるのが証明のポイントになる. ここでは

$$b_{\mathcal{N}} := \inf_{\mathcal{N}} I, \quad \hat{b}_{\mathcal{M}} = \inf_{\mathcal{M}} I$$

が達成されるかどうかを見る.

Remark 1. $u_1 \equiv 0$ とすれば方程式 (2) は

$$\begin{cases} -\Delta u_2 + V_2(x)u_2 = \mu_2 u_2^3 & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ u_2 > 0, \quad u_2 \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases} \quad (3)$$

に帰着される. $V_2(x)$ が (V1)–(V3) をみたせば (3) は正值解を持つことはよく知られている. (2) の解を得るためにはこのような ‘半自明解’ に注意しなければならない.

Remark 2. G.-M. Wei [4] は $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V_j(x) = \infty$ の状況の下で (2) を考察し解の存在を得ている. このとき, 適切に関数空間を設定すれば I は (PS) 条件をみたす.

参考文献

- [1] A. Ambrosetti and E. Colorado. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **342** (2006).
- [2] A. Ambrosetti and E. Colorado. *J. Lond. Math. Soc.* (2), **75** (2007).
- [3] B. Sirakov. *Comm. Math. Phys.*, **271** (2007).
- [4] G.-M. Wei. *J. Math. Anal. Appl.*, **332** (2007).

Stark ポテンシャルを伴った 非線形 Schrödinger 方程式の時間大域解について

中村能久 (熊本大学大学院 自然科学研究科)

次の Stark ポテンシャルのついた非線形 Schrödinger 方程式の初期値問題を考える.

$$i\partial_t u = -\frac{1}{2}\Delta u + V(x)u + F(u), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

ここで $n = 2, 3$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\Delta = \sum_{j=1}^n \partial_j^2$, $\partial_j = \partial_{x_j} = \partial/\partial x_j$.

$$V(x) = -x_1 = E \cdot x, \quad E = \begin{cases} (-1, 0, 0) & (n = 3), \\ (-1, 0) & (n = 2). \end{cases},$$

$$H_E = -\frac{1}{2}\Delta + E \cdot x,$$

非線形項 $F(u) = \lambda_0|u|^2u + \lambda_1u^3 + \lambda_2\bar{u}^3 + \lambda_3u\bar{u}^2$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, 1, 2, 3$, である.

Stark ポテンシャル効果を伴った非線形 Schrödinger 方程式 (NLS) の散乱理論においていくつかの結果が知られている. 非線形項がゲージ不変性を持つ場合は, Avron-Herbst の公式により, $V(x) \equiv 0$ である (1) の既存の結果に帰着できる ([2] 参照). 非線形項がゲージ不変性を持たない場合は, 終値問題に関しては大きな時間に対する非線形項の増大度を与えられた漸近状態の正則性を上げることにより解決されている ([7] 参照). 今回得られた結果は初期値問題すなわち (1)-(2) の時間大域解の存在, および解の漸近状態の存在に関してである ($E = 0$ の場合は, 例えば [3] 参照). 関数空間

$$H^{s,m} = \{f \in \mathcal{S}' \mid \|f\|_{s,m,p} = \|\langle x \rangle^m \langle i\partial \rangle^s f\|_{L^2} < \infty\}, \quad H^s = H^{s,0},$$

を導入する. ここで $\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}$, $\langle i\partial \rangle = (1 - \Delta)^{1/2}$.

定理 1 ([6]) 空間次元 $n = 3$, $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{C}$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $u_0 \in H^4 \cap H^{3,1} \cap H^{1,2}$ を仮定する. このとき次を満足する十分小さい $\varepsilon > 0$ が存在する: $\|u_0\|_{H^4 \cap H^{3,1} \cap H^{1,2}} = \varepsilon$ であるような (1)-(2) の時間大域解 u が一意に存在し, 次を満たす.

$$U(\cdot)U_E(-\cdot)u \in C([0, \infty); H^4 \cap H^{3,1} \cap H^{1,2}),$$

$$\sup_{t \geq 0} \{\|U_E(-t)u(t)\|_{H^4} + \|xU_E(-t)u(t)\|_{H^3} + \|x^2U_E(-t)u(t)\|_{H^1}\} < 4\varepsilon.$$

ここで $U_E(t) = e^{-itH_E}$. 特に $U_0(t) = e^{\frac{it}{2}\Delta}$. さらにこのとき $u_+ \in H^4 \cap H^{2,1} \cap H^{0,2}$ が一意に存在し, 次を満たす.

$$\sup_{t \geq 0} \langle t \rangle \|U_E(-t)u(t) - u_+\|_{H^4 \cap H^{2,1} \cap H^{0,2}} < C\varepsilon^3.$$

ここで定数 $C > 1$ は ε に依存しない.

定理 2 (cf. [4, 5]) 空間次元 $n = 2$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, 1, 2, 3$, $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ を仮定する. このとき次を満足する十分小さい $\varepsilon > 0$ が存在する: $\|u_0\|_{L^2} = \varepsilon$ であるような (1)-(2) の時間大域解 u が一意に存在し, 次を満たす.

$$u \in C([0, \infty); L^2) \cap L^4(0, \infty; L^4).$$

さらにこのとき $u_+ \in L^2$ が一意に存在し, 次を満たす.

$$\|U_E(-t)u(t) - u_+\|_{L^2} \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow \infty.$$

注意 1 定理 1 の証明は, *Avron-Herbst* の公式により, 初期値問題 (1)-(2) をポテンシャルの影響のない問題に変換して行う. このときゲージ不変性のない非線形項に関しては時間および空間のポテンシャル方向に依存する振動が生じるため, 解の微分及び解の重み付き評価は時間に関して増大する. 実際, 1階の微分に対して1次の時間増大度が, 1次の重み付き評価に対して2次の時間増大度が生じる. この振動に関して部分積分する事により必要な減衰度が得られ, (1)-(2) の時間大域解の存在が証明される.

注意 2 空間 3次元で $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{C}$, $\lambda_3 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\lambda_3 = 0$ の場合は, 初期値 $u_0 \in H^5 \cap H^{3,1} \cap H^{1,2}$ が十分小さいという仮定の下で, (1)-(2) の時間大域解の存在および漸近状態の存在が証明できる.

注意 3 定理 2 は, *Strichartz* 評価により証明される (例えば [4, 5] 参照).

参考文献

- [1] J.E. Avron and I.W. Herbst, *Spectral and scattering theory of Schrödinger operators related to the Stark effect*, Commun. Math. Phys., **52** (1977), 239–254.
- [2] R. Carles and Y. Nakamura, *Nonlinear Schrödinger equations with Stark potential* Hokkaido Math. J., **33** (2004), 719–729.
- [3] N. Hayashi, T. Mizumaschi and P.I. Naumkin, *Time decay of small solutions to quadratic nonlinear Schrödinger equations in 3D*, Differential Integral Equations, **16** (2003), 159–179.
- [4] T. Kato, *Nonlinear Schrödinger equations*, in “Schrödinger Operators”, Lecture Notes in Phys., **345** (Holden, H. and Jensen, A. Eds), Springer-Verlag (1989), 218–263.
- [5] M. Nakamura and T. Ozawa, *Nonlinear Schrödinger equations in the Sobolev space of critical order*, J. Funct. Anal., **155** (1998), 364–380.
- [6] Y. Nakamura, *On global existence of solutions to nonlinear Schrödinger equations with Stark potential in three space dimensions*, preprint, 2008.
- [7] A. Shimomura and S. Tonegawa, *Remarks on long range scattering for nonlinear Schrödinger equations with Stark effects*, J. Math. Kyoto Univ., **45** (2005), 205–216.

有界領域における強退化移流拡散方程式

渡邊 紘 (中央大学大学院 理工学研究科 数学専攻)

以下の形の非線形移流拡散方程式の初期値境界値問題を考える。

$$(IBVP) \quad \begin{cases} u_t + \nabla \cdot A(x, t, u) + B(x, t, u) = \Delta\beta(u), & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial\beta(u)}{\partial\mathbf{n}}(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & u_0 \in L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega). \end{cases}$$

ここで、 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は Lipschitz 領域とする。 $\nabla = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_N)$, $\Delta = \sum_{i=1}^N \partial^2/\partial x_i^2$ は \mathbb{R}^N の spatial nabla, Laplacian として、 $[0, T]$ は固定された時間区間である。 $A(x, t, \xi) = (A^1, \dots, A^N)(x, t, \xi)$ を $\bar{\Omega} \times [0, T] \times \mathbb{R}$ 上の \mathbb{R}^N 値の微分可能な関数として、 $B(x, t, \xi)$ は $\bar{\Omega} \times [0, T] \times \mathbb{R}$ 上の実数値の微分可能な関数とする。右辺の関数 β は \mathbb{R} 上単調増加で Lipschitz 連続であると仮定する。 \mathbf{n} は $\partial\Omega$ の各点における単位法線を表す。

$\nabla \cdot A(x, t, u)$ は波のように、物理量 u が上流から下流へ流される現象を表しているため、移流項と呼ばれる。また、 $\Delta\beta(u)$ は熱のように、物理量 u の分布が全体的に均一化していく過程を表していて、拡散項と呼ばれる。よって、この方程式は非線形移流拡散方程式である。形の上では、時間に依存した双曲型保存則と多孔性媒質方程式の線形結合とみなされる。それゆえに、この方程式は多孔性媒質における保存則を記述しているだけでなく、非線形粘性を伴った Bergers 方程式

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = (|u|^{\alpha-1}u)_{xx} \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$$

の一般化された形として考えられる。

また β に対する仮定から、 $\beta'(\xi) = 0$ となる区間が存在する可能性がある。この意味でこの方程式は強退化型であると云う。拡散項の退化性は、移流項から生じる（一般的に shock と呼ばれる）不連続性と相互作用するかもしれない。このことがこの方程式を研究する最大の動機となっている。

本研究は、上記の初期値境界値問題の BV -エントロピー解に注目し、その存在と一意性を証明することを目的としている。 BV -エントロピー解の定義は以下である。

定義 1. $u_0 \in L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ を取る。関数 $u \in L^\infty(\Omega \times (0, T)) \cap BV(\Omega \times (0, T))$ が次の二つの条件を満たすとき、 $(IBVP)$ の BV -エントロピー解と呼ぶ：

- (1) u は $C([0, T]; L^1(\Omega))$ に属して、 $u(\cdot, 0) = u_0$ が成立する。
- (2) $\nabla\beta(u)$ は $L^2(0, T; L^2(\Omega)^N)$ に入り、各 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \times (0, T))^+$ に対して、次の不等式が成立する。

$$\int_0^T \int_\Omega |u - k| \varphi_t dx dt \geq \int_0^T \int_\Omega \operatorname{sgn}(u - k) (\nabla\beta(u) \cdot \nabla\varphi - [A(x, t, u) - A(x, t, k)] \cdot \nabla\varphi + [\nabla \cdot A(x, t, k) + B(x, t, u)] \varphi) dx dt.$$

エントロピー解については、1969年に S.N.Kruzkov [4] により導入され、一階の準線形保存型方程式の初期値問題に対して二重変数法と呼ばれる巧みな方法を用いて一意性が証

明された [5]。境界値問題については、C. Bardos, A. Y. Leroux and J. C. Nedelec [2] により、Dirichlet 問題が BV の枠組みで取り扱われた。その後、Kružkov の方法は二階の項 (拡散項) がついた方程式にも適用された。 $\beta(u) = 0$ という境界条件の下で J. Carrillo [1] がエントロピー解の存在と一意性を証明し、C. Mascia, A. Porretta and A. Terracina [7] は非斉次 Dirichlet 条件の下でエントロピー解の一意性と vanishing viscosity method の適合性を証明した。

本研究の特徴は、強退化移流拡散方程式を有界領域、Neumann 境界条件の下で考え、 BV の枠組みで解の存在と一意性を証明することである。そのために、[2] において仮定された条件と類似の条件を BV -エントロピー解に仮定することにする。

任意の実数 k に対して

$$\int_{\partial\Omega} \operatorname{sgn}(T_r u - k)[A(x, t, T_r u) - A(x, t, k)] \cdot \mathbf{n}(x) d\mathcal{H}^{N-1} \geq 0, \quad t \in [0, T],$$

が成立する。ここで、 $T_r : BV(\Omega) \rightarrow L^1(\partial\Omega; \mathcal{H}^{N-1})$ は trace 作用素である。

本講演では、 BV -エントロピー解の L^1 の意味での初期値への連続的依存性について述べる。

定理 1. ($IBVP$) の BV -エントロピー解 u, v と任意の $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \times (0, T))^+$ に対して、次の不等式が成立する。

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} |u - v| \varphi_t dx dt \geq \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{sgn}(u - v) ([\nabla\beta(u) - \nabla\beta(v)] \cdot \nabla\varphi \\ - [A(x, t, u) - A(x, t, v)] \cdot \nabla\varphi + [B(x, t, u) - B(x, t, v)] \varphi) dx dt. \end{aligned}$$

これによりテスト関数を $\varphi \in C_0^\infty(0, T)^+$ とし、Gronwall の不等式を用いることにより、次のような弱解の初期値への L^1 の意味での連続的依存性が証明される。

$$\|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_1 \leq e^{\omega t} \|u_0 - v_0\|_1$$

ここで ω は $-\partial B(x, t, \xi)/\partial \xi \leq \omega$ を満たす定数である。

REFERENCES

- [1] J. Carrillo, Entropy solutions for nonlinear degenerate problems, Arch. Rational. Anal. 147 (1999) 269-361.
- [2] C. Bardos, A. Y. Leroux and J. C. Nedelec, First order quasilinear equations with boundary conditions, Comm. In Partial differential equations, 4(9), 1017-1034, (1979)
- [3] L. C. Evans and R. Gariepy, Measure theory and fine properties of functions, Studies in Advanced Math., CRC Press, London, (1992). C.R.Acad.Sci.Paris, 318 (1994), 919-924.
- [4] S. N. Kružkov, Generalized solutions of the Cauchy problem in the large for nonlinear equations of first order, Soviet. Math. Dokl., 10 (1969), 785-788.
- [5] S. N. Kružkov, First order quasilinear equations in several independent variables, Math. USSR Sbornik, 10 (1970), 217-243.
- [6] K. Okamoto and S. Oharu, Nonlinear evolution operators associated with nonlinear degenerate parabolic equations, Adv. Math. Sci. Appl., 8(1998), 581-629.
- [7] C. Mascia, A. Porretta and A. Terracina, Nonhomogeneous Dirichlet problems for degenerate parabolic-hyperbolic equations, Arch. Rational Mech. Anal., 163(2002), 87-124.
- [8] A. I. Vol'pert and S. I. Hudjaev, Cauchy's problem for degenerate second order quasi-linear parabolic equations, Math. USSR-Sb., 7(1969), 365-387.
- [9] H. Watanabe, A uniqueness theorem of the BV solutions to nonlinear degenerate parabolic equations, preprint.

Critical Exponent for Logarithmic Nonlinearity of Nonlinear Heat Equation

Shie NISHIKAWA

In [1], Fujita showed for the first time that for the initial value problem of the heat equation on \mathbf{R}^N

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + u^p, \quad u(0, x) = u_0(x)$$

there exists a critical value $p^* = 1 + 2/N$ such that for $1 < p < p^*$ the solution for any non-negative non-zero initial data blows up in finite time, whereas for $p > p^*$ the solution is time-global for sufficiently small non-negative initial data. This phenomenon was extended to many directions. Among others we mention Levine-Meier [2], who showed that in a conical domain with spherical profile Ω the Fujita-type phenomenon occurs for the solutions of the homogeneous Dirichlet boundary condition with the critical exponent $p^* = 1 + 2/(N + \gamma)$, where γ is the positive root of the quadratic equation $\gamma^2 + (N - 2)\gamma - \omega_1 = 0$ and ω_1 is the first Dirichlet eigenvalue of the Laplace-Beltrami operator of the spherical domain Ω . In this article we consider the unbounded domains where $p^* = 1$ in their theory. Namely, we wish to distinguish cylindrical domains and a paraboloidal domains by employing a refined measure for the opening and introducing a corresponding refined nonlinear term. More explicitly, we consider a domain D of the form

$$x_n > |x'|^q + C,$$

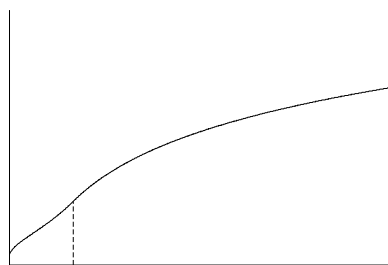
with some $q > 1$. Correspondingly, we consider the mixed problem for the equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + u(\text{logg } u)^p, \quad u(0, x) = u_0(x), \quad u|_{\partial D} = 0, \quad (\text{P})$$

where the new function symbol $\text{logg } u$ in the non-linear term stands for the following one:

$$\text{logg } u = \begin{cases} \log u + 1 & \text{for } u \geq 1, \\ \frac{1}{1 - \log u} & \text{for } 0 < u < 1. \end{cases}$$

We make the convention that $\text{logg } 0 = 0$. The graph of this function is as follows:



graph of $\text{logg } x$

This is a monotone increasing and concave function. Notice that $u \text{logg } u$ as well as $u(\text{logg } u)^p$

for any $p > 0$ becomes convex, as is easily verified by a simple calculation: For $u \geq 1$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{du^2} u(\log u)^p &= \frac{d^2}{du^2} u(\log u + 1)^p = \frac{d}{du} \{(\log u + 1)^p + p(\log u + 1)^{p-1}\} \\ &= \frac{p}{u} (\log u + 1)^{p-1} + \frac{p(p-1)}{u} (\log u + 1)^{p-2} \\ &= \frac{p}{u} (\log u + 1)^{p-2} (\log u + p) > 0 \end{aligned}$$

For $u < 1$ we have

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{du^2} u(\log u)^p &= \frac{d^2}{du^2} \frac{u}{(1 - \log u)^p} = \frac{d}{du} \left\{ \frac{1}{(1 - \log u)^p} + \frac{p}{(1 - \log u)^{p+1}} \right\} \\ &= \frac{p}{u(1 - \log u)^{p+1}} + \frac{p(p+1)}{u(1 - \log u)^{p+2}} > 0 \end{aligned}$$

Here we only consider non-negative solutions with non-negative initial data. Thus unless otherwise mentioned, a solution will always imply a non-negative one.

Abstract result

First we adapt Meyer's abstract criterion for finding critical exponent expressed in terms of the decay rate of the solution of the linear heat equation to our logarithmic type case. In the sequel, a (super- or sub-) solution will always imply a non-negative one unless otherwise mentioned.

Consider the corresponding linear problem:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad u(0, x) = u_0(x), \quad u|_{\partial D} = 0, \quad (\text{P}_0)$$

We first give the following lemma modifying the one by Meier [3] for the case of fractional non-linearity to ours.

Theorem 1) Assume that there exists a non-trivial super-solution W of (P_0) which satisfies, for some $\varepsilon > 0$ and $C > 0$,

$$t^{1+\varepsilon} (\log \|W(t, \cdot)\|_\infty)^{p+1} \leq C. \quad (1)$$

Then a global solution of (P) exists.

2) Assume that for some non-trivial sub-solution W of (P_0) we have

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} t (\log \|W(t, \cdot)\|_\infty)^{p+1} = \infty. \quad (2)$$

Then every solution of (P) blows up in finite time.

References

- [1] H. Fujita, "On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$ ", *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec.1A*, **16** (1966), 105 – 113.
- [2] H. A. Levine and P. Meier, "The value of the critical exponent for reaction-diffusion equations in cones", *Arch. Rational Mech. Anal.* **109** (1990), 73 – 80.
- [3] P. Meier, "On the critical exponent for reaction-diffusion equations", *Arch. Rational Mech. Anal.* **109** (1990), 63 – 71.
- [4] S. Ohta and A. Kaneko, "Critical exponent of blowup for semilinear heat equations on a product domain", *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec.1A*, **40** (1994), 635 – 650.

リブシツ作用素半群入門

– 解が初期値にリブシツ連続的に依存する微分方程式系への応用を目指して –

田中 直樹 (静岡大・理)

1 序論

本論説の目的は、微分方程式系に関する適切性の問題を位相解析的な立場から考察することである。ここでいう適切性とは、解の存在と一意性、及び、解の初期値に関するリブシツ連続的依存性を意味する。微分方程式系に対する適切性の問題を考察するための位相解析的手法として、与えられた微分方程式系を、バナッハ空間 X における作用素 A に対する抽象的コーシー問題

$$u'(t) = Au(t) \quad (t \geq 0), \quad u(0) = x \in D \quad (\subset X) \quad (\text{ACP}; A, x)$$

に書き直して調べる方法 - 作用素半群の理論 - がある。文献 [45], [14], [21] に述べられている考え方をもとに、本研究に適した作用素半群のクラスを導出することから始める。このコーシー問題が、上述の意味で適切である、すなわち、各 $x \in D$ に対して、ある意味の解 $u(t; x)$ が時間大域的に存在し一意であり、その解が初期値にリブシツ連続的に依存するとすれば、

$$S(t)x = u(t; x) \quad (t \geq 0, x \in D)$$

により定まる、 D からそれ自身への作用素族 $\{S(t); t \geq 0\}$ は次の性質をもつ¹。

$$(S1) \quad S(0)x = x \quad (x \in D), \quad S(t+s)x = S(t)S(s)x \quad (s, t \geq 0, x \in D).$$

$$(S2) \quad \text{各 } x \in D \text{ に対して, } S(\cdot)x : [0, \infty) \rightarrow X \text{ は連続である。}$$

$$(S3) \quad \text{各 } \tau > 0 \text{ に対して, } L_\tau > 0 \text{ が存在して}$$

$$\|S(t)x - S(t)y\| \leq L_\tau \|x - y\| \quad (x, y \in D, t \in [0, \tau]).$$

条件 (S1), (S2), (S3) を満たす D からそれ自身への作用素族 $\{S(t); t \geq 0\}$ を D 上のリブシツ作用素半群といい、つぎで定義される作用素 A_0 を $\{S(t); t \geq 0\}$ の無限小生成作用素という。

$$\begin{cases} A_0x = \lim_{h \downarrow 0} (S(h)x - x)/h \quad (x \in D(A_0)), \\ D(A_0) = \{x \in D; \lim_{h \downarrow 0} (S(h)x - x)/h \text{ が存在する} \}. \end{cases}$$

もし、リブシツ作用素半群 $\{S(t); t \geq 0\}$ が、 $x \in D$ に対して $S(\cdot)x \in C^1([0, \infty); X)$ を満たすならば、 $(d/dt)S(t)x = A_0S(t)x \quad (t \geq 0)$ である、すなわち、 $u(t) = S(t)x$ は $(\text{ACP}; A_0, x)$ の解である。いま述べたことは特殊な場合ではあるが、このことから、与えられた作用素 A に対する抽象的コーシー問題 (ACP) が本論説の意味で適切であるかどうかを考察するためには、作用素 A がリブシツ作用素半群の無限小生成作用素であるかどうかを考察すればよい。(命題 2.7 も参照。) このように、微分方程式系に対する適切性の問題は、抽象的コーシー問題 (ACP) の適切性の問題へ、さらに、『リブシツ作用素半群の無限小生成作用素の特徴づけ』の問題に翻訳される。そこで、つぎの節では、リブシツ作用素半群の諸性質を調べ、さらに、リブシツ作用素半群の無限小生成作用素であるための必要条件を与えることにする。

¹作用素半群の理論を解の初期値へのリブシツ連続的依存性に着目して展開するという考え方は、小林良和氏(中央大学・理工)によるもので、本研究もその流れに沿うものである。

2 リブシッツ作用素半群の諸性質

X をバナッハ空間とし、 D を X の部分集合とする。まず、リブシッツ作用素半群の無限小生成作用素の性質を導出するために必要となる命題を紹介する。つぎの命題は、 (C_0) 半群に対する Feller の定理 ([12]) の非線形版と考えられる。

命題 2.1. $\{S(t); t \geq 0\}$ を D 上のリブシッツ作用素半群とする。このとき、定数 $M_X > 0$, $\omega_0 \geq 0$, $X \times X$ 上の非負値汎関数 Φ が存在して、つぎの条件をみたす。

- (i) $|\Phi(x, y) - \Phi(\hat{x}, \hat{y})| \leq M_X(\|x - \hat{x}\| + \|y - \hat{y}\|) \quad ((x, y), (\hat{x}, \hat{y}) \in X \times X).$
- (ii) $\|x - y\| \leq \Phi(x, y) \leq M_X\|x - y\| \quad ((x, y) \in D \times D).$
- (iii) Φ は D 上の距離である。
- (iv) $\Phi(S(t)x, S(t)y) \leq e^{\omega_0 t} \Phi(x, y) \quad (t \geq 0, (x, y) \in D \times D).$

(証明) まず、定数 $M_X \geq 1$, $\omega_0 \geq 0$ が存在して、

$$\|S(t)x - S(t)y\| \leq M_X e^{\omega_0 t} \|x - y\| \quad (x, y \in D, t \geq 0) \quad (2.1)$$

が成立することを示す。そのために、 $x, y \in D, t \geq 0$ とする。 $\tau > 0$ とし、 $t = [t/\tau]\tau + \sigma$, $\sigma \in [0, \tau)$ と表す。但し、 $[a]$ は a の整数部分である。このとき、条件 (S3) により、

$$\|S(t)x - S(t)y\| = \|S(\tau)^{[t/\tau]} S(\sigma)x - S(\tau)^{[t/\tau]} S(\sigma)y\| \leq L_\tau^{[t/\tau]+1} \|x - y\|.$$

$M_X = \max(L_\tau, 1)$, $\omega_0 = \tau^{-1} \log M_X$ と定めれば、 $L_\tau^{[t/\tau]} \leq e^{\omega_0 t}$ であるから、所要の評価 (2.1) を得る。さて、汎関数 $\Phi_0 : D \times D \rightarrow \mathbb{R}_+$ を

$$\Phi_0(x, y) = \sup\{e^{-\omega_0 t} \|S(t)x - S(t)y\|; t \geq 0\} \quad ((x, y) \in D \times D)$$

により定める。(2.1) により、 Φ_0 の定義は意味を持ち、明らかに、 Φ_0 は D 上の距離であり、 $\|x - y\| \leq \Phi_0(x, y) \leq M_X\|x - y\|$ ($x, y \in D$) を満たす。さらに、 $t \geq 0, x, y \in D$ に対して、 $e^{-\omega_0 s} \|S(s)S(t)x - S(s)S(t)y\| = e^{\omega_0 t} e^{-\omega_0(s+t)} \|S(s+t)x - S(s+t)y\| \leq e^{\omega_0 t} \Phi_0(x, y)$ ($s \geq 0$) であるから、 $\Phi_0(S(t)x, S(t)y) \leq e^{\omega_0 t} \Phi_0(x, y)$ ($x, y \in D, t \geq 0$) が成り立つ。よって、この Φ_0 を

$$\Phi(x, y) = \Phi_0(x, y) \quad (x, y \in D) \quad (2.2)$$

となるように $X \times X$ 上の非負値汎関数 Φ へ拡張することができれば、条件 (ii), (iii), (iv) が満たされる。このことを実行するために、 $x, y \in X$ とする。このとき、 $u, v \in D$ に対して、 $\Phi_0(u, v) - M_X(\|x - u\| + \|y - v\|) \leq M_X\|u - v\| - M_X(\|x - u\| + \|y - v\|) \leq M_X\|x - y\|$ であるから、 $X \times X$ 上の非負値汎関数 Φ を

$$\Phi(x, y) = \max(\sup\{\Phi_0(u, v) - M_X(\|x - u\| + \|y - v\|); u, v \in D\}, 0)$$

により定義できる。 $(x, y), (\hat{x}, \hat{y}) \in X \times X$ とするとき、 $u, v \in D$ に対して、 $\Phi_0(u, v) - M_X(\|x - u\| + \|y - v\|) - (\Phi_0(u, v) - M_X(\|\hat{x} - u\| + \|\hat{y} - v\|)) \leq M_X(\|x - \hat{x}\| + \|y - \hat{y}\|)$ であるから、 $\Phi(x, y) \leq \Phi(\hat{x}, \hat{y}) + M_X(\|x - \hat{x}\| + \|y - \hat{y}\|)$ を得る。よって、条件 (i) が成り立つ。(2.2) を示す。 Φ の定義から、明らかに、 $\Phi(x, y) \geq \Phi_0(x, y)$ ($x, y \in D$) である。逆向きの不等式を示すために、 $x, y \in D$ とする。 Φ_0 は D 上の距離であるから、 $u, v \in D$ に対して、 $\Phi_0(u, v) \leq \Phi_0(u, x) + \Phi_0(x, y) + \Phi_0(y, v) \leq$

$M_X(\|x - u\| + \|y - v\|) + \Phi_0(x, y)$ が成り立つ. よって, $\Phi(x, y) \leq \Phi_0(x, y)$ である. したがって, (2.2) が成り立つ. \square

D 上の縮小作用素半群 $\{S(t); t \geq 0\}$ について, 関数 $t \rightarrow S(t)x$ の微分可能性を考察する際に, 重要な役割を果たす集合として,

$$\widehat{D} = \{x \in D; \liminf_{h \downarrow 0} \|S(h)x - x\|/h < \infty\}$$

が導入されている. この定義は, D 上のリブシッツ作用素半群に対しても意味をもつ. つぎのような微分方程式系の混合問題などの解のア・プリオリ評価の抽象版が成立する.

命題 2.2. $\{S(t); t \geq 0\}$ を D 上のリブシッツ作用素半群とする. このとき, 定数 $a_0 \in \mathbb{R}$, 下半連続汎関数 $\psi : X \rightarrow [0, \infty]$ が存在して, つぎの条件をみたす.

- (a) $D(\psi) = \widehat{D}$, 但し, $D(\psi)$ は ψ の有効域である.
- (b) 各 $x \in D(\psi)$, $t \geq 0$ に対して, $S(t)x \in D(\psi)$ かつ $\psi(S(t)x) \leq e^{a_0 t} \psi(x)$.
- (c) $\|S(t+h)x - S(t)x\| \leq h e^{a_0(t+h)} \psi(x)$ ($x \in D(\psi)$, $t, h \geq 0$).

(証明) 定数 $\omega_0 \geq 0$, $X \times X$ 上の非負値汎関数 Φ を命題 2.1 の条件 (i) から (iv) をみたすものとする. 汎関数 $\psi : X \rightarrow [0, \infty]$ を

$$\psi(x) = \begin{cases} \liminf_{h \downarrow 0} \Phi(S(h)x, x)/h & (x \in D(\psi)), \\ \infty & (\text{その他}) \end{cases} \quad (2.3)$$

により定義する. 但し $D(\psi)$ は $\liminf_{h \downarrow 0} \Phi(S(h)x, x)/h < \infty$ をみたす $x \in D$ 全体の集合とする. 命題 2.1 の条件 (ii) により, 条件 (a) が成り立つ. 汎関数 ψ の下半連続性を示すために,

$$\Phi(S(t+s)x, S(t)x) \leq \psi(x) \int_0^s e^{\omega_0(t+\xi)} d\xi \quad (x \in D(\psi), t, s \geq 0) \quad (2.4)$$

を示す. そのために, $x \in D(\psi)$, $t \geq 0$ とし, $f \in C([0, \infty); \mathbb{R})$ を $f(s) = \Phi(S(t+s)x, S(t)x)$ ($s \geq 0$) により定める. このとき, 命題 2.1 の条件 (iii), (iv) により

$$(f(s+h) - f(s))/h \leq \Phi(S(t+s+h)x, S(t+s)x)/h \leq e^{\omega_0(t+s)} \Phi(S(h)x, x)/h \quad (h > 0)$$

であるから, $D_+ f(s) \leq e^{\omega_0(t+s)} \psi(x)$ ($s \geq 0$) である. 但し, $D_+ f$ は f のディニー微分を表す. よって, 所要の不等式 (2.4) を得る. さて, $x \in X$, $r > 0$, $\psi(x_n) \leq r$ ($n \geq 1$), $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$) とする. このとき, 不等式 (2.4) で $(t, s, x) = (0, h, x_n)$ とし, $n \rightarrow \infty$ とすれば, $\Phi(S(h)x, x)/h \leq r h^{-1} \int_0^h e^{\omega_0 \xi} d\xi$ ($h > 0$) を得る. 右辺は $h \downarrow 0$ のとき, 有界であるから, $x \in D(\psi)$ かつ $\psi(x) \leq r$ である. したがって, ψ は下半連続である. 条件 (b), (c) は, 不等式 (2.4) より示せる. \square

これらの命題から, 理論的には, 時間大域的な解が存在し, その解が初期値に関してリブシッツ連続的に依存する微分方程式系については, その解作用素は, 適当な距離に似た汎関数に関して準縮小的になり, さらに, 適当な汎関数に関して指数的成長評価式を満たす. 逆に, このような性質を持つ距離に似た汎関数の構成, 及び, 指数的成長評価式が得られれば, 時間大域的な解が存在し, その解が初期値にリブシッツ連続的に依存することを示すことができると考えられる. これについて, 次節で考察する. それでは, 実用上, このような性質を持つ距離に似た汎関数をどのように構成すればよいのだろうか. また, 指数的成長評価はどのようにすれば得られるのであろうか. このことについて, 以下の例で簡単に触れる.

例 2.3. $\beta \in C^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$, $\beta(0) = 0$, $\beta'(s) \geq m_\beta > 0$ ($s \in \mathbb{R}_+$), $\gamma > 0$ とする. このとき,

$$\begin{cases} u_{tt} = \beta'(\|\nabla u\|^2)\Delta u - \gamma u_t & ((x, t) \in \Omega \times (0, \infty)) \\ u = 0 & ((x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty)) \end{cases}$$

を例にとり, 指数的成長評価 (ア・プリアリ評価) の導出を考えてみる. 但し, Ω は有界領域であり, $\|v\|$ により v の標準的な L^2 ノルムを表す.

$X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ における作用素 \mathcal{A} を

$$\begin{cases} \mathcal{A}(u, v) = (v, \beta'(\|\nabla u\|^2)\Delta u - \gamma v) & ((u, v) \in D(\mathcal{A})), \\ D(\mathcal{A}) = \{(u, v) \in X; v \in H_0^1(\Omega), \Delta u \in L^2(\Omega)\} \end{cases} \quad (2.5)$$

により定める. 形式的な計算を行うために, $v = u_t, w = v_t$ とおく. このとき, $u_{tt} = \beta'(\|\nabla u\|^2)\Delta u - \gamma u_t$ と u_t との L^2 内積を考えれば,

$$(d/dt)(\beta(\|\nabla u(t)\|^2) + \|v(t)\|^2) = -2\gamma\|v(t)\|^2 \quad (2.6)$$

を得る. $v_t = \beta'(\|\nabla u\|^2)\Delta u - \gamma v$ の両辺を t で微分して得られる式

$$w_t = \beta'(\|\nabla u\|^2)\Delta v - \gamma w + (d/dt)\beta'(\|\nabla u\|^2) \cdot \Delta u$$

と v_t との L^2 内積を考えれば,

$$\begin{aligned} & (d/dt)(\beta'(\|\nabla u(t)\|^2)\|\nabla v(t)\|^2 + \|w(t)\|^2) \\ &= -2\gamma\|w(t)\|^2 - 2\beta'(\|\nabla u(t)\|^2)^{-1}\beta''(\|\nabla u(t)\|^2)\|\nabla v(t)\|^2\langle \gamma v(t) + w(t), v(t) \rangle \\ & \quad + 4\beta'(\|\nabla u(t)\|^2)^{-1}\beta''(\|\nabla u(t)\|^2)\langle \nabla u(t), \nabla v(t) \rangle \langle \gamma v(t) + w(t), w(t) \rangle \end{aligned} \quad (2.7)$$

を得る. そこで, 汎関数 $H : D(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ を

$$H(u, v) = \beta(\|\nabla u\|^2) + \|v\|^2 + \beta'(\|\nabla u\|^2)\|\nabla v\|^2 + \|\beta'(\|\nabla u\|^2)\Delta u - \gamma v\|^2 \quad (2.8)$$

により定めると, $\rho(0) = 0$ をみたく $\rho \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ が存在して,

$$(d/dt)H(u(t), v(t)) + (2\gamma - \rho(H(u(t), v(t))))(\|v(t)\|^2 + \|w(t)\|^2) \leq 0 \quad (t \in [0, \tau_{\max})).$$

但し, τ_{\max} は解が存在する最大時間である. $c_0 > 0$ を $\rho(s) < 2\gamma$ ($s \in [0, c_0]$) をみたくように選ぶとき, これまでの考察から, 集合 D , 汎関数 $\varphi : X \rightarrow [0, \infty]$ を次のように定めれば, 解作用素族 $\{S(t); t \geq 0\}$ は $S(t)(D) \subset D$ ($t \geq 0$) をみたくし, さらに, $a = 0$, $\psi = \varphi$ として, 指数的成長評価をみたく.

$$D = \{(u, v) \in D(\mathcal{A}); H(u, v) \leq c_0\}, \quad (2.9)$$

$$\varphi((u, v)) = \begin{cases} H(u, v) & ((u, v) \in D), \\ \infty & (\text{その他}). \end{cases} \quad (2.10)$$

さらに, この考察から, 与えられた微分方程式の混合問題を議論するためには, つぎにより定義される作用素 $A : D \rightarrow X$ に対する抽象的コーシー問題 (ACP) が適切であることを調べればよいことが分かる. (命題 2.7 も参照)

$$A(u, v) = \mathcal{A}(u, v) \quad ((u, v) \in D) \quad (2.11)$$

つぎに、距離に似た汎関数をどのように構成すればよいのかについて、この方程式を題材に 1 つの構成法を述べる。

$v = u_t, w = v_t$ とおく。方程式 $v_t = \beta'(\|\nabla u\|^2)\Delta u - \gamma v$ について変分をとると、

$$\dot{v}_t = \beta'(\|\nabla u\|^2)\Delta \dot{u} - \gamma \dot{v} + 2\beta''(\|\nabla u\|^2)\langle \nabla u, \nabla \dot{u} \rangle \Delta u$$

である。但し、 $\dot{u}(x, t; \theta) = \partial u(x, t; \theta) / \partial \theta$ を表す。上で得られた式と \dot{v} との L^2 内積をとると、 $F \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ が存在して、

$$\begin{aligned} & (d/dt)(\|\dot{v}(t)\|^2 + \beta'(\|\nabla u(t)\|^2)\|\nabla \dot{u}(t)\|^2) \\ &= -2\gamma\|\dot{v}(t)\|^2 + 2\beta''(\|\nabla u(t)\|^2)\langle \nabla u(t), \nabla v(t) \rangle \|\nabla \dot{u}(t)\|^2 \\ & \quad + 4\beta''(\|\nabla u(t)\|^2)\beta'(\|\nabla u(t)\|^2)^{-1}\langle \nabla u(t), \nabla \dot{u}(t) \rangle \langle w(t) + \gamma v(t), \dot{v}(t) \rangle \\ & \leq F(H(u(t), v(t)))(\|\dot{v}(t)\|^2 + \beta'(\|\nabla u(t)\|^2)\|\nabla \dot{u}(t)\|^2) \end{aligned}$$

である。そこで、汎関数 $V : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ を

$$V((u, v), (\hat{u}, \hat{v})) = (\|v - \hat{v}\|^2 + \beta'(\|\nabla u\|^2)\|\nabla(u - \hat{u})\|^2)^{1/2} \quad (2.12)$$

により定める。上述の考察により、定数 $\omega_0 \geq 0$ が存在して、

$$(d/dt)V((u(t), v(t)), (\hat{u}(t), \hat{v}(t))) \leq \omega_0 V((u(t), v(t)), (\hat{u}(t), \hat{v}(t))) \quad (t \geq 0)$$

を得る。よって、 $\Phi = V$ として、条件 (iv) が成り立つ。

注意 2.4. (2.10) で定義される汎関数 φ の選び方は一意的ではなく、 H の代わりに

$$\mathcal{H}(u, v) = \beta(\|\nabla u\|^2) + \|v\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \beta'(\|\nabla u\|^2)^{-1}\|\nabla v\|^2$$

を用いてもよい。方程式 $u_{tt} = \beta'(\|\nabla u\|^2)\Delta u - \gamma u_t$ と $2\Delta u$ との L^2 内積をとると、

$$(d/dt)\|\nabla u_t\|^2 + \beta'(\|\nabla u\|^2)(d/dt)\|\Delta u\|^2 + 2\gamma\|\nabla u_t\|^2 = 0$$

をえる。よって、(2.6) と組み合わせると、 $\hat{\rho}(0) = 0$ をみたく $\hat{\rho} \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ が存在して、

$$(d/dt)\mathcal{H}(u, v) + 2\beta'(\|\nabla u\|^2)^{-1}\|\nabla v\|^2(\gamma - \hat{\rho}(\mathcal{H}(u, v))) \leq 0$$

が成り立つ。また、これをもとに、前述と同じようにして、集合 D を定めることができる。本論説で、(2.8) により定義される汎関数 H を用いる 1 つの理由は、 H が命題 2.2 における (2.3) により定義される汎関数 ψ と同様な役割を果たすと考えられるからである。実際、(2.12) により定まる V を Φ とするとき、 $(u, v) \in D$ ならば、 $\lim_{h \downarrow 0} \|(S(h)(u, v) - (u, v))/h - A(u, v)\| = 0$ であるから、

$$\begin{aligned} \psi(u, v) &= \liminf_{h \downarrow 0} (\Phi(S(h)(u, v), (u, v)))/h \\ &= \liminf_{h \downarrow 0} (\Phi((u, v) + hA(u, v), (u, v)))/h \\ &= (\|\beta'(\|\nabla u\|^2)\Delta u - \gamma v\|^2 + \beta'(\|\nabla u\|^2)\|\nabla v\|^2)^{1/2} \end{aligned}$$

が成り立つ。

偏微分方程式の混合問題の適切性の問題は、1つの方法として、2つの解の差を測るための汎関数を選び、この汎関数に関して解の差が初期値の差に縮小的に依存することを示すことで解決できると考えられる。しかし、2つの解の差を測るものとして、ノルムが用いられることが多く、その方法に対応する理論が単調作用素、縮小作用素半群の理論である。(文献 [3], [9], [10], [16], [17], [20], [28], [29] を参照) この意味において、縮小作用素半群に代わり『リブシッツ作用素半群』の研究が重要になるのではないだろうか。そこで、リブシッツ作用素半群の特徴づけを目指して、まず、 D 上のリブシッツ作用素半群 $\{S(t); t \geq 0\}$ の無限小生成作用素であるための必要条件を述べる。

命題 2.5. $\{S(t); t \geq 0\}$ を D 上のリブシッツ作用素半群とし、 A_0 を $\{S(t); t \geq 0\}$ の無限小生成作用素とする。このとき、定数 $M_X > 0$, $\omega_0 \geq 0$, $X \times X$ 上の非負値汎関数 Φ 及び 下半連続汎関数 $\psi : X \rightarrow [0, \infty]$ が存在して、つぎの条件をみたす。

$$(P1) \quad |\Phi(x, y) - \Phi(\hat{x}, \hat{y})| \leq M_X(\|x - \hat{x}\| + \|y - \hat{y}\|) \quad ((x, y), (\hat{x}, \hat{y}) \in X \times X).$$

$$(P2) \quad \|x - y\| \leq \Phi(x, y) \leq M_X\|x - y\| \quad ((x, y) \in D \times D).$$

$$(P3) \quad \liminf_{h \downarrow 0} (\Phi(x + hA_0x, y + hA_0y) - \Phi(x, y))/h \leq \omega_0\Phi(x, y) \quad (x, y \in D(A_0)).$$

(P4) 任意の $\varepsilon > 0$, $x \in D(A_0)$ に対して、 $\delta \in (0, \varepsilon]$, $x_\delta \in D$ が存在して、

$$\|x + \delta A_0x - x_\delta\| \leq \delta\varepsilon, \quad (\psi(x_\delta) - \psi(x))/\delta \leq \omega_0\psi(x) + \varepsilon.$$

(証明) 命題 2.1 により、定数 $M_X > 0$, $\omega_0 \geq 0$, $X \times X$ 上の非負値汎関数 Φ 及び 下半連続汎関数 $\psi : X \rightarrow [0, \infty]$ が存在して、命題 2.1 の条件 (i) から (iv), 命題 2.2 の条件 (a) から (c) が成り立つ。よって、条件 (P1), (P2) は満たされる。さて、 $x, y \in D(A_0)$ とする。このとき、 $h > 0$ に対して、

$$\begin{aligned} & (\Phi(x + hA_0x, y + hA_0y) - \Phi(x, y))/h \\ & \leq (\Phi(S(h)x, S(h)y) - \Phi(x, y))/h \\ & \quad + M_X(\|x + hA_0x - S(h)x\|/h + \|y + hA_0y - S(h)y\|/h) \end{aligned}$$

であるから、条件 (P3) が成り立つ。条件 (P4) は $x_\delta = S(\delta)x$ として成り立つ。 \square

逆に、 A_0 が条件 (P1) から (P4) を満たすとき、 A_0 は D 上のリブシッツ作用素半群の無限小生成作用素であるか、という問題を次の節から考察する。

この節の最後に、抽象的コーシー問題に関する結果を述べておく。

命題 2.6. $\{S(t); t \geq 0\}$ を D 上のリブシッツ作用素半群とし、 A_0 を $\{S(t); t \geq 0\}$ の無限小生成作用素とする。このとき、つぎが成り立つ。

(i) 各 $t \geq 0$ に対して、 $S(t)(\widehat{D}) \subset \widehat{D}$.

(ii) X が回帰的なバナッハ空間ならば、各 $x \in \widehat{D}$ に対して

$$S(t)x \in D(A_0), \quad (d/dt)S(t)x = A_0S(t)x \quad (\text{a.a. } t > 0).$$

(証明) 条件 (i) は、命題 2.2 (b) そのものである。条件 (ii) を示すために、 $x \in \widehat{D}$ とする。命題 2.2 (c) により、関数 $t \rightarrow S(t)x$ は $[0, \infty)$ の任意の有界区間上リブシッツ連続である。 X が回帰的なので、関数 $t \rightarrow S(t)x$ は、殆んどすべての $t > 0$ に対して、微分可能である。そこで、 t_0 を関数 $t \rightarrow S(t)x$ が微分可能である点とする。このとき、 $(S(h)S(t_0)x - S(t_0)x)/h =$

$(S(t_0 + h)x - S(t_0)x)/h \rightarrow (d/dt)S(t_0)x$ ($h \downarrow 0$) であるから, 無限小生成作用素の定義により, $S(t_0)x \in D(A_0)$, $A_0S(t_0)x = (d/dt)S(t_0)x$ が成り立つ. \square

(C_0) 半群に対する Phillips の定理の非線形版と考えられる, 抽象的コーシー問題の適切性の言葉を利用したリブシッツ作用素半群の無限小生成作用素の特徴づけを与える.

命題 2.7. $A : D \rightarrow X$ を作用素とする. このとき, つぎは同値である.

- (i) 各 $x \in D$ に対して, 右微分可能な連続関数 $u : [0, \infty) \rightarrow D$ が存在し, $(d/dt)^+u(t) = Au(t)$ ($t \geq 0$), $u(0) = x$ を満たす. さらに, 各 $\tau > 0$ に対して, 定数 $L_\tau > 0$ が存在して, u, v を前述のような条件を持つ 2 つの関数とすれば,

$$\|u(t) - v(t)\| \leq L_\tau \|u(0) - v(0)\| \quad (t \in [0, \tau]). \quad (2.13)$$

- (ii) A は D 上のリブシッツ作用素半群 $\{S(t); t \geq 0\}$ の無限小生成作用素である.

(証明) (i) \Rightarrow (ii) を証明する. 各 $x \in D$ に対して, 条件 (i) で存在が保証される関数を $u(t; x)$ と表す. このとき, D からそれ自身への作用素族 $\{S(t); t \geq 0\}$ を $S(t)x = u(t; x)$ ($x \in D, t \geq 0$) により定める. 明らかに, 条件 (S2) を満たし, $S(0)x = x$ である. さて, 半群性を示すために, $s \geq 0$, $x \in D$ とし, $v(t) := S(t+s)x (= u(t+s; x))$ ($t \geq 0$) と定める. このとき, $(v(t+h) - v(t))/h = (u(t+s+h; x) - u(t+s; x))/h \rightarrow (d/dt)^+u(t+s; x) = Au(t+s; x) = Av(t)$ ($h \downarrow 0$) である. $v(0) = S(s)x$ であるから, (2.13) により, $v(t) = S(t)S(s)x$ を得る. 即ち, $S(t+s)x = S(t)S(s)x$ ($t, s \geq 0, x \in D$) である. よって, 条件 (S1) は満たされる. 条件 (S3) は (2.13) により満たされる. よって, $\{S(t); t \geq 0\}$ は D 上のリブシッツ作用素半群である. A が $\{S(t); t \geq 0\}$ の無限小生成作用素であることを示すために, B を $\{S(t); t \geq 0\}$ の無限小生成作用素であるとする. 明らかに, $D(B) \subset D = D(A)$ である. そこで, $x \in D(A) = D$ とする. このとき, $(S(h)x - x)/h = (u(h; x) - u(0; x))/h \rightarrow Au(0; x) = Ax$ ($h \downarrow 0$) であるから, $x \in D(B)$ かつ $Bx = Ax$ を得る. よって, $A = B$ である.

(ii) \Rightarrow (i) を示す. $x \in D$ とし, 連続関数 $u : [0, \infty) \rightarrow D$ を $u(t) = S(t)x$ ($t \geq 0$) により定める. このとき, A が $\{S(t); t \geq 0\}$ の無限小生成作用素であることと $S(t)x \in D = D(A)$ ($t \geq 0$) であることより, $t \geq 0$ に対して, $(u(t+h) - u(t))/h = (S(t+h)x - S(t)x)/h = (S(h)S(t)x - S(t)x)/h \rightarrow AS(t)x$ ($h \downarrow 0$) であるから, $u : [0, \infty) \rightarrow D$ は右微分可能で, $(d/dt)^+u(t) = Au(t)$ ($t \geq 0$) である.

$x \in D$ とする. 上述のように, 右微分可能な連続関数 $u : [0, \infty) \rightarrow D$ が存在して, $(d/dt)^+u(t) = Au(t)$ ($t \geq 0$), $u(0) = x$ を満たすことが示された. $v : [0, \infty) \rightarrow D$ をこのような条件を満たす任意の関数とすると, $v(t) = S(t)v(0)$ ($t \geq 0$) を示すことができれば, 不等式 (2.13) は条件 (S3) から得られる. さて, $v : [0, \infty) \rightarrow D$ をこのような条件を満たす任意の関数とする. $t \geq 0$ とし, $f \in C([0, t]; \mathbb{R})$ を $f(s) := \|S(t-s)v(s) - S(t)v(0)\|$ ($s \in [0, t]$) により定める. $s \in [0, t)$ とする. このとき, $s+h \leq t$ を満たす $h > 0$ に対して,

$$\begin{aligned} (f(s+h) - f(s))/h &\leq \|S(t-s-h)v(s+h) - S(t-s-h)S(h)v(s)\|/h \\ &\leq L_t \|(v(s+h) - v(s))/h - (S(h)v(s) - v(s))/h\| \end{aligned}$$

であり, 右辺は $h \downarrow 0$ のとき 0 に収束する. よって, $D_+f(s) \leq 0$ ($s \in [0, t)$) が成り立つ, 但し, D_+ は Dini 微分を表す. ゆえに, $f(t) \leq f(0)$, 即ち, $v(t) = S(t)v(0)$ ($t \geq 0$) が成り立つ.

3 リブシッツ作用素半群の生成定理

この節の目的は、リブシッツ作用素半群の生成定理について述べることである。命題 2.7 より、右微分可能な解をもつような微分方程式系への応用を目指すには、いかなる条件の下で、作用素 $A : D \rightarrow X$ が D 上のリブシッツ作用素半群の無限小生成作用素となるかを調べればよい。すなわち、一般的には、作用素 A の定義域 $D(A)$ とそれから生成される作用素半群の定義域 D との関係は、 $D(A) \subset D \subset \overline{D(A)}$ であるが、右微分可能な解をもつような微分方程式系への応用を目指すには、作用素 A が与えられたとき、その定義域上のリブシッツ作用素半群を構成せよ、という問題設定となる。

そこで、作用素 $A : D \rightarrow X$ が連続である場合から考察する。

定理 3.1. D を X の閉集合とし、作用素 $A : D \rightarrow X$ は連続であると仮定する。作用素 A が D 上のリブシッツ作用素半群の無限小生成作用素であるための必要十分条件は、定数 $L > 0$, $M \geq m > 0$, $\omega \geq 0$, $X \times X$ 上の非負値汎関数 V が存在して、つぎの条件がみたされることである。

$$(A1) \quad |V(x, y) - V(\hat{x}, \hat{y})| \leq L(\|x - \hat{x}\| + \|y - \hat{y}\|) \quad ((x, y), (\hat{x}, \hat{y}) \in X \times X).$$

$$(A2) \quad m\|x - y\| \leq V(x, y) \leq M\|x - y\| \quad ((x, y) \in D \times D).$$

$$(A3) \quad \liminf_{h \downarrow 0} (V(x + hAx, y + hAy) - V(x, y))/h \leq \omega V(x, y) \quad (x, y \in D).$$

$$(A4) \quad \liminf_{h \downarrow 0} d(x + hAx, D)/h = 0 \quad (x \in D).$$

注目すべきは、線形微分作用素が連続作用素でないことが、連続作用素に関する生成定理の無効さを連想させてしまうが、連続作用素に関する生成定理は非線形微分方程式に関する適切性の問題に有効である。実際、この定理は、非線形波動方程式 $u_{tt} = \sigma(u_x)_x - \gamma u_t$ の時間大域的適切性の問題、及び、実解析的な初期値に対する Kirhhoff 方程式 $u_{tt} = \beta'(\|u_x\|^2)u_{xx}$ の時間大域的適切性の問題に応用された。(文献 [19], [18] を参照。) 条件 (A3) のような汎関数に関する消散条件の概念は、常微分方程式の初期値問題の一意性の問題に関連して、文献 [33], [44], [31] など導入されている。

しかし、この定理は、例 2.3 で取り扱った方程式に関する時間大域的適切性の問題へ応用できない。実際、例 2.3 で取り扱った方程式に関する時間大域的適切性の問題は、(2.9), (2.10), (2.12), (2.11) により定められる D, φ, V, A を用いて、 A に対する抽象的コーシー問題の適切性問題へ翻訳できる。先の考察により、条件 (A1) から (A4) が満たされることは期待されるが、 $A : D \rightarrow X$ の連続性が成り立たないことに原因がある。

そこで、(2.11) により定義される作用素 $A : D \rightarrow X$ の性質を調べてみると、以下に述べるような弱い意味の連続性条件 (C1), (C2) が成り立つ。

$$(C1) \quad (u, v) \in D, (u_n, v_n) \in D \quad (n \geq 1), (u_n, v_n) \rightarrow (u, v) \quad (n \rightarrow \infty) \text{ ならば, } A(u_n, v_n) \rightarrow A(u, v) \quad (n \rightarrow \infty) \text{ である.}$$

実際、 $(u, v) \in D, (u_n, v_n) \in D \quad (n \geq 1), (u_n, v_n) \rightarrow (u, v) \quad (n \rightarrow \infty)$ とする。 $(v_n, w_n) = A(u_n, v_n)$ ($n \geq 1$) とおく。 $\{(v_n(k), w_n(k))\}_{k=1}^\infty$ を $\{(v_n, w_n)\}_{n=1}^\infty$ の任意の部分列とする。 $(u_n, v_n) \in D$ ($n \geq 1$) であるから $\{(v_n(k), w_n(k))\}_{k=1}^\infty$ は X における有界点列である。 X はヒルベルト空間であるから、 $\{(v_n(k), w_n(k))\}_{k=1}^\infty$ は弱収束部分列 $\{(v_n(k(i)), w_n(k(i)))\}_{i=1}^\infty$ をもつ。 $(u_n, v_n) \rightarrow (u, v)$ ($n \rightarrow \infty$) であるから、適当な $w \in L^2(\Omega)$ を用いて、 $\{(v_n(k(i)), w_n(k(i)))\}_{i=1}^\infty$ の弱極限を (v, w) により表すことができる。任意の $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して、 $\langle w_n, \phi \rangle = \langle \beta'(\|\nabla u_n\|^2) \Delta u_n - \gamma v_n, \phi \rangle = -\beta'(\|\nabla u_n\|^2) \langle \nabla u_n, \nabla \phi \rangle - \gamma \langle v_n, \phi \rangle$ であるから、 $n \rightarrow \infty$ とすれば、 $\langle w, \phi \rangle = -\beta'(\|\nabla u\|^2) \langle \nabla u, \nabla \phi \rangle -$

$\gamma\langle v, \phi \rangle$ を得る. よって, $(u, v) \in D(A)$ であり, $(v, w) = A(u, v) = A(u, v)$ を得る. 弱極限が部分列によらないので, $A(u_n, v_n) \rightarrow A(u, v)$ ($n \rightarrow \infty$) である.

(C2) $(u, v) \in D, (u_n, v_n) \in D$ ($n \geq 1$), $(u_n, v_n) \rightarrow (u, v)$ ($n \rightarrow \infty$),
 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \varphi((u_n, v_n)) \leq \varphi((u, v))$ ならば, $A(u_n, v_n) \rightarrow A(u, v)$ ($n \rightarrow \infty$) である.

実際, $(u, v) \in D, (u_n, v_n) \in D$ ($n \geq 1$), $(u_n, v_n) \rightarrow (u, v)$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \varphi((u_n, v_n)) \leq \varphi((u, v))$ とする. $(v, w) = A(u, v)$, $(v_n, w_n) = A(u_n, v_n)$ ($n \geq 1$) とおく. このとき, 上で調べた A の性質から, $(v_n, w_n) \rightarrow (v, w)$ ($n \rightarrow \infty$) である. さらに, $(u_n, v_n) \rightarrow (u, v)$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \varphi((u_n, v_n)) \leq \varphi((u, v))$,

$$\varphi((u, v)) = \beta(\|\nabla u\|^2) + \|v\|^2 + \beta'(\|\nabla u\|^2)\|\nabla v\|^2 + \|\beta'(\|\nabla u\|^2)\Delta u - \gamma v\|^2$$

であるから, $\{\|\nabla v_n\|\}$ が有界列であることに注意すれば,

$$\begin{aligned} & \beta(\|\nabla u\|^2) + \|v\|^2 + \limsup_{n \rightarrow \infty} (\beta'(\|\nabla u\|^2)\|\nabla v_n\|^2 + \|w_n\|^2) \\ & \leq \beta(\|\nabla u\|^2) + \|v\|^2 + \beta'(\|\nabla u\|^2)\|\nabla v\|^2 + \|w\|^2 \end{aligned}$$

である. $\langle\langle (v, w), (\hat{v}, \hat{w}) \rangle\rangle := \beta'(\|\nabla u\|^2)\langle \nabla v, \nabla \hat{v} \rangle + \langle w, \hat{w} \rangle$ が X における内積であることに注意すれば, $(v_n, w_n) \rightarrow (v, w)$ ($n \rightarrow \infty$), $\limsup_{n \rightarrow \infty} (\beta'(\|\nabla u\|^2)\|\nabla v_n\|^2 + \|w_n\|^2) \leq \beta'(\|\nabla u\|^2)\|\nabla v\|^2 + \|w\|^2$ が成立しているので, $(v_n, w_n) \rightarrow (v, w)$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つ.

そこで, $A : D \rightarrow X$ の連続性の代わりに, 上述のような条件のもとで, A に対する抽象的コーシー問題を考察することを考える. 条件を正確に述べることから始める.

条件設定 (H) X をバナッハ空間とし, D を X の部分集合とする. φ は $D(\varphi) = D$ を満たす適正下半連続関数とする. $A : D \rightarrow X$ は次の条件を満たす作用素とする.

(*) $x_n \in D$ ($n \geq 1$), $x \in D$, $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$), $\limsup_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) \leq \varphi(x)$ ならば $Ax_n \rightarrow Ax$ ($n \rightarrow \infty$) である.

このような条件の下で, A に対する抽象的コーシー問題を考察することを正当化してくれる例をもう 1 つ紹介する. H をヒルベルト空間とし, A をつぎの条件を満たす作用素とする, 即ち, $-A$ を極大単調作用素とする.

$$\begin{aligned} \text{値域条件} & \quad R(I - \lambda A) = H \quad (\lambda > 0), \\ \text{消散条件} & \quad \langle x - y, \xi - \eta \rangle \leq 0 \quad (x, y \in D(A), \xi \in Ax, \eta \in Ay). \end{aligned}$$

A^0 を A の標準的制限とする, 即ち, $\|Ax\| = \inf\{\|\eta\|; \eta \in Ax\}$ とするとき,

$$\begin{aligned} A^0 x &= \{\xi \in Ax; \|\xi\| = \|Ax\|\} \quad (x \in D(A^0)), \\ D(A^0) &= \{x \in D(A); \|\xi\| = \|Ax\| \text{ を満たす } \xi \in Ax \text{ が存在する}\} \end{aligned}$$

により定められる作用素とする. このとき, A^0 は, 一価作用素であり, つぎの条件を満たすことが知られている.

$$x_n \in D(A^0), \quad x \in D(A^0), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \|A^0 x_n\| \leq \|A^0 x\|$$

ならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^0 x_n = A^0 x.$$

定理 3.2. 条件設定 (H) を仮定する. $a \in \mathbb{R}$ とする. このとき, A が指数的成長条件

$$\varphi(S(t)x) \leq e^{at}\varphi(x) \quad (x \in D, t \geq 0)$$

を満たす D 上のリブシッツ作用素半群 $\{S(t); t \geq 0\}$ の無限小生成作用素であるための必要十分条件は, 定数 $L > 0, M \geq m > 0, \omega \geq 0, X \times X$ 上の非負値汎関数 V が存在して, つぎの条件 (i) から (iv) が成立することである.

$$(i) \quad |V(x, y) - V(\hat{x}, \hat{y})| \leq L(\|x - \hat{x}\| + \|y - \hat{y}\|) \quad ((x, y), (\hat{x}, \hat{y}) \in X \times X).$$

$$(ii) \quad m\|x - y\| \leq V(x, y) \leq M\|x - y\| \quad ((x, y) \in D \times D).$$

$$(iii) \quad D_+V(x, y)(Ax, Ay) \leq \omega V(x, y) \quad (x, y \in D). \text{ 但し,}$$

$$D_+V(x, y)(\xi, \eta) = \liminf_{h \downarrow 0} (V(x + h\xi, y + h\eta) - V(x, y))/h \quad ((x, y), (\xi, \eta) \in X \times X).$$

$$(iv) \quad \text{任意の } \varepsilon > 0, x \in D \text{ に対して, } \delta \in (0, \varepsilon], x_\delta \in D \text{ が存在して,}$$

$$\|x + \delta Ax - x_\delta\| \leq \delta\varepsilon, \quad (\varphi(x_\delta) - \varphi(x))/\delta \leq a\varphi(x) + \varepsilon.$$

このとき, 抽象的コーシー問題に関してつぎが成り立つ.

(a) 各 $x \in D$ に対して, $S(t)x : [0, \infty) \rightarrow X$ は局所リブシッツ連続, 右微分可能で, 右微係数 $(d/dt)^+S(t)x : [0, \infty) \rightarrow X$ は右連続であり, $(d/dt)^+S(t)x = AS(t)x$ ($t \geq 0$) が成り立つ. (このことから, X が回帰的なバナッハ空間ならば, 各 $x \in D$ に対して, $S(t)x : [0, \infty) \rightarrow X$ は殆ど到る所微分可能で, $(d/dt)S(t)x = AS(t)x$ (a.a. $t > 0$) が成り立つ.)

(b) X_w を弱位相を備えたバナッハ空間 X とする. このとき, $A : D \rightarrow X_w$ が連続ならば, 各 $x \in D$ に対して, $S(t)x \in C^1([0, \infty); X_w)$ であり, $w - (d/dt)S(t)x = AS(t)x$ ($t \geq 0$) が成り立つ. ただし, $w - (d/dt)$ は弱微分を表す.

注意 3.3. 条件設定 (H) のもとで, 条件 (iv) はつぎの条件 (v) と同値である.

$$(v) \quad \text{任意の } \varepsilon > 0, x \in D \text{ に対して, } \delta \in (0, \varepsilon], x_\delta \in D \text{ が存在して,}$$

$$\|x_\delta - x\| \leq \varepsilon, \quad \|x_\delta - \delta Ax_\delta - x\| \leq \delta\varepsilon, \quad (\varphi(x_\delta) - \varphi(x))/\delta \leq a\varphi(x_\delta) + \varepsilon.$$

実際, 条件 (iv) ならば条件 (v) を示すために, $x \in D$ とする. 条件 (iv) より, 各 $n = 1, 2, \dots$ に対して, $x_n \in D, \delta_n \in (0, 1/n]$ が存在して,

$$\|x + \delta_n Ax - x_n\| \leq \delta_n(1/n), \quad (\varphi(x_n) - \varphi(x))/\delta_n \leq a\varphi(x) + 1/n$$

が成り立つ. よって, $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$), $\limsup_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) \leq \varphi(x)$ が成り立つ. 条件設定 (H) により, $Ax_n \rightarrow Ax$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つ. また, φ は下半連続であるから, $\varphi(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n)$ である. よって, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \varphi(x)$ が成り立つ. $\delta_n^{-1}\|x_n - \delta_n Ax_n - x\| \leq \delta_n^{-1}(\|x + \delta_n Ax - x_n\| + \delta_n\|Ax_n - Ax\|) \leq 1/n + \|Ax_n - Ax\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) であり, $(\varphi(x_n) - \varphi(x))/\delta_n - a\varphi(x_n) \leq a(\varphi(x) - \varphi(x_n)) + 1/n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つ. よって, 条件 (v) が成り立つ.

一方, 条件 (v) を仮定する. このとき, 各 $n = 1, 2, \dots$ に対して, $x_n \in D, \delta_n \in (0, 1/n]$ が存在して,

$$\|x_n - x\| \leq 1/n, \quad \|x_n - \delta_n Ax_n - x\| \leq \delta_n(1/n), \quad (\varphi(x_n) - \varphi(x))/\delta_n \leq a\varphi(x_n) + 1/n$$

が成り立つ. 上で述べた証明と同様にして, 条件 (iv) を導くことができる.

注意 3.4. $-A$ をヒルベルト空間 H における極大単調作用素とする. 前述のように, A^0 は, $D = D(A^0)$, $\varphi(x) = \|A^0 x\|$ ($x \in D(A^0)$), $\varphi(x) = \infty$ ($x \in H \setminus D(A^0)$) により定まる下半連続汎関数 φ により, 条件 (H) を満たす. $D(A) = D(A^0)$ であるから, 各 $\lambda > 0$ に対して $R(I - \lambda A^0) = H$ である. これより, 各 $\lambda > 0$, $x \in D(A^0)$ に対して, $x_\lambda \in D(A^0)$ が存在して $x_\lambda - \lambda A^0 x_\lambda = x$ が成り立つ. また, 消散条件 $\langle x - y, A^0 x - A^0 y \rangle \leq 0$ ($x, y \in D(A^0)$) が成り立つので, 条件 (iii) が $V(x, y) = \|x - y\|$ ($x, y \in H$), $\omega = 0$ で満たされる. $(x_\lambda - x)/\lambda = A^0 x_\lambda$ であるから, 消散条件より, $\langle x_\lambda - x, (x_\lambda - x)/\lambda - A^0 x \rangle \leq 0$ が成り立つ. よって, $\|A^0 x_\lambda\| = \|x_\lambda - x\|/\lambda \leq \|A^0 x\|$ が成り立つ. これは, 注意 3.3 の条件が成り立つことを意味する. 定理 3.2 により, A^0 は $D(A^0)$ 上の縮小作用素半群の無限小生成作用素である. このように, 高村による生成定理 ([20]) を定理 3.2 から導くことができる.

注意 3.5. 前述のように, 例 2.3 で定義された作用素 A は条件 (C1) を満たす. つまり, この作用素 A は, 主張 (b) に現れる『 $A : D \rightarrow X_w$ は連続である』という条件を満たす作用素の 1 つの例である.

定理 3.2 を例 2.3 で取り上げた Kirchhoff 方程式

$$\begin{cases} u_{tt} - \beta'(\|\nabla u\|^2)\Delta u + \gamma u_t = 0 & ((x, t) \in \Omega \times (0, \infty)) \\ u = 0 & ((x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty)) \end{cases} \quad (3.1)$$

に対する適切性の問題に適用しよう. 初期値が小さいときに, つぎの関数クラスに属する時間大域的な解 u を見つけることが目的である.

$$C([0, \infty); H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, \infty); L^2(\Omega)) \cap C_w^1([0, \infty); H_0^1(\Omega)) \cap C_w^2([0, \infty); L^2(\Omega))$$

このような関数クラスの解に対して, (2.6) が成り立つので, $\beta(\|\nabla u(t)\|^2) + \|v(t)\|^2 \leq \beta(\|\nabla u_0\|^2) + \|v_0\|^2$ ($t \geq 0$) が成り立つ. 初期値が小さいときに, 時間大域的な解が存在することを示すことが目的であるから, 一般性を失うことなく, 関数 β はつぎの条件を満たすと仮定してよい. 定数 $M_\beta \geq m_\beta > 0$ が存在して,

$$m_\beta \leq \beta'(s) \leq M_\beta \quad (s \in \mathbb{R}_+), \quad |\beta''(s)| \leq M_\beta \quad (s \in \mathbb{R}_+).$$

定理 3.6. 定数 $r_0 > 0$ が存在して, $\|u_0\|_{H^2}^2 + \|v_0\|_{H^1}^2 \leq r_0$ をみたす $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ に対して, u が一意に存在し,

$$u \in C([0, \infty); H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, \infty); L^2(\Omega)) \cap C_w^1([0, \infty); H_0^1(\Omega)) \cap C_w^2([0, \infty); L^2(\Omega))$$

であり, 初期条件 $u(x, 0) = u_0(x)$, $u_t(x, 0) = v_0(x)$, および, (3.1) をみたす.

さらに, 解 $(u(\cdot, t), u_t(\cdot, t))$ は, 初期値 (u_0, v_0) に関して $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ の位相でリプシッツ連続的に依存する.

この定理は, いくつかの命題を組み合わせることにより証明される.

$V = H_0^1(\Omega)$ とする. V はノルム $\|v\|_V = \|\nabla v\|$ ($v \in V$) を備えた回帰的なバナッハ空間である. $X = V \times L^2(\Omega)$ とし, X における作用素 \mathcal{A} を (2.5) により定める. まず, 注意 3.3 の条件 (v) が満たされることを示すために, つぎを証明する.

命題 3.7. 各 $\lambda > 0$ に対して, $R(I - \lambda \mathcal{A}) = X$.

この命題は, $\lambda > 0$, $(u_0, v_0) \in X$ が与えられたとき, $(u_\lambda, v_\lambda) \in D(\mathcal{A})$ が存在して,

$$((u_\lambda, v_\lambda) - (u_0, v_0))/\lambda = \mathcal{A}(u_\lambda, v_\lambda), \quad (3.2)$$

すなわち,

$$\begin{cases} (u_\lambda - u_0)/\lambda = v_\lambda, \\ (v_\lambda - v_0)/\lambda = \beta'(\|\nabla u_\lambda\|^2)\Delta u_\lambda - \gamma v_\lambda \end{cases} \quad (3.3)$$

をみたすことを主張するものである. このことは, Kirchhoff 方程式 (3.1) に対する後退差分方程式の解の存在を保証するものである. 後退差分を採用する理由に, 凸性との相性のよさがある. ノルムの凸性, 関数の凸性と後退差分の相性のよさを実感するために, さらに, β が凸関数であることを仮定し, 定理を証明する.

(命題 3.7 の証明) $\lambda > 0$, $(u_0, v_0) \in X$ とし, V からその共役空間 V^* への作用素 Ψ を

$$\langle \Psi(v), \phi \rangle_{V^*, V} = \lambda \beta'(\|\nabla(u_0 + \lambda v)\|^2) \langle \nabla(u_0 + \lambda v), \nabla \phi \rangle + (1 + \lambda \gamma) \langle v, \phi \rangle \quad (v, \phi \in V)$$

により定める. 明らかに, Ψ は有界である. Ψ の定義により,

$$\begin{aligned} \langle \Psi(v), v \rangle_{V^*, V} &= \lambda \beta'(\|\nabla(u_0 + \lambda v)\|^2) (\langle \nabla u_0, \nabla v \rangle + \lambda \|\nabla v\|^2) + (1 + \lambda \gamma) \|v\|^2 \\ &\geq -\lambda M_\beta \|\nabla u_0\| \|\nabla v\| + \lambda^2 m_\beta \|\nabla v\|^2 \end{aligned}$$

であるから, Ψ は強圧的である. 擬単調であること, 即ち,

$v_n \in V \rightarrow v \in V$ (弱), $\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle \Psi v_n, v_n - v \rangle_{V^*, V} \leq 0$ ならば

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \langle \Psi v_n, v_n - w \rangle_{V^*, V} \geq \langle \Psi v, v - w \rangle_{V^*, V} \quad (w \in V) \quad (3.4)$$

を示す. そのために, $v_n \in V \rightarrow v \in V$ (弱), $\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle \Psi v_n, v_n - v \rangle_{V^*, V} \leq 0$ を仮定する. このとき,

$$\begin{aligned} \langle \Psi v_n, v_n - v \rangle_{V^*, V} &= \lambda \beta'(\|\nabla(u_0 + \lambda v_n)\|^2) (\langle \nabla(u_0 + \lambda v), \nabla(v_n - v) \rangle + \lambda \|\nabla(v_n - v)\|^2) \\ &\quad + (1 + \lambda \gamma) (\langle v, v_n - v \rangle + \|v_n - v\|^2) \end{aligned}$$

であるから, $H^1(\Omega)$ の位相で $v_n \rightarrow v$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つ. このことから, 容易に, (3.4) が成り立つ. よって, Lax-Milgram の定理の非線形版である Brezis の定理 ([4]) により, 任意の $f \in V^*$ に対して, $v \in V$ が存在して $\Psi v = f$ が成り立つ.

そこで, $\langle f, \phi \rangle_{V^*, V} = \langle v_0, \phi \rangle$ ($\phi \in V$) により定義される $f \in V^*$ に対して, $v_\lambda \in V$ が存在して $\Psi v_\lambda = f$ が成り立つ. 即ち,

$$\lambda \beta'(\|\nabla(u_0 + \lambda v_\lambda)\|^2) \langle \nabla(u_0 + \lambda v_\lambda), \nabla \phi \rangle + (1 + \lambda \gamma) \langle v_\lambda, \phi \rangle = \langle v_0, \phi \rangle \quad (\phi \in V).$$

このとき, $u_\lambda = u_0 + \lambda v_\lambda \in V$ を定めれば, (3.3) が満たされる.

命題 3.8. $(u_0, v_0) \in D(\mathcal{A})$ とし, $\{(u_\lambda, v_\lambda)\}_{\lambda > 0} \subset D(\mathcal{A})$ は (3.3) を満たすとする. $H : D(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ を (2.8) により定まる汎関数とする. このとき, つぎが成り立つ.

- (i) $\lim_{\lambda \downarrow 0} (\|u_\lambda - u_0\|_{H^2} + \|v_\lambda - v_0\|_{H^1}) = 0$.
- (ii) 定数 $r_0 > 0$ が存在して, $H(u_0, v_0) \leq r_0$ をみたす $(u_0, v_0) \in H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ に対して, $\lambda_0 > 0$ が存在して $H(u_\lambda, v_\lambda) \leq r_0$ ($\lambda \in (0, \lambda_0]$) が成り立つ.

この命題の証明方法は、先に述べたように、解のエネルギー評価、ア・プリオリ評価、解の減衰評価などを得るときに用いる手法に対応する。

(証明) (2.6) に対応する評価式を得ることから始める. (3.3) と $2v_\lambda (= 2(u_\lambda - u_0)/\lambda)$ の L^2 内積をとると,

$$2\langle v_\lambda - v_0, v_\lambda \rangle / \lambda + 2\beta'(\|\nabla u_\lambda\|^2) \langle \nabla u_\lambda, \nabla(u_\lambda - u_0) \rangle / \lambda + 2\gamma \|v_\lambda\|^2 = 0$$

である. ノルムの凸性から導出される不等式

$$\|u\|^2 - \|v\|^2 \leq 2\langle u, u - v \rangle \quad (u, v \in L^2(\Omega))$$

を用いると,

$$(\|v_\lambda\|^2 - \|v_0\|^2) / \lambda + \beta'(\|\nabla u_\lambda\|^2) (\|\nabla u_\lambda\|^2 - \|\nabla u_0\|^2) / \lambda + 2\gamma \|v_\lambda\|^2 \leq 0 \quad (3.5)$$

が成り立つ. β は凸関数であるから, $\beta(t) - \beta(s) \leq \beta'(t)(t - s)$ ($t, s \geq 0$) が成り立つので, (2.6) に対応する評価式

$$(\|v_\lambda\|^2 - \|v_0\|^2) / \lambda + (\beta(\|\nabla u_\lambda\|^2) - \beta(\|\nabla u_0\|^2)) / \lambda + 2\gamma \|v_\lambda\|^2 \leq 0 \quad (3.6)$$

をえる. つぎに, (2.7) に対応する評価式を得るために

$$\begin{aligned} w_\lambda &= \beta'(\|\nabla u_\lambda\|^2) \Delta u_\lambda - \gamma v_\lambda, \\ w_0 &= \beta'(\|\nabla u_0\|^2) \Delta u_0 - \gamma v_0 \end{aligned}$$

とおく. このとき, $(v_\lambda - v_0)/\lambda = w_\lambda$ であり,

$$(w_\lambda - w_0) / \lambda = \beta'(\|\nabla u_0\|^2) \Delta v_\lambda - \gamma w_\lambda + \lambda^{-1} (\beta'(\|\nabla u_\lambda\|^2) - \beta'(\|\nabla u_0\|^2)) \Delta u_\lambda$$

である. この式と $2w_\lambda (= 2(v_\lambda - v_0)/\lambda)$ の L^2 内積を考えれば,

$$\begin{aligned} & (\|w_\lambda\|^2 - \|w_0\|^2) / \lambda + \beta'(\|\nabla u_0\|^2) (\|\nabla v_\lambda\|^2 - \|\nabla v_0\|^2) / \lambda + 2\gamma \|w_\lambda\|^2 \\ & \leq 2\lambda^{-1} (\beta'(\|\nabla u_\lambda\|^2) - \beta'(\|\nabla u_0\|^2)) \beta'(\|\nabla u_\lambda\|^2)^{-1} \langle w_\lambda + \gamma v_\lambda, w_\lambda \rangle \end{aligned} \quad (3.7)$$

をえる. (3.5), (3.7) より, $\|\nabla u_\lambda\|$, $\|v_\lambda\|$, $\|w_\lambda\|$, $\|\nabla v_\lambda\|$ の有界性を導くことができる. 『回帰的なバナッハ空間の有界集合は弱相対コンパクトである』, 『一様凸なバナッハ空間において $x_n \rightarrow x$ (弱), $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \leq \|x\|$ ならば $x_n \rightarrow x$ である』という関数解析学の基本的な定理を用いることにより, 主張 (i) を証明できる.

$$\begin{aligned} & (d/d\theta) \beta'(\|\nabla(\theta u_\lambda + (1 - \theta)u_0)\|^2) \\ & = 2\beta''(\|\nabla(\theta u_\lambda + (1 - \theta)u_0)\|^2) (\langle \nabla u_\lambda, \nabla(u_\lambda - u_0) \rangle - (1 - \theta) \|\nabla(u_\lambda - u_0)\|^2) \end{aligned}$$

であるから, $\beta''(s) \geq 0$ ($s \geq 0$) を用いて

$$\begin{aligned} & \lambda^{-1} (\beta'(\|\nabla u_\lambda\|^2) - \beta'(\|\nabla u_0\|^2)) \|\nabla v_\lambda\|^2 \\ & \leq -2\beta''(\|\nabla(\theta u_\lambda + (1 - \theta)u_0)\|^2) \langle \Delta u_\lambda, v_\lambda \rangle \|\nabla v_\lambda\|^2 \\ & = -2\beta''(\|\nabla(\theta u_\lambda + (1 - \theta)u_0)\|^2) \beta'(\|\nabla u_\lambda\|^2)^{-1} \langle w_\lambda + \gamma v_\lambda, v_\lambda \rangle \|\nabla v_\lambda\|^2 \end{aligned}$$

をえる。これと (3.7) を組み合わせると, (2.7) に対応する評価式

$$\begin{aligned} & (\|w_\lambda\|^2 + \beta'(\|\nabla u_\lambda\|^2)\|\nabla v_\lambda\|^2) - (\|w_0\|^2 + \beta'(\|\nabla u_0\|^2)\|\nabla v_0\|^2)/\lambda + 2\gamma\|w_\lambda\|^2 \\ & \leq 2\lambda^{-1}(\beta'(\|\nabla u_\lambda\|^2) - \beta'(\|\nabla u_0\|^2))\beta'(\|\nabla u_\lambda\|^2)^{-1}\langle w_\lambda + \gamma v_\lambda, w_\lambda \rangle \\ & \quad - 2\beta''(\|\nabla(\theta u_\lambda + (1-\theta)u_0)\|^2)\beta'(\|\nabla u_\lambda\|^2)^{-1}\langle w_\lambda + \gamma v_\lambda, v_\lambda \rangle\|\nabla v_\lambda\|^2 \end{aligned}$$

をえる。よって, $\rho \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ が存在して, $\rho(0) = 0$,

$$H(u_\lambda, v_\lambda) - H(u_0, v_0)/\lambda + (2\gamma - \rho(H(u_0, v_0) + H(u_\lambda, v_\lambda)))(\|v_\lambda\|^2 + \|w_\lambda\|^2) \leq 0$$

をえる。これと主張 (i) から, 命題の正しさが証明される。

集合 D を

$$D = \{(u, v) \in (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \times H_0^1(\Omega); H(u, v) \leq r_0\}$$

により定め, 作用素 $A: D \rightarrow X$ を

$$A(u, v) = \mathcal{A}(u, v) \quad ((u, v) \in D)$$

により定める。汎関数 $\varphi: X \rightarrow [0, \infty]$ を

$$\varphi(u, v) = H(u, v) \quad ((u, v) \in D), \quad \varphi(u, v) = \infty \quad ((u, v) \in X \setminus D)$$

により定める。このとき, 命題 3.7, 3.8 により, 注意 3.3 の条件 (v) が満たされる。

命題 3.9. $R_0 > 0$ を

$$H(u, v) \leq r_0 \text{ ならば } \|\nabla u\| < R_0/2$$

を満たす定数とし, 汎関数 $V: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ を

$$V(z, \hat{z}) = (\|v - \hat{v}\|^2 + \beta'(\|\nabla u\|^2)(\|\nabla(u - \hat{u})\| \wedge R_0)^2)^{1/2} \quad (z = (u, v), \hat{z} = (\hat{u}, \hat{v}) \in X)$$

により定める。このとき, 定理 3.2 の条件 (i), (ii), (iii) が成り立つ。

(証明) 条件 (i) はミンコフスキーの不等式により満たされる。条件 (ii) は, 条件 $m_\beta \leq \beta'(s) \leq M_\beta$ ($s \in \mathbb{R}_+$) より満たされる。条件 (iii) を示すために,

$$\begin{aligned} & D_+V((u, v), (\hat{u}, \hat{v}))((\xi, \eta), (\hat{\xi}, \hat{\eta})) \cdot V((u, v), (\hat{u}, \hat{v})) \\ & = 2\langle v - \hat{v}, \eta - \hat{\eta} \rangle + 2\beta''(\|\nabla u\|^2)\langle \nabla u, \nabla \xi \rangle\|\nabla(u - \hat{u})\|^2 \\ & \quad + 2\beta'(\|\nabla u\|^2)\langle \nabla(u - \hat{u}), \nabla(\xi - \hat{\xi}) \rangle \quad ((u, v), (\hat{u}, \hat{v}) \in D) \end{aligned}$$

であることに注意する。このとき,

$$\begin{aligned} & D_+V((u, v), (\hat{u}, \hat{v}))(A(u, v), A(\hat{u}, \hat{v})) \cdot V((u, v), (\hat{u}, \hat{v})) \\ & = 2\langle v - \hat{v}, \beta'(\|\nabla u\|^2)\Delta u - \gamma v - (\beta'(\|\nabla \hat{u}\|^2)\Delta \hat{u} - \gamma \hat{v}) \rangle \\ & \quad + 2\beta''(\|\nabla u\|^2)\langle \nabla u, \nabla v \rangle\|\nabla(u - \hat{u})\|^2 + 2\beta'(\|\nabla u\|^2)\langle \nabla(u - \hat{u}), \nabla(v - \hat{v}) \rangle \\ & \leq 2\beta'(\|\nabla \hat{u}\|^2)^{-1}(\beta'(\|\nabla u\|^2) - \beta'(\|\nabla \hat{u}\|^2))\langle v - \hat{v}, \hat{v} + \gamma \hat{v} \rangle \\ & \quad + 2\beta''(\|\nabla u\|^2)\langle \nabla u, \nabla v \rangle\|\nabla(u - \hat{u})\|^2 \quad ((u, v), (\hat{u}, \hat{v}) \in D) \end{aligned}$$

が成り立つ。集合 D の定義により, $r_0 > 0$ に依存する定数 $C(r_0) > 0$ が存在して $\|\nabla u\| + \|v\| + \|w\| + \|\nabla v\| \leq C(r_0)$ であるから, 条件 (iii) が満たされる。

命題 3.10. 作用素 A は条件 (H) を満たす. さらに, $A : D \rightarrow X_w$ は連続である.

この命題の主張は, 例 2.3 を題材に成り立つことを示した条件 (C1), (C2) に他ならない. よって, 定理 3.2 を適用して, 定理 3.6 を証明できる.

今後の課題 右微分可能な解をもつような微分方程式系へ応用可能な抽象的結果は定理 3.2 で与えられた. 今後は, Bressan 氏 を中心として展開された保存則系に対する初期値問題へ応用可能な抽象論の構築が求められる. この節で設定された条件 (H) は, 保存則系への応用を目指すには, 取り除かれなければならない条件である.

4 リブシッツ作用素半群に対する積公式

この節では, リブシッツ作用素半群の積公式について考察する. まず, 一般的に, 作用素半群に対する積公式がいかなる問題を解決するために利用されているのかを説明するために, 1 次元の Kirchhoff 方程式

$$w_{tt} - \beta'(\|w_x\|^2)w_{xx} + \gamma w_t = 0 \quad ((x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty))$$

において, $u = w_x, v = w_t$ において得られる偏微分方程式系

$$\begin{cases} u_t = v_x \\ v_t = \beta'(\|u\|^2)u_x - \nu v \end{cases}$$

を例に, 2 種類の近似解法について述べることから始める.

(1) Lax-Friedrichs 差分による近似解法

空間と時間を次のように差分化したものを考える.

$$\begin{cases} \frac{u(x, t+h) - \frac{u(x+k, t) + u(x-k, t)}{2}}{h} = \frac{v(x+k, t) - v(x-k, t)}{2k}, \\ \frac{v(x, t+h) - \frac{v(x+k, t) + v(x-k, t)}{2}}{h} \\ = \beta'(\|u(\cdot, t+h)\|^2) \frac{u(x+k, t) - u(x-k, t)}{2k} - \nu \frac{v(x+k, t) + v(x-k, t)}{2} \end{cases}$$

これを, $u(x+k, t)$ および $v(x+k, t)$ で解くと,

$$\begin{cases} u(x, t+h) = \frac{u(x+k, t) + u(x-k, t)}{2} + r \frac{v(x+k, t) - v(x-k, t)}{2}, \\ v(x, t+h) = (1 - h\nu) \frac{v(x+k, t) + v(x-k, t)}{2} \\ + r\beta'(\|u(\cdot, t+h)\|^2) \frac{u(x+k, t) - u(x-k, t)}{2} \end{cases}$$

を得る. 但し, $r = h/k$ である. さて, $r > 0$ を適切に選んで固定しておき, 各 $h > 0$ に対して, 作用素 C_h を次により定める.

$$\begin{aligned} C_h(u, v) &= (w, z) \\ \iff \begin{cases} w(x) = \frac{u(x+k) + u(x-k)}{2} + r \frac{v(x+k) - v(x-k)}{2}, \\ z(x) = (1 - h\nu) \frac{v(x+k) + v(x-k)}{2} + r\beta'(\|w\|^2) \frac{u(x+k) - u(x-k)}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

但し, $k > 0$ は $r = h/k$ を満たすものとする. 初期条件 $u(x, 0) = u_0(x)$, $v(x, 0) = v_0(x)$ のもとに, $C_h^i(u_0, v_0) = (u(x, ih), v(x, ih))$ ($i = 1, 2, \dots$) が成り立つことに注意すれば, 極限 $\lim_{h \downarrow 0} C_h^{\lfloor t/h \rfloor}(u_0, v_0)$ が存在すれば, それがある意味の解になることが期待される.

(2) Rothe の方法による近似解法

時間を差分化して、空間変数に関する楕円型方程式を解くことで近似解を導く.

$$\begin{cases} (u(x, t+h) - u(x, t))/h = v_x(x, t+h) \\ (v(x, t+h) - v(x, t))/h = \beta'(\|u(\cdot, t)\|^2)u_x(x, t+h) - \nu v(x, t+h) \end{cases}$$

u, v を与えたとき、楕円型方程式

$$\begin{cases} (w - u)/h = z_x \\ (z - v)/h = \beta'(\|u\|^2)w_x - \nu z \end{cases}$$

の解 w, z の存在と一意性が保障されれば、各 $h > 0$ に対して、作用素 C_h を次のように定義することができる:

$$C_h(u, v) = (w, z) \iff \begin{cases} (w - u)/h = z_x \\ (z - v)/h = \beta'(\|u\|^2)w_x - \nu z \end{cases}$$

(1) の場合と同様に、初期条件 $u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x)$ が与えられたとき、 $C_h^i(u_0, v_0) = (u(x, ih), v(x, ih))$ ($i = 1, 2, \dots$) が成り立つことに注意すれば、極限 $\lim_{h \downarrow 0} C_h^{[t/h]}(u_0, v_0)$ が存在すれば、それがある意味の解になることが期待される.

そこで、作用素族 $\{C_h; h > 0\}$ がどのような条件を満たすとき、極限 $\lim_{h \downarrow 0} C_h^{[t/h]}(u_0, v_0)$ は存在するかという数学的な問題が生じる. 今考えている偏微分方程式系について、初期値 (u_0, v_0) に対する解 $(u(\cdot, t), v(\cdot, t))$ の連続的依存性は、次のように表現される. 各 $\tau > 0$ に対して、 $L_\tau > 0$ が存在して、

$$\|(u(\cdot, t), v(\cdot, t)) - (\hat{u}(\cdot, t), \hat{v}(\cdot, t))\|_{L^2 \times L^2} \leq L_\tau \|(u_0, v_0) - (\hat{u}_0, \hat{v}_0)\|_{L^2 \times L^2} \quad (t \in [0, \tau])$$

即ち、

$$S(t)(u_0, v_0) = (u(\cdot, t), v(\cdot, t))$$

により定められる作用素族 $\{S(t); t \geq 0\}$ は、通常の $L^2 \times L^2$ ノルムに関して、リプシッツ作用素半群になり、従来よく調べられてきた縮小作用素半群にはならない. よって、上記の問題は、 D からそれ自身への作用素族 $\{C_h; h \in (0, h_0]\}$ がどのような条件を満たすとき、極限

$$S(t)x = \lim_{h \downarrow 0} C_h^{[t/h]}x \quad (x \in D, t \geq 0)$$

は存在し、作用素族 $\{S(t); t \geq 0\}$ は D 上のリプシッツ作用素半群になるかという問題へ翻訳される.

この種の問題は、作用素半群の積公式として知られ、 (C_0) 半群に対する積公式 ([6], [15], [22], [40]) 及び縮小作用素半群に対する積公式 ([5], [30], [36], [37]) が多くの研究者により得られている. (C_0) 半群に対する典型的な積公式に関する定理を述べる.

(C_0) 縮小作用素半群の積公式 $\{C_h; h \in (0, h_0]\}$ を X からそれ自身への有界線形作用素の族とし、つぎの条件を満たすと仮定する.

(i) 定数 $\omega \geq 0$ が存在して、 $\|C_h\| \leq e^{\omega h}$ ($h \in (0, h_0]$).

(ii) X において稠密に定義される閉線形作用素 A が存在して、

$$\lim_{h \downarrow 0} (C_h x - x)/h = Ax \quad (x \in D(A)).$$

(iii) ある $\lambda_0 > 0$, $\lambda_0\omega < 1$ が存在して, $R(I - \lambda_0 A) = X$ である.

このとき, A は X 上の (C_0) 縮小作用素半群 $\{S(t); t \geq 0\}$ の無限小生成作用素であり,

$$\lim_{h \downarrow 0} C_h^{[t/h]} x = S(t)x \quad (x \in X, t \geq 0).$$

ただし, 収束は $[0, \infty)$ の任意の有界区間上一様である.

条件 (i) を安定性条件, (ii) を 整合性条件, (iii) を 値域条件という.

本節の目的は, リプシッツ作用素半群の積公式を得ようというものであり, [7], [27] によるリプシッツ作用素半群の積公式を改良することである.

定理 4.1. D を X の閉集合とする. $\{C_h; h \in (0, h_0)\}$ は D からそれ自身へのリプシッツ作用素族とし, 次の条件を満たすと仮定する.

(H1) 各 $x \in D$ に対して, $C_h x : (0, h_0] \rightarrow X$ は h に関して連続である.

(H2) 各 $x \in D$ に対して, $\lim_{\lambda \downarrow 0} (\limsup_{h \downarrow 0} \|C_{\lambda+h} x - C_h C_\lambda x\|/h) = 0$.

(H3) 定数 $M_A \geq 0$ が存在して, $\|C_h x - x\| \leq M_A h \quad (x \in D, h \in (0, h_0])$.

(H4) リプシッツ連続汎関数 $V : D \times D \rightarrow [0, \infty)$, 定数 $M \geq m > 0$, $\omega \geq 0$ が存在して,

$$\begin{aligned} m\|x - y\| &\leq V(x, y) \leq M\|x - y\| \quad (x, y \in D), \\ V(C_h x, C_h y) &\leq e^{\omega h} V(x, y) \quad (x, y \in D, h \in (0, h_0]). \end{aligned}$$

このとき, D 上のリプシッツ作用素半群 $\{S(t); t \geq 0\}$ が存在して,

$$\begin{aligned} S(t)x &= \lim_{h \downarrow 0} C_h^{[t/h]} x \quad (x \in D, t \geq 0), \\ \lim_{h \downarrow 0} \|S(h)x - C_h x\|/h &= 0 \quad (x \in D). \end{aligned}$$

さらに, $\{S(t); t \geq 0\}$ の無限小生成作用素は, 次で与えられる作用素 A である.

$$\begin{cases} Ax = \lim_{h \downarrow 0} (C_h x - x)/h & (x \in D(A)) \\ D(A) = \{x \in D; \lim_{h \downarrow 0} (C_h x - x)/h \text{ が存在する} \} \end{cases}$$

注意 4.2. (i) Marsden の結果 ([27]) は, 時間局所的な適切性に関するものであり, 定理 4.1 と正確に比較することは難しいが, 条件 (H2) の代わりに, 定数 $L > 0$ が存在して,

$$\|C_{\lambda+h} x - C_h C_\lambda x\| \leq L\lambda h \quad (x \in D, \lambda, h, \lambda + h \in (0, h_0])$$

であることが仮定されていると考えられる. この条件の下で, 彼らの証明方法を利用して, 定理 4.1 を証明することができる. この条件と条件 (H2) を比較する. $0 < r \leq 1$ とし $D \subset H^1(\mathbb{R})$ とする. このとき,

$$(C_h u)(x) = (1/2)((1+r)u(x+h/r) + (1-r)u(x-h/r)) \quad (u \in D, h > 0)$$

により定義される作用素族 $\{C_h; h > 0\}$ は条件

$$\lim_{h \downarrow 0} \|C_{\lambda+h}u - C_h C_\lambda u\|_{L^2}/h = (1/2r)(1-r^2)\|u'(\cdot + \lambda/r) - u'(\cdot - \lambda/r)\|_{L^2} \quad (u \in D)$$

をみたく。 $\|u'(\cdot + \lambda/r) - u'(\cdot - \lambda/r)\|_{L^2} \leq K\lambda$ ($u \in D$) であるための必要十分条件は $u \in H^2(\mathbb{R})$, $\|u''\|_{L^2} \leq K_0$ である。 よって、彼らの議論を用いるためには、集合 D として、適当な定数 $r_0 > 0$ に対して $\{u \in H^2(\mathbb{R}); \|u\|_{H^2} \leq r_0\}$ なるものをとる必要がある。 一方、集合 D として、適当な定数 $r_0 > 0$ に対して $\{u \in H^1(\mathbb{R}); \|u\|_{H^1} \leq r_0\}$ な形の集合をとれば、条件 (H2) は満たされる。

(ii) $\{S(t); t \geq 0\}$ を D 上のリプシッツ作用素半群とする。 このとき、Lax の意味の整合性条件とは、次が成り立つことである ([24])。 各 $\tau > 0$ に対して、

$$\lim_{h \downarrow 0} \sup_{t \in [0, \tau]} \|C_h S(t)x - S(t+h)x\|/h = 0 \quad (x \in D).$$

この意味の整合性条件と条件 (H4) のもとに、次が成り立つ。

$$S(t)x = \lim_{h \downarrow 0} C_h^{[t/h]}x \quad (x \in D, t \geq 0).$$

(iii) 定理 4.1 の特徴は、ある種の楕円型方程式の可解性を意味する、 (C_0) 縮小作用素半群の積公式を導出するために仮定される値域条件、及び、与えられた微分方程式系の可解性を意味する、Lax の積公式を導出するために仮定される作用素半群の存在、これらを仮定することなく、積公式が導き出されることである。

Lax-Friedrichs 差分法による近似解法について

$X = L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}), Y = H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ とする。 $r > 0$ を $r^2 M_\beta < 1$ を満たす定数とし、 $h_0 > 0$ を

$$r^2 M_\beta + \nu h_0 \leq 1 \quad (4.1)$$

を満たすように選ぶ。 作用素 $A : D \rightarrow X$, 作用素族 $\{C_h; h \in (0, h_0]\}$ を次のように定め、それらが定理 4.1 の条件 (H1) から (H4) を満たすように閉集合 D を決定する必要がある。

$$A(u, v) = (v_x, \beta'(\|u\|^2)u_x - \nu v) \quad ((u, v) \in D).$$

$$C_h(u, v) = (u_h, v_h)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_h(x) = \frac{u(x+h/r) + u(x-h/r)}{2} + r \frac{v(x+h/r) - v(x-h/r)}{2}, \\ v_h(x) = (1-h\nu) \frac{v(x+h/r) + v(x-h/r)}{2} + r\beta'(\|u_h\|^2) \frac{u(x+h/r) - u(x-h/r)}{2} \end{cases}$$

補題 4.3. $a > 0, \lambda > 0, a\lambda^2 \leq 1$ とする。 このとき、

$$\begin{cases} w(x) = \frac{u(x+k) + u(x-k)}{2} + \lambda \frac{v(x+k) - v(x-k)}{2}, \\ z(x) = \frac{v(x+k) + v(x-k)}{2} + a\lambda \frac{u(x+k) - u(x-k)}{2} \end{cases}$$

ならば、

$$a\|w\|^2 + \|z\|^2 \leq a\|u\|^2 + \|v\|^2.$$

(証明) \hat{w} により w のフーリエ変換を表す。 与えられた式のフーリエ変換を考えると

$$\hat{w}(\xi) = \cos(k\xi)\hat{u}(\xi) + i\lambda \sin(k\xi)\hat{v}(\xi),$$

$$\hat{z}(\xi) = \cos(k\xi)\hat{v}(\xi) + ia\lambda \sin(k\xi)\hat{u}(\xi)$$

をえる. よって, $a\lambda^2 \leq 1$ を用いると,

$$\begin{aligned} a|\hat{w}(\xi)|^2 + |\hat{z}(\xi)|^2 &= a \cos^2(k\xi)|\hat{u}(\xi)|^2 + a\lambda^2 \sin^2(k\xi)|\hat{v}(\xi)|^2 \\ &\quad + \cos^2(k\xi)|\hat{v}(\xi)|^2 + a^2\lambda^2 \sin^2(k\xi)|\hat{u}(\xi)|^2 \\ &\leq (\cos^2(k\xi) + \sin^2(k\xi))(a|\hat{u}(\xi)|^2 + |\hat{v}(\xi)|^2) = a|\hat{u}(\xi)|^2 + |\hat{v}(\xi)|^2 \end{aligned}$$

である. プランシェレルの定理により, この補題が成立する.

条件 (H1) から (H4) を満たすように閉集合 D を定めるために, $(u_h, v_h) = C_h(u, v)$ とおき, 補題 4.3 を $\lambda = r(1 - \nu h)^{-1}$, $a = (1 - \nu h)\beta'(\|u_h\|^2)$ として用いれば, 条件 (4.1) により,

$$\beta'(\|u_h\|^2)\|u_h\|^2 + \|v_h\|^2 \leq \beta'(\|u_h\|^2)\|u\|^2 + \|v\|^2(1 - \nu h) \quad (4.2)$$

を得る. よって,

$$\|u_h\|^2 + \frac{\|v_h\|^2}{\beta'(\|u_h\|^2)} \leq \|u\|^2 + \frac{\|v\|^2}{\beta'(\|u\|^2)} + \frac{h}{\beta'(\|u_h\|^2)} \left(\frac{\beta'(\|u\|^2) - \beta'(\|u_h\|^2)}{\beta'(\|u\|^2)h} - \nu \right) \|v\|^2.$$

同様にして,

$$\|\partial_x u_h\|^2 + \frac{\|\partial_x v_h\|^2}{\beta'(\|u_h\|^2)} \leq \|\partial_x u\|^2 + \frac{\|\partial_x v\|^2}{\beta'(\|u\|^2)} + \frac{h}{\beta'(\|u_h\|^2)} \left(\frac{\beta'(\|u\|^2) - \beta'(\|u_h\|^2)}{\beta'(\|u\|^2)h} - \nu \right) \|\partial_x v\|^2.$$

そこで,

$$H(u, v) = \|u\|^2 + \|\partial_x u\|^2 + \frac{\|v\|^2}{\beta'(\|u\|^2)} + \frac{\|\partial_x v\|^2}{\beta'(\|u\|^2)} \quad ((u, v) \in H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R}))$$

により定める. 作用素 C_h の定義により, $\|u_h\| \leq \|u\| + r\|v\|$ である. さらに,

$$\begin{aligned} h^{-1}(u_h(x) - u(x)) &= (2k)^{-1}(u(x+k) - u(x) - (u(x) - u(x-k)))(1/r) \\ &\quad + (2k)^{-1}(v(x+k) - v(x-k)) \end{aligned}$$

であるから

$$h^{-1}\|u_h - u\| \leq (1/r)\|\partial_x u\| + \|\partial_x v\| \quad (4.3)$$

である. よって, $r_0 > 0$ を適当に選べば,

$$H(u, v) \leq r_0 \quad \text{ならば} \quad \frac{|\beta'(\|u\|^2) - \beta'(\|u_h\|^2)|}{\beta'(\|u\|^2)h} \leq \nu \quad (4.4)$$

が成り立つ. よって,

$$D = \{(u, v) \in H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R}); H(u, v) \leq r_0\}$$

と定めれば, $C_h : D \rightarrow D$ であり, 明らかに, 条件 (H1) が成り立つ.

安定性条件 (H4) を調べるために, $(\hat{u}_h, \hat{v}_h) = C_h(\hat{u}, \hat{v})$, $k = h/r$ とおく. このとき,

$$\left\{ \begin{aligned} (u_h - \hat{u}_h)(x) &= \frac{(u - \hat{u})(x+k) + (u - \hat{u})(x-k)}{2} + r \frac{(v - \hat{v})(x+k) - (v - \hat{v})(x-k)}{2}, \\ (v_h - \hat{v}_h)(x) &= (1 - h\nu) \frac{(v - \hat{v})(x+k) + (v - \hat{v})(x-k)}{2} \\ &\quad + r\beta'(\|u_h\|^2) \frac{(u - \hat{u})(x+k) - (u - \hat{u})(x-k)}{2} \\ &\quad + h(\beta'(\|u_h\|^2) - \beta'(\|\hat{u}_h\|^2)) \frac{\hat{u}(x+k) - \hat{u}(x-k)}{2k} \end{aligned} \right.$$

をみたすので, 補題 4.3 により,

$$\begin{aligned} & \beta'(\|u_h\|^2)\|u_h - \hat{u}_h\|^2 + \|v_h - \hat{v}_h - h(\beta'(\|u_h\|^2) - \beta'(\|\hat{u}_h\|^2))(2k)^{-1}(\hat{u}(\cdot + k) - \hat{u}(\cdot - k))\|^2 \\ & \leq \beta'(\|u_h\|^2)\|u - \hat{u}\|^2 + \|v - \hat{v}\|^2 \end{aligned}$$

を得る. そこで, $V : D \times D \rightarrow [0, \infty)$ を

$$V((u, v), (\hat{u}, \hat{v})) = (\beta'(\|u\|^2)\|u - \hat{u}\|^2 + \|z - \hat{z}\|^2)^{1/2}$$

により定めれば, ミンコフスキーの不等式により,

$$\begin{aligned} & V((u_h, v_h), (\hat{u}_h, \hat{v}_h)) \leq V((u, v), (\hat{u}, \hat{v})) \\ & + h \left(\frac{|\sqrt{\beta'(\|u_h\|^2)} - \sqrt{\beta'(\|u\|^2)}|}{\sqrt{\beta'(\|u\|^2)}h} \sqrt{\beta'(\|u\|^2)}\|u - \hat{u}\| + |\beta'(\|u_h\|^2) - \beta'(\|\hat{u}_h\|^2)|\|\partial_x \hat{u}\| \right) \end{aligned}$$

である. よって, (4.3) により, 定数 $a \geq 0, b \geq 0$ が存在して $(1 - ah)V((u_h, v_h), (\hat{u}_h, \hat{v}_h)) \leq (1 + bh)V((u, v), (\hat{u}, \hat{v}))$ が成り立つので, 適当な $\omega \geq 0, h_0 > 0$ を選べば, 条件 (H4) が成り立つ. (4.3) の導出と同様にして, $h^{-1}\|v_h - v\| \leq (1/r)\|\partial_x v\| + \nu\|v\| + M_\beta\|\partial_x u\|$ である. よって, 条件 (H3) が成り立つ. 直接的な計算により, 条件 (H2) は満たされる.

Rothe 法による近似解法について

$u, v \in L^2(\mathbb{R})$ を与えたとき, 各 $h > 0$ に対して楕円型方程式

$$\begin{cases} (u_h - u)/h = \partial_x v_h \\ (v_h - v)/h = \beta'(\|u\|^2)\partial_x u_h - \nu v_h \end{cases}$$

が一意的な解 $u_h, v_h \in H^1(\mathbb{R})$ をもつことに注意する. さらに, $u, v \in H^1(\mathbb{R})$ ならば, 基本的な評価法により,

$$\begin{aligned} & \beta'(\|u\|^2)\|u_h\|^2 + \|v_h\|^2 - (\beta'(\|u\|^2)\|u\|^2 + \|v\|^2) \leq -2h\nu\|v_h\|^2, \\ & \beta'(\|u\|^2)\|\partial_x u_h\|^2 + \|\partial_x v_h\|^2 - (\beta'(\|u\|^2)\|\partial_x u\|^2 + \|\partial_x v\|^2) \leq -2h\nu\|\partial_x v_h\|^2 \end{aligned}$$

を得る. そこで,

$$H(u, v) = \|u\|^2 + \|\partial_x u\|^2 + \frac{\|v\|^2 + \|\partial_x v\|^2}{\beta'(\|u\|^2)} \quad ((u, v) \in H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R}))$$

と定めれば,

$$H(u_h, v_h) \leq H(u, v) + \frac{h}{\beta'(\|u\|^2)} \left(\frac{\beta'(\|u\|^2) - \beta'(\|u_h\|^2)}{\beta'(\|u_h\|^2)h} - 2\nu \right) (\|v_h\|^2 + \|\partial_x v_h\|^2)$$

を得る. ある $r_0 > 0$ を適当に選べば,

$$H(u, v) \leq r_0 \quad \text{ならば} \quad \frac{|\beta'(\|u\|^2) - \beta'(\|u_h\|^2)|}{\beta'(\|u_h\|^2)h} \leq 2\nu$$

が成立する. そこで,

$$D = \{(u, v) \in H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R}); H(u, v) \leq r_0\}$$

と定める. 各 $h > 0$ に対して, 作用素 $C_h : D \rightarrow X$ を次のように定義する.

$$C_h(u, v) = (u_h, v_h) \iff \begin{cases} (u_h - u)/h = \partial_x v_h \\ (v_h - v)/h = \beta'(\|u\|^2)\partial_x u_h - \nu v_h \end{cases}$$

D の定め方から, $C_h : D \rightarrow D$ である. 安定性条件 (H4) を調べるために, $\hat{u}, \hat{v}, \hat{u}_h, \hat{v}_h$ は,

$$(\hat{u}_h - \hat{u})/h = \partial_x \hat{v}_h, \quad (\hat{v}_h - \hat{v})/h = \beta'(\|\hat{u}\|^2) \partial_x \hat{u}_h - \nu \hat{v}_h$$

をみたすとする. このとき,

$$\begin{aligned} ((u_h - \hat{u}_h) - (u - \hat{u}))/h &= \partial_x (v_h - \hat{v}_h), \\ ((v_h - \hat{v}_h) - (v - \hat{v}))/h &= \beta'(\|u\|^2) \partial_x (u_h - \hat{u}_h) - \nu (v_h - \hat{v}_h) + (\beta'(\|u\|^2) - \beta'(\|\hat{u}\|^2)) \partial_x \hat{u}_h \end{aligned}$$

をみたすので, 基本的な評価により,

$$\begin{aligned} &\beta'(\|u\|^2) (\|u_h - \hat{u}_h\|^2 - \|u - \hat{u}\|^2) + \|v_h - \hat{v}_h\|^2 - \|v - \hat{v}\|^2 \\ &\leq -2h\nu \|v_h - \hat{v}_h\|^2 + 2h(\beta'(\|u\|^2) - \beta'(\|\hat{u}\|^2)) \langle \partial_x \hat{u}_h, v_h - \hat{v}_h \rangle \end{aligned}$$

を得る. そこで, $V : D \times D \rightarrow [0, \infty)$ を

$$V((u, v), (\hat{u}, \hat{v})) = (\beta'(\|u\|^2) \|u - \hat{u}\|^2 + \|z - \hat{z}\|^2)^{1/2} \quad ((u, v), (\hat{u}, \hat{v})) \in D$$

により定めれば,

$$\begin{aligned} V((u_h, v_h), (\hat{u}_h, \hat{v}_h))^2 &\leq V((u, v), (\hat{u}, \hat{v}))^2 \\ &+ h \left(\frac{\beta'(\|u_h\|^2) - \beta'(\|u\|^2)}{\beta'(\|u_h\|^2)h} \beta'(\|u_h\|^2) \|u_h - \hat{u}_h\|^2 + 2(\beta'(\|u\|^2) - \beta'(\|\hat{u}\|^2)) \langle \partial_x \hat{u}_h, v_h - \hat{v}_h \rangle \right) \end{aligned}$$

であるから, 適当な $\omega \geq 0, h_0 > 0$ を選べば, 条件 (H4) が成り立つ.

最後に, (H1), (H2), (H3) を示すために, X における作用素 $A : D \rightarrow X$ を

$$A(u, v) = (\partial_x v, \beta'(\|u\|^2) \partial_x u - \nu v) \quad ((u, v) \in D)$$

により定め, X における閉線形作用素の族 $\{A((w, z)); (w, z) \in D\}$ を

$$A((w, z))(u, v) = (\partial_x v, \beta'(\|w\|^2) \partial_x u - \nu v) \quad ((u, v) \in H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R}))$$

により定めると, 各 $h \in (0, h_0]$ に対して, $(I - hA((u, v)))^{-1}$ が X 上の有界線形作用素として存在して, C_h は次のように書ける.

$$C_h(u, v) = (I - hA((u, v)))^{-1}(u, v)$$

この表現から, (H1) は成り立ち, さらに,

$$\begin{aligned} (d/d\lambda)C_\lambda(u, v) &= (I - \lambda A((u, v)))^{-2} A((u, v))(u, v), \\ AC_\lambda(u, v) &= (A(C_\lambda(u, v)) - A((u, v)))C_\lambda(u, v) + (I - \lambda A((u, v)))^{-1} A((u, v))(u, v) \end{aligned}$$

が成り立つ. よって, (H2), (H3) が成り立つ.

注意 4.4. Rothe の方法による近似解法について, 上述の半陰的な差分方程式の代わりに, 完全陰的な差分方程式

$$\begin{cases} (u(x, t+h) - u(x, t))/h = v_x(x, t+h) \\ (v(x, t+h) - v(x, t))/h = \beta'(\|u(\cdot, t+h)\|^2) u_x(x, t+h) - \nu v(x, t+h) \end{cases}$$

を用いる場合が多い。(例 2.3 を参照.) u, v を与えたとき, 楕円型方程式

$$\begin{cases} (w - u)/h = z_x \\ (z - v)/h = \beta'(\|w\|^2)w_x - \nu z \end{cases}$$

の解 w, z の存在と一意性が保障されれば, 各 $h > 0$ に対して, 作用素 C_h を次のように定義することができる.

$$C_h(u, v) = (w, z) \iff \begin{cases} (w - u)/h = z_x \\ (z - v)/h = \beta'(\|w\|^2)w_x - \nu z \end{cases}$$

上述の楕円型方程式の存在問題については, 例 2.3 を題材に示したように, Brezis による擬単調作用素 $T : V \rightarrow V^*$, 即ち, $z_n \in V \rightarrow z \in V$ (弱), $\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Tz_n, z_n - z \rangle \leq 0$ ならば

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Tz_n, z_n - w \rangle \geq \langle Tz, z - w \rangle \quad (w \in V)$$

をみたす作用素 T に関する存在定理を利用すればよい. この完全陰的な場合は, (H2) を調べることにに関して, 先に述べた半陰的方法より手間がかかる. しかしながら, 完全陰的な差分法は, dynamical boundary condition を付加した方程式などに応用可能という点で有利である.

$$\begin{cases} u_{tt} = \beta'(\|\nabla u\|^2)\Delta u - \gamma u_t & ((x, t) \in \Omega \times (0, \infty)) \\ u = 0 & ((x, t) \in \Gamma_0 \times (0, \infty)) \\ u_t + \beta'(\|\nabla u\|^2)\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u = 0 & ((x, t) \in \Gamma_1 \times (0, \infty)) \end{cases}$$

5 放物型半線形発展方程式に付随するリプシッツ作用素半群の特徴づけ

この節では, 『平滑性を引き起こす作用素の導入とそれにより生成されるリプシッツ作用素半群の理論構築』を目指して, 解析的半群の非線形摂動の問題に焦点を当て, その解作用素族がリプシッツ作用素半群になるための必要十分条件を調べる. さらに, 得られる特徴づけを応用して, 複素 Ginzburg-Landau 方程式の混合問題が時間大域的な C^1 級の解をもつことを示す.

このような目的を達成するために, X をバナッハ空間とし, D を X の閉集合とし, X における半線形発展方程式の初期値問題

$$u'(t) = Au(t) + Bu(t) \quad (t > 0), \quad u(0) = u_0 \quad (\text{SP}; u_0)$$

を考える. この種の方程式に関する適切性の問題は, 条件設定に相違はあるが, 文献 [1, 2], [11], [25], [26], [32], [35], [38], [39] など調べられている.(準線形の場合については, 文献 [42] を参照)

この節では, A は, 定数 $M \geq 1, \omega_A < 0$ が存在して $\|T(t)\| \leq Me^{\omega_A t}$ ($t \geq 0$) をみたす, X 上の (C_0) 級の解析的半群 $\{T(t); t \geq 0\}$ の無限小生成作用素とする. $\alpha \in (0, 1)$ は定数とし, バナッハ空間 Y を $Y = D((-A)^\alpha)$, そのノルムを $\|v\|_Y := \|(-A)^\alpha v\|$ ($v \in Y$) により定める. Y の部分集合 C を $C = D \cap Y$ により定め, B は C から X への非線形作用素とする.

この節の目的は, (SP; u_0) の時間大域的軟解を与える解作用素の族がリプシッツ作用素半群となるための必要十分条件について考察することである².

作用素 B に関して, つぎの条件 (B1), (B2), (B3) を仮定する.

(B1) C は D において稠密である.

²本研究は, 松本敏隆氏(広島大・理)との共同研究である.

(B2) B は C から X への作用素として連続である.

(B3) 定数 $M_B > 0$ が存在して $\|Bv\| \leq M_B(1 + \|v\|_Y)$ ($v \in C$).

定理 5.1. つぎの (i), (ii) は同値である.

(i) D 上のリブシッツ作用素半群 $\{S(t); t \geq 0\}$ が存在して, $BS(\cdot)x \in C([0, \infty); X)$ ($x \in C$), $BS(\cdot)x \in C((0, \infty); X) \cap L^1_{loc}(0, \infty; X)$ ($x \in D$), および, つぎの積分方程式をみたす.

$$S(t)x = T(t)x + \int_0^t T(t-s)BS(s)x ds \quad (x \in D, t \geq 0).$$

(ii) 以下の 3 条件 (ii-1), (ii-2), (ii-3) がみたされる.

(ii-1) 定数 $L > 0, M \geq m > 0, X \times X$ 上の非負値汎関数 V が存在して, つぎの条件が成立する.

$$(V1) |V(x, y) - V(\hat{x}, \hat{y})| \leq L(\|x - \hat{x}\| + \|y - \hat{y}\|) \quad ((x, y), (\hat{x}, \hat{y}) \in X \times X).$$

$$(V2) m\|x - y\| \leq V(x, y) \leq M\|x - y\| \quad ((x, y) \in D \times D).$$

(ii-2) 定数 $\omega \geq 0$ が存在して,

$$\liminf_{h \downarrow 0} (V(J_h x, J_h y) - V(x, y))/h \leq \omega V(x, y) \quad ((x, y) \in C \times C).$$

但し, $J_t w = T(t)w + \int_0^t T(s)Bw ds$ ($t \geq 0, w \in C$) とする.

(ii-3) 定数 $\beta \in (0, 1)$ が存在して, 各 $x \in C, \varepsilon > 0$ に対して $\delta \in (0, \varepsilon], x_\delta \in C, z_\delta \in Y$ が存在して,

$$x_\delta = J_\delta x + z_\delta, \quad \|z_\delta\| \leq \varepsilon \delta, \quad \|z_\delta\|_Y \leq \varepsilon \delta^\beta.$$

この場合, さらに, 各 $\rho > 0$ に対して, $L_B(\rho) > 0$ が存在して

$$\|Bu - Bv\| \leq L_B(\rho)\|u - v\|_Y \quad (u, v \in C, \|u\|_Y \leq \rho, \|v\|_Y \leq \rho) \quad (5.1)$$

が満たされるならば, 各 $x \in D$ に対して, 抽象的コーシー問題 (SP; x) は, 一意解 $u(t) = S(t)x \in C([0, \infty); X) \cap C^1((0, \infty); X) \cap C((0, \infty); [D(A)])$ をもつ.

(必要性の証明の概略) 命題 2.1 の条件 (i), (ii) が成り立つ. 条件 (ii-1) は, 命題 2.1 の条件 (i) に他ならない. 条件 (ii-2) をチェックするために, $(x, y) \in C \times C$ とする. 命題 2.1 の条件 (ii) を用いると, $\omega \geq 0$ が存在して,

$$\liminf_{h \downarrow 0} (V(J_h x, J_h y) - V(x, y))/h \leq \omega V(x, y) + L \limsup_{h \downarrow 0} (\|J_h x - S(h)x\| + \|J_h y - S(h)y\|)/h$$

である. $BS(\cdot)x : [0, \infty) \rightarrow X$ は連続であるから,

$$h^{-1}(J_h x - S(h)x) = h^{-1} \int_0^h T(h-s)(Bx - BS(s)x) ds \rightarrow 0 \quad (h \downarrow 0)$$

である. よって, 条件 (ii-2) が成り立つ. 条件 (ii-3) をチェックするために, $x \in C$ とする. このとき, $BS(\cdot)x \in C([0, \infty); X)$ である. $J_h x - S(h)x \in D((-A)^\alpha)$ であり,

$$\begin{aligned} \|(-A)^\alpha (J_h x - S(h)x)\| &\leq \int_0^h \|(-A)^\alpha T(h-s)(Bx - BS(s)x)\| ds \\ &\leq (1 - \alpha)^{-1} M_\alpha \sup_{0 \leq s \leq h} \|Bx - BS(s)x\| \cdot h^{1-\alpha} \quad (h > 0) \end{aligned}$$

である. $S(h)x \in C$ ($h > 0$) であるから, 条件 (ii-3) は $\beta = 1 - \alpha$, $x_\delta = S(\delta)x$ で満たされる.

解の初期値に関する連続的依存性の導出方法

複素 Ginzburg-Landau 方程式の混合問題の解作用素がリプシッツ連続であることをどのように導出するかを, Okazawa-Yokota のアイデア ([34], [43]) をもとに, 述べる. これは, 定理 5.1 の中に出てくる汎関数 V の構成方法を示すものでもあることに注意する.

複素 Ginzburg-Landau 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (\lambda + i\mu)\Delta u + (\kappa + i\nu)|u|^{q-2}u = 0 \quad (5.2)$$

について, 変分をとることができるかなどの微妙な問題点は無視し, 形式的な計算をもとに変分をとると,

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial t} - (\lambda + i\mu)\Delta \dot{u} + (\kappa + i\nu)\{(q-2)|u|^{q-4}\text{Re}(u, \dot{u})u + |u|^{q-2}\dot{u}\} = 0 \quad (5.3)$$

が成り立つ. $2\text{Re}\langle (5.3), \dot{u} \rangle$ とすると,

$$\begin{aligned} & (d/dt)\|\dot{u}\|_{L^2}^2 + 2\lambda\|\nabla\dot{u}\|_{L^2}^2 \\ & + 2\text{Re}(\kappa + i\nu) \int_{\Omega} (q-2)|u|^{q-4}\text{Re}(u, \dot{u})(u, \dot{u}) + |u|^{q-2}|\dot{u}|^2 dx = 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

である. これより,

$$(d/dt)\|\dot{u}\|_{L^2}^2 + 2\lambda\|\nabla\dot{u}\|_{L^2}^2 \leq 2(\kappa^2 + \nu^2)^{1/2}(q-1) \int_{\Omega} |u|^{q-2}|\dot{u}|^2 dx.$$

Hölder の不等式と Gagliardo-Nirenberg の不等式を用いると,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u|^{q-2}|\dot{u}|^2 dx & \leq \|u\|_{L^q}^{q-2} \|\dot{u}\|_{L^q}^2 \leq c_1 \|u\|_{L^q}^{q-2} \|\dot{u}\|_{L^2}^{2(1-\sigma)} \|\dot{u}\|_{H^1}^{2\sigma} \\ & \leq c_2 \|u\|_{L^q}^{q-2} \|\dot{u}\|_{L^2}^{2(1-\sigma)} (\|\dot{u}\|_{L^2}^{2\sigma} + \|\nabla\dot{u}\|_{L^2}^{2\sigma}), \end{aligned}$$

但し, $\sigma = N(1/2 - 1/q)$ である. Young の不等式を用いて,

$$(d/dt)\|\dot{u}\|_{L^2}^2 + 2\lambda\|\nabla\dot{u}\|_{L^2}^2 \leq c_3 \|u\|_{L^q}^{(q-2)/(1-\sigma)} \|\dot{u}\|_{L^2}^2 + 2\lambda\|\nabla\dot{u}\|_{L^2}^2 + c_4 \|\dot{u}\|_{L^2}^2.$$

そこで, もし

$$(q-2)/(1-\sigma) \leq q \quad \text{すなわち} \quad 2 \leq q \leq 2 + 4/N$$

ならば, $(d/dt)\|\dot{u}\|_{L^2}^2 \leq 2(a + b\|u\|_{L^q}^q)\|\dot{u}\|_{L^2}^2$ であるから,

$$(d/dt)\|\dot{u}\|_{L^2} \leq (a + b\|u\|_{L^q}^q)\|\dot{u}\|_{L^2}. \quad (5.5)$$

つぎに, $2\text{Re}\langle (5.2), u \rangle$ とすると

$$(d/dt)\|u\|_{L^2}^2 + 2\lambda\|\nabla u\|_{L^2}^2 + 2\kappa\|u\|_{L^q}^q = 0 \quad (5.6)$$

であるから,

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2} \leq \|u_0\|_{L^2} \quad (t \geq 0) \quad (5.7)$$

が成立する. (5.5)+(b/2κ)‖ū‖_{L²} × (5.6) とすると,

$$\begin{aligned} & (d/dt) \exp((b/2\kappa)\|u\|_{L^2}^2) \|\dot{u}\|_{L^2} \\ &= \exp((b/2\kappa)\|u\|_{L^2}^2) ((d/dt)\|\dot{u}\|_{L^2} + (b/2\kappa)((d/dt)\|u\|_{L^2}^2) \|\dot{u}\|_{L^2}) \\ &\leq a \exp((b/2\kappa)\|u\|_{L^2}^2) \|\dot{u}\|_{L^2}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

$r_0 > 0$ とし, d をつぎにより定義される Riemann metric とする.

$$d(f, g) = \inf \left\{ \int_0^1 \exp((b/2\kappa)\|u(\theta)\|_{L^2}^2) \|\dot{u}(\theta)\|_{L^2} d\theta; \|u(\theta)\|_{L^2}^2 \leq r_0, u(0) = f, u(1) = g \right\}.$$

この定義が意味をもつと仮定して議論を進める. $f, g \in L^2(\Omega)$, $\|f\|_{L^2}^2 \leq r_0$, $\|g\|_{L^2}^2 \leq r_0$ とする. $\varepsilon > 0$ とする. このとき, $u_0(\theta)$ が存在して, $\|u_0(\theta)\|_{L^2}^2 \leq r_0$, $u_0(0) = f$, $u_0(1) = g$,

$$\int_0^1 \exp((b/2\kappa)\|u_0(\theta)\|_{L^2}^2) \|\dot{u}_0(\theta)\|_{L^2} d\theta < d(f, g) + \varepsilon.$$

$t \geq 0$ とする. このとき, (5.7) により, $\|u(t, \theta)\|_{L^2}^2 \leq r_0$. (5.8) により,

$$\int_0^1 \exp((b/2\kappa)\|u(t, \theta)\|_{L^2}^2) \|\dot{u}(t, \theta)\|_{L^2} d\theta \leq e^{at}(d(f, g) + \varepsilon)$$

であるから,

$$d(S(t)f, S(t)g) \leq e^{at}d(f, g) \quad (t \geq 0).$$

$M_0 \geq 1$ が存在して, $\|u(\theta)\|_{L^2}^2 \leq r_0$ ならば

$$\|\dot{u}(\theta)\|_{L^2} \leq \exp((b/2\kappa)\|u(\theta)\|_{L^2}^2) \|\dot{u}(\theta)\|_{L^2} \leq M_0 \|\dot{u}(\theta)\|_{L^2}$$

であるから, $f, g \in L^2(\Omega)$, $\|f\|_{L^2}^2 \leq r_0$, $\|g\|_{L^2}^2 \leq r_0$ に対して

$$\|f - g\|_{L^2} \leq d(f, g) \leq M_0 \|f - g\|_{L^2}.$$

したがって, 各 $\tau > 0$ に対して, $L_\tau > 0$ が存在して

$$\|S(t)f - S(t)g\|_{L^2} \leq L_\tau \|f - g\|_{L^2} \quad (t \in [0, \tau], f, g \in L^2(\Omega), \|f\|_{L^2}^2 \leq r_0, \|g\|_{L^2}^2 \leq r_0).$$

Riemann metric d を決定することは難しいが, 上の考察により,

$$V(u, v) = \exp((b/2\kappa)((\|u\|_{L^2} \wedge \sqrt{r_0})^2 + (\|v\|_{L^2} \wedge \sqrt{r_0})^2)) (\|u - v\|_{L^2} \wedge (2\sqrt{r_0})) \quad (u, v \in L^2(\Omega)) \quad (5.9)$$

を用いれば, $u_0, v_0 \in L^2(\Omega)$, $\|u_0\|_{L^2}^2 \leq r_0$, $\|v_0\|_{L^2}^2 \leq r_0$ のとき,

$$(d/dt)V(S(t)u_0, S(t)v_0) \leq \omega V(S(t)u_0, S(t)v_0) \quad (t \geq 0)$$

を得ることができる. この考察は, 複素 Ginzburg-Landau 方程式の混合問題に応用するためには, 定理 5.1 の中に現れる V として (5.9) により定義されるものを選べばよいことを示唆している.

上述の考察をもとに, 複素 Ginzburg-Landau 方程式の混合問題

$$(CGL) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - (\lambda + i\mu)\Delta u + (\kappa + i\nu)|u|^{q-2}u = 0 & ((x, t) \in \Omega \times (0, \infty)), \\ u(x, t) = 0 & ((x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty)), \\ u(x, 0) = u_0(x) & (x \in \Omega) \end{cases}$$

を考える。但し、 $\partial\Omega$ は \mathbb{R}^N の領域 Ω の滑らかな境界を表し、 $\lambda > 0$, $\kappa > 0$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ とする。さらに、 q はつぎの条件を満たすと仮定する。

$$2 \leq q \leq 2 + 4/N.$$

定理 5.2. 任意の初期値 $u_0 \in L^2(\Omega)$ に対して、(CGL) はつぎのクラスの解 u を一意的にもつ。

$$C([0, \infty); L^2(\Omega)) \cap C^1((0, \infty); L^2(\Omega)) \cap C((0, \infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)).$$

さらに、次のような解の初期値に関する連続的依存性が成り立つ。

u, v をそれぞれ初期値が $u_0 \in L^2(\Omega)$, $v_0 \in L^2(\Omega)$ である上述のクラスの解とする。このとき、各 $\tau, r > 0$ に対して $M(\tau, r) > 0$ が存在して

$$\|u(t) - v(t)\|_{L^2} \leq M(\tau, r) \|u_0 - v_0\|_{L^2} \quad (t \in [0, \tau], \quad u_0, v_0 \in L^2(\Omega), \quad \|u_0\|_{L^2} \leq r, \|v_0\|_{L^2} \leq r).$$

(定理の証明の概略) $X = L^2(\Omega)$ とし、 X における作用素 A を

$$Au = (\lambda + i\mu)(\Delta u - u) \quad (u \in D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \quad (5.10)$$

により定める。このとき、 A は X 上の (C_0) 級の解析的半群 $\{T(t); t \geq 0\}$ の無限小生成作用素であり、評価 $\|T(t)\| \leq e^{-\lambda t}$ ($t \geq 0$) が成り立つ。

もし抽象的設定に現れる $D, \alpha \in (0, 1)$ を

$$Bu = -(\kappa + i\nu)|u|^{q-2}u + (\lambda + i\mu)u \quad (u \in C := D \cap Y) \quad (5.11)$$

により定められる作用素 B が C から X への作用素であり、条件 (B3) を満たすように決定できれば、(CGL) は半線形発展方程式の初期値問題 (SP) に翻訳され、定理 5.1 を適用できる。これを実行するために、つぎの 2 つの場合に分けて考察する。

$$(I) \quad 2 \leq q < 2 + 4/N, \quad (5.12)$$

$$(II) \quad q = 2 + 4/N.$$

ここでは、(I) の場合についてのみ紹介する。 $r_0 > 0$ とし、 $D = \{u \in L^2(\Omega); \|u\|_{L^2}^2 \leq r_0\}$ と定め、 $\alpha \in (0, 1)$ をつぎのように選ぶ。

$$(q-1)\theta < \alpha < 1. \quad (5.13)$$

但し $\theta = (N/2)(1/2 - 1/2(q-1))$ である。(5.12) により $0 \leq (q-1)\theta < 1$ であるから、上のよう
に α を選ぶことは可能である。条件 (B3) を調べるために、つぎの補題を必要とする。

補題 5.3. Z をバナッハ空間とする。 $\theta \in [0, 1)$, $K_0 > 0$ とし、 F をつぎの条件を満たす $D(A)$ から Z への線形作用素とする。

$$\|Fx\|_Z \leq K_0 \|x\|^{1-\theta} \|Ax\|^\theta \quad (x \in D(A)). \quad (5.14)$$

このとき、 $\theta < \sigma < 1$ ならば、線形作用素 $\tilde{F} : D((-A)^\sigma) \rightarrow Z$ が存在して、

$$\begin{cases} \tilde{F}x = Fx & (x \in D(A)), \\ \|\tilde{F}x\|_Z \leq K_{\sigma, \theta} \|x\|^{1-\theta/\sigma} \|(-A)^\sigma x\|^{\theta/\sigma} & (x \in D((-A)^\sigma)). \end{cases}$$

この補題の証明は、文献 [13], [21] にある考え方を利用して行われる。

条件 (B3) の確認に移る。Gagliardo-Nirenberg 不等式により、 $H^2(\Omega) \subset L^{2(q-1)}(\Omega)$ であり

$$\|u\|_{L^{2(q-1)}} \leq K_0 \|u\|^{1-\theta} \|u\|_{H^2}^\theta \leq K_0 \|u\|^{1-\theta} \|Au\|^\theta \quad (u \in D(A)).$$

(5.13) であるから、補題 5.3 を $Z = L^{2(q-1)}(\Omega)$, $\sigma = \alpha$ で用いることができるので、 $Y := D((-A)^\alpha) \subset L^{2(q-1)}(\Omega)$,

$$\|u\|_{L^{2(q-1)}} \leq K_0 \|u\|^{1-\theta/\alpha} \|(-A)^\alpha u\|^{\theta/\alpha} \quad (u \in Y). \quad (5.15)$$

よって、(5.11) により定義される作用素 B は C を X に写す。

$$\|\xi|^{q-2}\xi - |\eta|^{q-2}\eta\| \leq K_0 \left(\int_0^1 |\theta\xi + (1-\theta)\eta|^{q-2} d\theta \right) |\xi - \eta| \quad (\xi, \eta \in \mathbb{C}) \quad (5.16)$$

であるから、 $u, v \in C$ に対して

$$\|Bu\| \leq (\kappa^2 + \nu^2)^{1/2} \|u\|_{L^{2(q-1)}}^{q-1} + (\lambda^2 + \mu^2)^{1/2} \|u\|, \quad (5.17)$$

$$\|Bu - Bv\| \leq K_0 (\|u\|_{L^{2(q-1)}} \vee \|v\|_{L^{2(q-1)}})^{q-2} \|u - v\|_{L^{2(q-1)}} + (\lambda^2 + \mu^2)^{1/2} \|u - v\| \quad (5.18)$$

が成り立つ。(5.17), (5.15), (5.13) により、

$$\begin{aligned} \|Bu\| &\leq K_0 \|u\|^{(1-\theta/\alpha)(q-1)} \|(-A)^\alpha u\|^{(q-1)\theta/\alpha} + (\lambda^2 + \mu^2)^{1/2} \|u\| \\ &\leq K_0 \|u\|^{(1-\theta/\alpha)(q-1)} (1 + \|(-A)^\alpha u\|) + (\lambda^2 + \mu^2)^{1/2} \|u\| \quad (u \in C) \end{aligned} \quad (5.19)$$

であり、作用素 B は条件 (B3) を満たし、(5.18) より、局所リプシッツ条件 (5.1) を満たす。

さて、定理 5.1 の条件 (ii) を調べるために、先の考察をもとに、汎関数 $V : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ を

$$V(u, v) = \exp((b/2\kappa)((\|u\| \wedge \sqrt{r_0})^2 + (\|v\| \wedge \sqrt{r_0})^2)) (\|u - v\| \wedge (2\sqrt{r_0})) \quad (5.20)$$

により定める。条件 (ii-1) が満たされることは容易に確かめられる。条件 (ii-2) を調べるために、 $u_0 \in C$ とする。 $t > 0$ に関して $J_t u_0$ は微分可能であり、 $J_t u_0 \in D(A)$ 、 $(d/dt)J_t u_0 = AJ_t u_0 + Bu_0$ ($t > 0$) が成り立つ。 $f(t) = Bu_0 - B(J_t u_0)$ ($t > 0$) とおけば、 $\lim_{t \downarrow 0} \|f(t)\| = 0$ 、 $\lim_{t \downarrow 0} \|(-A)^\alpha (J_t u_0 - u_0)\| = 0$ であり、

$$(d/dt)J_t u_0 = AJ_t u_0 + B(J_t u_0) + f(t) \quad (t > 0)$$

が成り立つ。この $J_t u_0$ について、解の初期値に関する連続的依存性の導出と同様の議論をすれば、条件 (ii-2) が満たされる。もし $J_t u_0 \in C$ ($t > 0$) ならば、条件 (ii-3) は自動的に満たされる。残念ながら、いまの場合はそうでない。条件 (ii-3) を調べるために、 $u_0 \in C$ とする。 $B_0 \in B(Y, X)$ を

$$B_0 u = -(\kappa + i\nu)|u_0|^{q-2} u + (\lambda + i\mu)u \quad (u \in Y)$$

により定める。このとき、 $v \in C([0, \infty); Y) \cap C^1((0, \infty); X)$ が存在して

$$v(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)B_0 v(s) ds \quad (t \geq 0)$$

である。よって、 $v'(t) = Av(t) + B_0 v(t)$ ($t \geq 0$)、 $v(0) = u_0$ を満たすので、

$$\frac{\partial v}{\partial t} - (\lambda + i\mu)\Delta v + (\kappa + i\nu)|u_0|^{q-2} v = 0$$

である。(5.6)の導出と同様にして,

$$(d/dt)\|v(t)\|_{L^2}^2 + 2\lambda\|\nabla v(t)\|_{L^2}^2 + 2\kappa \int_{\Omega} |u_0(x)|^{q-2}|v(x,t)|^2 dx = 0$$

が得られるので, $(d/dt)\|v(t)\|_{L^2}^2 \leq 0$ ($t \geq 0$) が成り立つ. よって, $v(t) \in C$ ($t \geq 0$) である. $v \in C([0, \infty); Y)$, $B_0 v(0) = B_0 u_0 = B u_0$, $B_0 \in B(Y, X)$ であるから, $\rho(h) = \sup_{0 \leq t \leq h} \|B_0 v(t) - B u_0\|$ ($h > 0$) と置けば, $\rho(h) \rightarrow 0$ ($h \downarrow 0$) である.

$$v(h) - J_h u_0 = \int_0^h T(h-s)(B_0 v(s) - B u_0) ds \quad (h > 0)$$

であるから, $\|v(h) - J_h u_0\| \leq h\rho(h)$ ($h > 0$) が成り立つ. さらに, 評価 $\|(-A)^\alpha T(t)\| \leq M_\alpha t^{-\alpha}$ ($t > 0$) を用いると, $\|(-A)^\alpha(v(h) - J_h u_0)\| \leq M_\alpha h^{1-\alpha} \rho(h)$ ($h > 0$) が成り立つ. このようにして定理 5.1 の条件 (ii) を確認できるので, 定理 5.1 により所要の結果を得る.

参考文献

- [1] H. Amann, Invariant sets and existence theorems for semilinear parabolic and elliptic systems, J. Math. Anal. Appl. **65** (1978) 432–467.
- [2] H. Amann, Linear and Quasilinear Parabolic Problems, Vol. 1, Birkhäuser Verlag, 1995.
- [3] H. Brezis, Opérateurs maximaux Monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert, Math. Studies **5** North-Holland, 1973.
- [4] H. Brezis, Équations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité, Ann. Inst. Fourier **18** (1968) 115–175.
- [5] H. Brezis and A. Pazy, Convergence and approximation of semigroups of nonlinear operators in Banach spaces, J. Functional Analysis **9** (1972) 63–74.
- [6] P. R. Chernoff, Note on product formulas for operator semigroups, J. Functional Analysis **2** (1968) 238–242.
- [7] P. R. A. J. Chorin, T. J. R. Hughes, M. F. McCracken and J. E. Marsden, Product formulas and numerical algorithms, Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978) 205–256.
- [8] J. T. Chambers and S. Oharu, Semi-groups of local Lipschitzians in a Banach space, Pacific J. Math. **39** (1971) 89–112.
- [9] M. G. Crandall, Nonlinear semigroups and evolution governed by accretive operators, Proc. Sympos. Pure Math., **45**, Part 1, pp. 305–337, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.
- [10] M. G. Crandall and T. M. Liggett, Generation of semi-groups of nonlinear transformations on general Banach spaces, Amer. J. Math. **93** (1971) 265–298.
- [11] Z-M. Chen, A remark on flow invariance for semilinear parabolic equations, Israel J. Math. **74** (1991) 257–266.
- [12] W. Feller, On the generation of unbounded semi-groups of bounded linear operators, Ann. of Math. **58** (1953) 166–174.
- [13] D. Henry, Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Lecture Notes in Math. **840**, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [14] E. Hille and R. Phillips, Functional analysis and semi-groups, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXXI, American Mathematical Society, Providence, R. I., 1974.
- [15] T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag, New York, 1984.

- [16] T. Kato, Nonlinear semigroups and evolution equations, *J. Math. Soc. Japan* **19** (1967) 508–520.
- [17] Y. Kobayashi, Difference approximation of Cauchy problems for quasi-dissipative operators and generation of nonlinear semigroups, *J. Math. Soc. Japan* **27** (1975) 640–665.
- [18] Y. Kobayashi, T. Matsumoto and N. Tanaka, Semigroups of locally Lipschitz operators associated with semilinear evolution equations, *J. Math. Anal. Appl.* **330** (2007) 1042–1067.
- [19] Y. Kobayashi and N. Tanaka, Semigroups of Lipschitz operators, *Adv. Differential Equations* **6** (2001) 613–640.
- [20] Y. Kōmura, Nonlinear semi-groups in Hilbert space, *J. Math. Soc. Japan* **19** (1967) 493–507.
- [21] S. G. Krein, Linear differential equations in Banach space, *Translations of Mathematical Monographs*, Vol. **29**, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1971.
- [22] T. G. Kurtz, Extension of Trotter’s operator semigroup approximation theorems, *J. Funct. Anal.* **3** (1969) 354–375.
- [23] V. Lakshmikantham and S. Leela, *Nonlinear Differential Equations in Abstract Spaces*, Pergamon Press, Oxford, 1981.
- [24] P. D. Lax and R. D. Richtmyer, Survey of the stability of linear finite difference equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **9** (1956) 267–293.
- [25] J. H. Lightbourne III and R. H. Martin, Jr., Relatively continuous nonlinear perturbations of analytic semigroups, *Nonlinear Anal., TMA* **1** (1977) 277–292.
- [26] A. Lunardi, *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, *Progress in Non-linear Differential Equations and their Applications* **16**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.
- [27] J. E. Marsden, On product formulas for nonlinear semigroups, *J. Functional Analysis* **13** (1973) 51–72.
- [28] R. H. Martin, Jr., *Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Spaces*, Wiley-Interscience, New York, 1976.
- [29] I. Miyadera, Nonlinear semigroups, *Translations of Mathematical Monographs*, **109**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1992.
- [30] I. Miyadera and Y. Kobayashi, Convergence and approximation of nonlinear semigroups, *Proceedings of Japan-France Seminar on Functional Analysis and Numerical Analysis* (1978), 277–295.
- [31] H. Murakami, On non-linear ordinary and evolution equations, *Funkcial. Ekvac.* **9** (1966) 151–162.
- [32] S. Oharu and D. Tebbs, Locally relatively continuous perturbations of analytic semigroups and their associated evolution equations, *Japan J. Math.* **31** (2005) 97–129.
- [33] H. Okamura, Condition necessaire et suffisante remplie par les equations differentielles ordinaires sans points de Peano, (French) *Mem. Coll. Sci. Kyoto Imp. Univ. Ser. A.* **24** (1942) 21–28.
- [34] N. Okazawa and T. Yokota, Non-contraction semigroups generated by the complex Ginzburg-Landau equation, *GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl.* **20** (2004) 490–504.
- [35] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer Verlag, Berlin, 1983.
- [36] S. Reich, Product formulas, nonlinear semigroups, and accretive operators, *J. Functional Analysis* **36** (1980) 147–168.
- [37] S. Reich, Convergence, resolvent consistency, and the fixed point property for nonexpansive mappings, *Contemp. Math.* **18** Amer. Math. Soc., Providence, RI (1983), 167–174.
- [38] J. Prüss, On semilinear parabolic evolution equations on closed sets, *J. Math. Anal. Appl.* **77** (1980) 513–538.

- [39] H. Tanabe, Equations of evolution, Monographs and Studies in Mathematics, **6** Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass.-London, 1979.
- [40] H. F. Trotter, Approximation of semi-groups of operators, Pacific J. Math. **8** (1958) 887–919.
- [41] J. A. Walker, Some results on Liapunov functions and generated dynamical systems, J. Differential Equations **30** (1978) 424–440.
- [42] A. Yagi, Quasilinear abstract parabolic evolution equations with applications, pp. 381–397, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **50**, Birkhauser, Basel, 2002.
- [43] T. Yokota and N. Okazawa, Smoothing effect for the complex Ginzburg-Landau equation (general case), Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal. **13B** (2006) suppl., 305–316.
- [44] T. Yoshizawa, Stability theory by Liapunov's second method, Publications of the Mathematical Society of Japan, No. **9** The Mathematical Society of Japan, Tokyo 1966
- [45] K. Yosida, Functional analysis, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band **123**, Springer-Verlag, New York, 1978.

ある放物型方程式系の自己相似解のまわりの解の漸近挙動について

九州大学大学院修士2年 浅井 隆志

次の n 次元粘性 Burgers 方程式に対する初期値問題を考える.

$$(n-B) \quad \begin{cases} \partial_t u - \Delta_x u + a \cdot \nabla_x (|u|^{\frac{1}{n}} u) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = u_0, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

ここで $n \geq 2$, $\Delta_x = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $\nabla_x = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})^\top$ であり, $a \in \mathbb{R}^n$ は与えられたものとする.

方程式 (n-B) の可解性についてはすでによく研究されており, 例えば [2] では $L^1(\mathbb{R}^n)$ に属する任意の初期値に対して (n-B) の解が時間大域的に一意に存在することが示されている. ある関数 $w(x)$ を用いて $u(x, t) = t^{-\frac{n}{2}} w(\frac{x}{\sqrt{t}})$ なる形で表されるような解 u は自己相似解と呼ばれる. [1] では, 各 $\delta \in \mathbb{R}$ に対して, 全空間での積分値が δ であるような自己相似解 $U_\delta(x, t) = t^{-\frac{n}{2}} w_\delta(\frac{x}{\sqrt{t}})$ が一意に存在することが証明されている. 自己相似解は解の時間無限大での挙動において重要な役割を果たすことが知られており, 実際次のような定理が得られている.

Theorem 1 ([2]). 方程式 (n-B) において, 初期値 $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ が $\int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) dx = \delta$ を満たすとき, 解 u は次を満たす.

$$(1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (t+1)^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{r})} \|u(x, t) - (t+1)^{-\frac{n}{2}} w_\delta(\frac{x}{\sqrt{t+1}})\|_{L_x^r} = 0, \quad r \in [1, \infty].$$

本講演の目的は, 自己相似解を空間方向に適当に平行移動させることで解の時間無限大での挙動についてより良い評価を与えることである. 関数 G を n 次元 Gauss 関数 $(4\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4}}$ とする. 主結果は次の定理である.

Theorem 2. *Theorem 1* において初期値 u_0 が $u_0 \in L^2(\frac{dx}{G})$ を満たし, $\delta \neq 0$ かつ $|\delta| \ll 1$ であるとする. このとき, ある $y(t) \in BC([0, \infty); \mathbb{R}^n) \cap C^1((0, \infty); \mathbb{R}^n)$ が存在して,

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (t+1)^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{r})+1-\eta(\delta)} \|u(x, t) - (t+1)^{-\frac{n}{2}} w_\delta(\frac{x+y(t)}{\sqrt{t+1}})\|_{L_x^r} = 0, \quad r \in [1, 2]$$

が成り立つ. ここで, $\eta(\delta)$ は $\lim_{\delta \rightarrow 0} \eta(\delta) = 0$ を満たす定数である.

Remark 1. 初期値に対する条件 $u_0 \in L^2(\frac{dx}{G})$ については多項式ウェイト $u_0 \in L^2(\frac{dx}{(1+|x|^2)^m})$, $m > \frac{n}{2} + 2$ に弱めることができる.

自己相似解を適当に平行移動させて解の収束評価を改良するという結果は, 1次元粘性 Burgers 方程式 (n-B) で $n = 1$ の場合) においては [3, 4] で得られている. そこでは, Hopf-Cole 変換により方程式を線形熱方程式に変換するという1次元に特有の性質が本質的に用いられている. そのため, 次元が2以上の場合には別のアプローチが必要となる. そこで, 本研究では自己相似解の周りでの線形化作用素を考察し, そのスペクトルの性質を本質的に用いることで主結果を示した.

まず、次の自己相似変換を導入する。

$$(3) \quad u(x, t) = (t+1)^{-\frac{n}{2}} \omega\left(\frac{x}{\sqrt{t+1}}, \log(t+1)\right), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{t+1}}, \quad \tau = \log(t+1).$$

すると (n-B) は次の方程式に変換される。

$$(n-B') \quad \begin{cases} \partial_\tau \omega + A\omega + B(\omega) = 0, & \tau > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \\ \omega|_{\tau=0} = u_0, & \xi \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

ここで、 $A = -\Delta_\xi - \frac{\xi}{2} \cdot \nabla_\xi - \frac{n}{2}$, $B(\omega) = a \cdot \nabla_\xi (|\omega|^{\frac{1}{n}} \omega)$ である。すると、関数 w_δ が $\int_{\mathbb{R}^n} w_\delta d\xi = \delta$ を満たす (n-B') の定常解であることと、 $U_\delta(x, t) = t^{-\frac{n}{2}} w_\delta\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ が全空間での積分値が δ の (n-B) の自己相似解となることが同値であることが確認できる。この変換により、(n-B) の解の自己相似解への漸近挙動の問題 (評価 (1) あるいは (2)) は方程式 (n-B') の定常解の安定性に帰着されることに注意する。

方程式 (n-B') の定常解 w_δ の安定性を調べるため、その周りでの線形化作用素 $L_\delta = A + B'(w_\delta)$ を考える。次の補題は本研究で鍵となるものである。

Lemma 1. $|\delta| \ll 1$ とする。このとき線形作用素 L_δ の $L^2_0\left(\frac{d\xi}{G(\xi)}\right) = \{f \in L^2\left(\frac{d\xi}{G(\xi)}\right) \mid \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) d\xi = 0\}$ におけるスペクトルは $\sigma(L_\delta) \subset \{\frac{1}{2}\} \cup \{\mu \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\mu) \geq 1 - \eta(\delta)\}$ を満たす。特に、 $\frac{1}{2}$ は多重度 n の *semisimple* 固有値でその固有関数は $\{\partial_{\xi_j} w_\delta\}_{j=1}^n$ で与えられる。

作用素 P を $L^2\left(\frac{d\xi}{G}\right)$ における L_δ の固有値 $\frac{1}{2}$ に対する固有射影とし、 $Q = I - P$ とする。主結果を得るために、 $\int_{\mathbb{R}^n} \omega(\xi, 0) d\xi = \delta$ を満たす (n-B') の解 $\omega(\cdot, \tau)$ に対して、 $v(\cdot, \tau) = \omega(\cdot, \tau) - w_\delta(\cdot + \tilde{y}(\tau))$ を $L^2_0\left(\frac{d\xi}{G}\right)$ において考察する。

鍵となるステップは、 $v(\cdot, \tau)$ が任意の $\tau \geq 0$ に対して $QL^2_0\left(\frac{d\xi}{G}\right)$ に属するように $\tilde{y}(\tau)$ を決めることである。実はこの $\tilde{y}(\tau)$ は (非線形) 常微分方程式の解として定式化され、これを解くことで平行移動 $\tilde{y}(\tau)$ を定めることができる。このように $\tilde{y}(\tau)$ の取り方が定められれば、上記補題より $QL^2_0\left(\frac{d\xi}{G}\right)$ での L_δ のスペクトルが $\{\mu \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\mu) \geq 1 - \eta(\delta)\}$ に含まれることを用いて、 $v(\cdot, \tau)$ に対して必要な時間減衰評価を得ることができる。最後に自己相似変換を元に戻せば、主結果が示される。

REFERENCES

- [1] J. Aguirre, M. Escobedo, and E. Zuazua, Self-similar solutions of a convection-diffusion equation and related elliptic problems, *Comm. P. D. E.*, **15** no.2 (1990), 139-157.
- [2] M. Escobedo and E. Zuazua, Large time behavior for convection-diffusion equations in \mathbb{R}^n , *J. Funct. Anal.*, **100** (1991), 1190-161.
- [3] J. C. Miller and A. J. Bernoff, Rates of convergence to self-similar solutions of Burgers's equation, *Stud. Appl. Math.* **111** no. 1 (2003), 29-40.
- [4] T. Yanagisawa, Asymptotic behavior of solutions to the viscous Burgers equation, *Osaka J. Math.* **44** no.1 (2007), 99-119.

DISSIPATIVE PLATE EQUATION の解の減衰評価

杉谷 陽介 (九州大学大学院数理学府)

本講演では、次のような線形偏微分方程式の初期値問題を考察する。

$$(1) \quad \begin{cases} w_{tt} + \Delta^2 w - \Delta w_{tt} + \alpha w_t = 0, \\ w(x, 0) = w_0(x), \\ w_t(x, 0) = w_1(x). \end{cases}$$

ただし、 $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ であり、 $\alpha > 0$ を仮定する。この方程式は板の振動を表す方程式に消散項を加えたもので、 w は横断線の変位を表し、 αw_t は摩擦の効果を表している。この初期値問題 (1) の解 w , w_t の減衰評価、エネルギーの減衰評価、および解の漸近挙動を示すことが本講演の目的である。

まず、解の表示について調べる。初期値問題 (1) にフーリエ変換を施すと以下の問題を導く。

$$(2) \quad \begin{cases} (1 + |\xi|^2)\hat{w}_{tt} + \alpha\hat{w}_t + |\xi|^4\hat{w} = 0, \\ \hat{w}(\xi, 0) = \hat{w}_0(\xi), \\ \hat{w}_t(\xi, 0) = \hat{w}_1(\xi). \end{cases}$$

ただし、 $\xi \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ 。この初期値問題 (2) の解は次で与えられる。

$$(3) \quad \hat{w}(\xi, t) = \hat{G}(\xi, t)(\alpha\hat{w}_0 + \hat{w}_1)(\xi) + \hat{H}(\xi, t)\hat{w}_0(\xi).$$

ただし、 $\hat{G}(\xi, t)$, $\hat{H}(\xi, t)$ は

$$(4) \quad \hat{G}(\xi, t) := \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)}(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}),$$

$$(5) \quad \hat{H}(\xi, t) := \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)}\{(\alpha + \lambda_1)e^{\lambda_2 t} - (\alpha + \lambda_2)e^{\lambda_1 t}\}$$

である。ここで、 $\lambda_1 = \lambda_1(\xi)$, $\lambda_2 = \lambda_2(\xi)$ は固有値であり、以下で与えられる。

$$(6) \quad \lambda_j(\xi) = \frac{1}{2(1 + |\xi|^2)}(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - (1 + |\xi|^2)|\xi|^4}), \quad j = 1, 2.$$

今、 $\hat{G}(\xi, t)$, $\hat{H}(\xi, t)$ のフーリエ逆変換を $G(x, t)$, $H(x, t)$ とすれば、初期値問題 (1) の解は

$$(7) \quad w(t) = G(t) * (\alpha w_0 + w_1) + H(t) * w_0$$

の形に表される。ただし、 $*$ は x に関する合成積である。

次に解の減衰評価について述べる。以下、 s, k は非負整数とし、

$$\sigma = \sigma(k) := k + \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor$$

とする。(4), (5) の各点評価とプランシュレルの定理から、解作用素 $G(t)*$, $H(t)*$ について次の命題を得る。

Proposition [解作用素の評価]

$s \geq 0$ とし, $\varphi \in H^s, \psi \in H^{s+1}$ を仮定する. このとき, $\sigma = \sigma(k) \leq s+1$ ならば, 次の評価が成り立つ.

$$\begin{aligned} \|\partial_x^k G(t) * \varphi\|_{H^{s+1-\sigma}} &\leq C(1+t)^{-\frac{k}{4}} \|\varphi\|_{H^s}, \\ \|\partial_x^k H(t) * \psi\|_{H^{s+1-\sigma}} &\leq C(1+t)^{-\frac{k}{4}} \|\psi\|_{H^{s+1}}. \end{aligned}$$

また, $s \geq 2, \sigma = \sigma(k) \leq s-2$ ならば, 以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} \|\partial_x^k \partial_t G(t) * \varphi\|_{H^{s-2-\sigma}} &\leq C(1+t)^{-\frac{k}{4}-\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{H^s}, \\ \|\partial_x^k \partial_t H(t) * \psi\|_{H^{s-2-\sigma}} &\leq C(1+t)^{-\frac{k}{4}-\frac{1}{2}} \|\psi\|_{H^{s+1}}. \end{aligned}$$

さらに, 上の命題を用いると, 初期値問題 (1) の解 w, w_t の減衰評価について次の定理を得る.

Theorem [解の減衰評価]

$s \geq 0$ とし, $w_0 \in H^{s+1}, w_1 \in H^s$ を仮定する. このとき, $\sigma = \sigma(k) \leq s+1$ ならば, 解 w は次の減衰評価を満たす.

$$\|\partial_x^k w(t)\|_{H^{s+1-\sigma}} \leq C(1+t)^{-\frac{k}{4}} (\|w_0\|_{H^{s+1}} + \|w_1\|_{H^s}).$$

また, $s \geq 2, \sigma = \sigma(k) \leq s-2$ ならば, 解 w_t は次の減衰評価を満たす.

$$\|\partial_x^k \partial_t w(t)\|_{H^{s-2-\sigma}} \leq C(1+t)^{-\frac{k}{4}-1} (\|w_0\|_{H^{s+1}} + \|w_1\|_{H^s}).$$

次に, 初期値問題 (1) のエネルギーを

$$E_k(t) := \|\partial_x^k \partial_t w(t)\|_{H^1}^2 + \|\partial_x^{k+2} w(t)\|_{L^2}^2$$

で定義する. このとき, エネルギー減衰に関して次の定理を得る.

Theorem [エネルギーの減衰評価]

$s \geq 2$ とし, $w_0 \in H^{s+1}, w_1 \in H^s$ を仮定する. このとき, $\sigma = \sigma(k) \leq s-2$ ならば, エネルギー $E_k(t)$ は次の減衰評価を満たす.

$$E_k(t) \leq C(1+t)^{-\frac{k}{2}-1} (\|w_0\|_{H^{s+1}}^2 + \|w_1\|_{H^s}^2).$$

最後に, 解の漸近挙動について述べる. $\hat{G}_0(\xi, t) := \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{1}{\alpha} |\xi|^4 t}$ とおき, そのフーリエ逆変換を $G_0(x, t)$ とする. このとき次の定理を得る.

Theorem [解の近似]

$s \geq 0$ とし, $w_0 \in H^{s+1}, w_1 \in H^s$ を仮定する. このとき, $\sigma = \sigma(k) \leq s$ ならば,

$$\|\partial_x^k \{w(t) - G_0(t) * (\alpha w_0 + w_1)\}\|_{H^{s-\sigma}} \leq C(1+t)^{-\frac{k}{4}-\frac{1}{2}} (\|w_0\|_{H^{s+1}} + \|w_1\|_{H^s}).$$

また, $s \geq 3, \sigma = \sigma(k) \leq s-3$ ならば,

$$\|\partial_x^k \partial_t \{w(t) - G_0(t) * (\alpha w_0 + w_1)\}\|_{H^{s-3-\sigma}} \leq C\rho(t)(1+t)^{-\frac{k}{4}-\frac{3}{2}} (\|w_0\|_{H^{s+1}} + \|w_1\|_{H^s}).$$

ただし, $\rho(t)$ は $k=0$ なら $\rho(t) = 1+t^{-\frac{1}{4}}$, $k \geq 1$ なら $\rho(t) = 1$ である.

REFERENCES

- [1] C.R. da Luz and R.C. Charão, Asymptotic properties for a semilinear plate equation in unbounded domains, preprint (2008).
- [2] Y. Ueda and S. Kawashima, Large time behavior of solutions to a semilinear hyperbolic system with relaxation, J. Hyperbolic Differential Equations, **4** (2007), 147-179.

E-mail address: ma207042@math.kyushu-u.ac.jp

多次元半空間における非線形移流項付き消散型波動方程式 に現れる平面定常波の安定性

上田 好寛 (九州大学大学院 数理学研究院)

多次元半空間 $\mathbb{R}_+^n := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}$ ($\mathbb{R}_+ := (0, \infty)$, $n \geq 2$) における, 非線形移流項付き消散型波動方程式の初期・境界値問題

$$(1) \quad \begin{aligned} u_{tt} - \Delta u + u_t + \operatorname{div} f(u) &= 0, \\ u(t, x)|_{x_1=0} &= u_b, \\ u(0, x) &= u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x) \end{aligned}$$

について考察する。ここで, $u = u(t, x)$ を未知関数, $f = f(u)$ を既知のベクトル値関数で $f = (f_1, \dots, f_n)$ とし, u_b は定数とする。さらに, 初期値 $u_0(x)$ に対し

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty} u_0(x) = u_+ (\neq u_b)$$

を仮定し, u_+ は定数とする。また, 非線形項 f に対し

$$|f'(u)| < 1, \quad f_1''(u) > 0 \quad \text{for } u \in [u_b, u_+]$$

を仮定する。このとき, 初期・境界値問題 (1) に対応する平面定常波への漸近安定性と定量的な時間減衰率を求めることが本研究の目的である。ここで, 平面定常波とは法線方向 (x_1 方向) のみに依存する定常波をさし, 次の一次元定常問題の解で表される。

$$(2) \quad \begin{aligned} -\phi_{x_1 x_1} + f_1(\phi)_{x_1} &= 0, \\ \phi(0) &= u_b, \quad \lim_{x_1 \rightarrow \infty} \phi(x_1) = u_+. \end{aligned}$$

この定常問題の解の存在と漸近形は Liu-Matsumura-Nishihara [4] により既に次の命題で示されている。

Proposition 1. ([4])

定常問題 (2) が解 ϕ を持つための必要条件は $f_1'(u_+) \leq 0$ である。またさらに, 次の性質が成り立つ。

(i) 非縮退定常波: $f_1'(u_+) < 0$ を仮定する。このとき, $u_b < u_+$ なら単調増加な定常波 $\phi(x_1)$ が存在し, もし $u_+ < u_b$ で $u \in (u_+, u_b)$ に対し $f_1(u) < f_1(u_+)$ をみたす場合, 単調減少な定常波 $\phi(x_1)$ が存在する。またどちらの場合も, 定常波 $\phi(x_1)$ は指数的に u_+ へと漸近する。

(ii) 縮退定常波: $f_1'(u_+) = 0$ を仮定する。このとき, $u_b < u_+$ の場合のみ定常波 $\phi(x_1)$ は存在し, 定常波 $\phi(x_1)$ は単調増加で, 多項式的に u_+ へと近づく。

Proposition 1 で存在が示された定常波に対し, 漸近安定性と時間減衰率を示したのが次の Theorem 2 と Theorem 3 である。Theorem 2 は非縮退定常波に対する結果で, Theorem 3 で縮退定常波に対する減衰率を導き出している。

Theorem 2. (非縮退定常波)

$f'_1(u_+) < 0, u_b < u_+$ とする。 $\alpha \geq 0, s \geq [\frac{n-1}{2}] + 1$ に対し $(u_0 - \phi, \nabla(u_0 - \phi), u_1) \in X^s \cap L^2_\alpha$ を仮定する。また,

$$M_\alpha^2 := \|(u_0 - \phi, \nabla(u_0 - \phi), u_1)\|_{X^s}^2 + \|(u_0 - \phi, \nabla(u_0 - \phi), u_1)\|_{L^2_\alpha}^2$$

とおく。このとき, ある正定数 ε_0 が存在し $M_0 \leq \varepsilon_0$ をみたすなら, 初期・境界値問題 (1) は

$$(u - \phi, \nabla(u - \phi), u_t) \in C([0, \infty); X^s \cap L^2_\alpha)$$

をみたす一意の時間大域解 u を持つ。またさらに, 解 u は次の L^∞ 減衰評価をみたす。

$$\|(u - \phi)(t)\|_{L^\infty} \leq CM_\alpha(1+t)^{-\alpha/2-(n-1)/4}$$

Theorem 3. (縮退定常波)

$f'_1(u_+) = 0, u_b < u_+$ とする。 $s \geq [\frac{n-1}{2}] + 1$ に対し $(u_0 - \phi, \nabla(u_0 - \phi), u_1) \in X^s$ を仮定する。このとき, ある正定数 ε_1 が存在して $M_0 \leq \varepsilon_1$ をみたすなら, 初期・境界値問題 (1) は

$$(u - \phi, \nabla(u - \phi), u_t) \in C([0, \infty); X^s)$$

をみたす一意の時間大域解 u を持ち, 次の L^∞ 減衰評価が成り立つ。

$$\|(u - \phi)(t)\|_{L^\infty} \leq CM_0(1+t)^{-(n-1)/4}$$

Notations.

関数空間 X^s を以下で定義する。

$$X^s = \{u \in L^2; \partial^k u \in L^2 \text{ for } k \leq s\}, \quad \|u\|_{X^s} = \left(\sum_{k=0}^s \|\partial^k u\|_{L^2}^2 \right)^{1/2},$$

ここで, ∂^k は接方向の k 階微分を表し, $X^s = L^2(\mathbb{R}_+; H^s(\mathbb{R}^{n-1}))$ を示す。

また, $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し, 重み付き関数空間 L^2_α を以下で定義する。

$$L^2_\alpha = \{u \in L^2; (1+x_1)^{\alpha/2} u \in L^2\}, \quad \|u\|_{L^2_\alpha} = \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} (1+x_1)^\alpha |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

REFERENCES

- [1] A. M. Il'in and O. A. Oleinik, *Behavior of the solution of the Cauchy problem for certain quasilinear equations for unbounded increase of the time*, Amer. Math. Soc. Transl., **42** (1964), 19–23.
- [2] S. Kawashima, S. Nishibata and M. Nishikawa, *Asymptotic stability of stationary waves for two-dimensional viscous conservation laws in half plane*, Discrete Contin. Dyn. Syst., Suppl., (2003), 469–476.
- [3] S. Kawashima, S. Nishibata and M. Nishikawa, *Asymptotic stability of stationary waves for multi-dimensional viscous conservation laws in half space*, preprint, 2004.
- [4] T.-P. Liu, A. Matsumura and K. Nishihara, *Behaviors of solutions for the Burgers equation with boundary corresponding to rarefaction waves*, SIAM J. Math. Anal., **29** (1998), 293–308.
- [5] Y. Ueda, *Asymptotic stability of stationary waves for damped wave equations with a nonlinear convection term*, preprint.

非線形消散型波動方程式系の時間大域解の存在について

竹田 寛志 (東北大学大学院理学研究科 D2)

$p, q > 1$ に対して, 次の非線形消散型波動方程式系の初期値問題

$$(1) \quad \begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + \partial_t u = |v|^p, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \partial_t^2 v - \Delta v + \partial_t v = |u|^q, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0, x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ v(0, x) = v_0(x), \quad \partial_t v(0, x) = v_1(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

の時間大域解の存在に関する臨界指数 p, q について考える. ここで, $u = u(t, x), v = v(t, x)$ は未知の実数値函数とする.

方程式系 (1) に関しては, Sun-Wang [12] によって

$$\max \left\{ \frac{p+1}{pq-1}, \frac{q+1}{pq-1} \right\} \geq \frac{n}{2}, \quad \int_{\mathbb{R}^n} u_i(x) dx > 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} v_i(x) dx > 0, \quad (i = 0, 1)$$

が成り立てば解の爆発が示されている. 他方, 単独の非線形消散型波動方程式に対しては, $1 \leq n \leq 5$ について L^p - L^q 評価を基にした大域解の存在が知られている (Marcati-Nishihara [8], Nishihara [11], Hosono-Ogawa [6], Narazaki [10]). 方程式系 (1) については $n = 1, 3$ のみ与えられていた [12]. ここでは, $n = 2$ の場合について臨界指数より大きい場合の時間大域解の存在について得られた結果を述べる. 以下, $p \leq q$ とする.

定理 $n = 2$ とする. 非線形項の指数の組 (p, q) が

$$\max \left\{ \frac{p+1}{pq-1}, \frac{q+1}{pq-1} \right\} < 1$$

を満たし, 初期データが $(u_0, u_1), (v_0, v_1) \in W^{1,1} \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2) \times L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ で各々ノルムが十分小さいとき, 連立系 (1) の (積分方程式の解の意味で) 時間大域解 $(u(t), v(t))$ が一意に存在して

$$u(t), v(t) \in C([0, \infty); L^{\frac{q(pq-1)}{1+q}} \cap L^\infty)$$

を満たす.

証明と基本になるの線形部分の基本解の L^p - L^q 評価を述べるために, 記法を導入する.

$$K_0(t)g := \mathcal{F}^{-1} \left[e^{-\frac{t}{2}} \cos \left(t \sqrt{|\xi|^2 - \frac{1}{4}} \right) \hat{g} \right], \quad K_1(t)g := \mathcal{F}^{-1} \left[e^{-\frac{t}{2}} \frac{\sin \left(t \sqrt{|\xi|^2 - \frac{1}{4}} \right)}{\sqrt{|\xi|^2 - \frac{1}{4}}} \hat{g} \right],$$

$$W_0(t)g := \mathcal{F}^{-1} [\cos(t|\xi|)\hat{g}], \quad W_1(t)g := \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} \hat{g} \right]$$

とおく. $K_0(t)u_0 + K_1(t) \left(\frac{1}{2}u_0 + u_1 \right)$ は

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + \partial_t u = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0, x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

の解であり, $W_0(t)u_0 + W_1(t)u_1$ は

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0, x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

の解である.

補題 $1 \leq s \leq r \leq \infty$ とする. 任意の $g \in L^s(\mathbb{R}^2)$ に対して,

$$\left\| \left(K_0(t) - e^{-\frac{t}{2}} W_0(t) - e^{-\frac{t}{2}} \frac{t}{8} W_1(t) \right) g \right\|_{L^r} \leq C(1+t)^{-\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{r}\right)} \|g\|_{L^s}$$

が成り立つ.

注意 1. 補題は消散型波動方程式の基本解が, ある波動方程式の解を引き去ると原点における特異性がなくなり, さらに線形熱方程式と同じ減衰をすることを主張する.

注意 2. Hosono-Ogawa [6] において, $1 \leq s \leq r \leq \infty$, $g \in L^s(\mathbb{R}^2)$ に対して,

$$\left\| \left(K_1(t) - e^{-\frac{t}{2}} W_1(t) \right) g \right\|_{L^r} \leq C(1+t)^{-\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{r}\right)} \|g\|_{L^s},$$

$$\left\| \left(K_0(t) - \frac{1}{2} e^{t\Delta} g - e^{-\frac{t}{2}} W_0(t) - e^{-\frac{t}{2}} \frac{t}{8} W_1(t) \right) g \right\|_{L^r} \leq C \begin{cases} t^{-\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{r}\right)-1} \|g\|_{L^s}, & (t \geq 1), \\ t^{-\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{r}\right)} \|g\|_{L^s}, & (0 < t \leq 1) \end{cases}$$

となることが知られている.

注意 3. 方程式系 (1) に対応する非線形反応拡散方程式系 ([5], [9], [2]), 非線形波動方程式系 ([4], [3], [7], [1]) には臨界指数に関して多数の先行結果がある.

REFERENCES

- [1] Agemi, R., Kurokawa, Y., and Takamura, H., *Critical curve for p - q systems of nonlinear wave equations in three space dimensions*. J. Differential Equations, **167** (2000), 87-133.
- [2] Aoyagi, Y., Tsutaya, K., Yamauchi, Y., *Global existence of solutions for a reaction-diffusion system*. Differential Integral Equations **20** (2007), no. 12, 1321-1339.
- [3] Deng, K., *Nonexistence of global solutions of a nonlinear hyperbolic system*. Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), 1685-1696.
- [4] Del Santo, D., Georgiev, V., Mitidieri, E., *Global existence of the solutions and formation of singularities for a class of hyperbolic systems*. Geometrical optics and related topics (Cortona, 1996), 117-140, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **32**, Birkhuser Boston, Boston, MA, 1997.
- [5] Escobedo, M., Herrero, M. A., *Boundedness and blow up for a semilinear reaction diffusion system*. J. Differential Equations **89** (1991), no. 1, 176-202.
- [6] Hosono, T., Ogawa, T., *Large time behavior and L^p-L^q estimate of 2-dimensional nonlinear damped wave equations*, J. Differential Equations **203** (2004), no. 1, 82-118.
- [7] Kubo, H., Ohta, *Critical blowup for systems of semilinear wave equations in low space dimensions*. M., J. Math. Anal. Appl. **240** (1999), 340-360.
- [8] Marcati, P., Nishihara, K., *The L^p-L^q estimates of solutions to one-dimensional damped wave equations and their application to compressible flow through porous media*, J. Differential Equations, **191** (2003), 445-469.
- [9] Mochizuki, K., Huang, Q., *Existence and behavior of solutions for a weakly coupled system of reaction-diffusion equations*. Methods Appl. Anal., **5** (1998), 109-124.
- [10] Narazaki, T., *L^p-L^q estimates for damped wave equations and their applications to semi-linear problem*, J. Math. Soc. Japan, **56** (2004), 585-626.
- [11] Nishihara, K., *L^p-L^q estimates of solutions to the damped wave equation in 3-dimensional space and their application*, Math. Z., **244** (2003), 631-649.
- [12] Sun, F., Wang, M., *Existence and nonexistence of global solutions for a nonlinear hyperbolic system with damping*. Nonlinear Anal. **66** (2007), no. 12, 2889-2910.

荷電粒子の密度解析に由来する移流拡散方程式系の解の漸近評価について

山本征法 (東北大学大学院理学研究科)

ここでは, 荷電粒子の密度解析に由来する Nernst–Planck 型の移流拡散方程式系を考える. $n \geq 3$, $1 < \theta < n$ として次の Cauchy 問題を導入する.

$$(1) \quad \begin{cases} \partial_t u + (-\Delta)^{\theta/2} u + \nabla \cdot (u \nabla \psi) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ \partial_t v + (-\Delta)^{\theta/2} v - \nabla \cdot (v \nabla \psi) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ -\Delta \psi = v - u, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x), v(0, x) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

ここで, $(-\Delta)^{\theta/2} u := \mathcal{F}^{-1} [|\xi|^\theta \mathcal{F}[u]]$ であるが, 特に $\theta = 2$ の場合は $(-\Delta)^{\theta/2}$ は通常のラプラシアンで与えられる. $\theta = 2$ のとき, 移流拡散方程式の解の時間大域存在と減衰, 一次漸近形の評価が知られている ([3], [4]). 移流拡散方程式は荷電粒子の密度分布の解析モデルを簡略化して得られたものであり, u, v はそれぞれ負電荷, 正電荷の密度を表し, ψ は, 静電場のポテンシャルを表す. 移流拡散方程式は正電荷と負電荷とが, 静電場の移流効果を受けながら拡散する様子を表す方程式であり, その解の性質は線形拡散効果と非線形相互作用とのバランスによって決定する. なお, 正負 2 種類の荷電粒子が現れる身近な事象として, トランジスタなどの半導体デバイスの動作が挙げられる. この場合, u は半導体内の電子の密度, v は正孔の密度を表す. 移流拡散方程式は半導体デバイスのシミュレーションモデルと密接な関わりをもつ方程式として, 近年盛んに研究が行われている ([6]).

移流拡散方程式とよく似た非線形相互作用の構造をもつものに, 細胞性粘菌の走化性を記述した Keller–Segel 方程式および流体の運動を記述した Navier–Stokes 方程式がある. これらの方程式については, 時間大域解の高次漸近形の評価が知られている ([1], [2], [7], [8], [11]). この場合の展開次数には, 空間次元の取り方に応じた限度があることが知られている. この展開次数の限度は, 空間次元の取り方に応じて変化する線形拡散効果と非線形相互作用とのバランスによって決定すると考えられる. 更に Keller–Segel 方程式の場合には, 限界の次数の漸近形に特別な補正項が現れることが示されている ([2], [11]).

移流拡散方程式については, $n = 3$, $\theta = 2$ の場合の 2 次漸近形に特別な補正項が現れることを既に示した ([9]). ここでは, 線形拡散効果と非線形相互作用とのバランスに着目し, 移流拡散方程式の解の漸近評価を考える. 特に, (1) の時間大域解で次の条件を満たすものについて考える:

$$1 \leq p \leq \infty, \gamma = \frac{n}{\theta} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \text{ に対して}$$

$$(2) \quad \|u(t)\|_p, \|v(t)\|_p \leq C(1+t)^{-\gamma}.$$

$1 < \theta \leq 2$ のとき, $u_0, v_0 \geq 0$ なる大きな初期値に対して (2) が成り立つ. この証明にはエネルギー評価を用いる ([3], [9]). 一方, $2 < \theta < n$ の場合も初期値を十分小さく選べば (2) が成り立つ. なお, u, v が (2) を満たすとき, Hardy–Littlewood–Sobolev の不等式を用いて, $\nabla \psi$ の評価が得られる:

$$\frac{n}{n-\theta} < p < \infty, \gamma = \frac{n}{\theta} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \text{ に対して}$$

$$(3) \quad \|\nabla \psi\|_p \leq C(1+t)^{-\gamma+1/\theta}.$$

定理. $n \geq 3$ とし, $\theta = n - 1$ とする. $u_0, v_0 \in L_1^1(\mathbb{R}^n)$ とし, u, v は (1) の解で (2) を満たすとする. このとき, $1 \leq p \leq \infty$, $\gamma = \frac{n}{\theta} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ に対して次が成り立つ:

$$\left. \begin{aligned} & \|u(t) - M[u_0](t) - V[u, v](t) - J[u_0, v_0](t)\|_p \\ & \|v(t) - M[v_0](t) - V[v, u](t) - J[v_0, u_0](t)\|_p \end{aligned} \right\} = o(t^{-\gamma-1/\theta}).$$

また, J は次を満たす: $\|J[u_0, v_0](t)\|_p \leq Ct^{-\gamma-1/\theta}$.

特に, $n = 3$, $\theta = 2$, $m_0(u_0) \neq 0$, $m_0(u_0) \neq m_0(v_0)$ のとき $0 < C_1 < C_2$ が存在して次を満たす:

$$C_1(1+t)^{-2} \leq \|J[u_0, v_0](t)\|_\infty \leq C_2t^{-2}.$$

ただし, 定理で用いた記号は次のように定める:

$$M[u_0](t, x) = \sum_{|\beta| \leq 1} \frac{\nabla^\beta G_\theta(t, x)}{\beta!} m_\beta(u_0),$$

$$G_\theta(t, x) = \mathcal{F}^{-1} \left[e^{-t|\xi|^\theta} \right] (x), \quad m_\beta(u_0) = \int_{\mathbb{R}^n} y^\beta u_0 dy \quad (\beta \in \mathbb{Z}_+),$$

$$-V[u, v](t, x) = \nabla G_\theta(t, x) \cdot \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} K[u, v] dy ds,$$

$$K[u, v](s, y) = u \nabla \psi - m_0(u_0) m_0(v_0 - u_0) (G_\theta \nabla (-\Delta)^{-1} G_\theta)(1 + s, y),$$

$$J[u_0, v_0](t, x) = -m_0(u_0) m_0(v_0 - u_0) \int_0^t \nabla e^{-(t-s)(-\Delta)^{\theta/2}} \cdot (G_\theta \nabla (-\Delta)^{-1} G_\theta)(1 + s) ds.$$

なお, $1 < \theta < n - 1$ の場合, あるいは $n = \theta + 1$, $m_0(u_0) = m_0(v_0)$ の場合は, (4) において J を導入しない形の漸近評価が得られる.

REFERENCES

- [1] Fujigaki, Y., Miyakawa, T., SIAM J. Math. Anal. **33** (2001), 523-544.
- [2] Kato, M., *Sharp asymptotics for a parabolic system of chemotaxis in one space dimension*, preprint, Osaka University.
- [3] Kawashima, S., Kobayashi, R., *Decay estimates and large time behavior of solutions to the drift-diffusion system*, preprint, Kyushu University.
- [4] Kurokiba, M., Nagai, T., Ogawa, T., Commun. Pure Appl. Anal. **5** (2006), 97-106.
- [5] Kurokiba, M., Ogawa, T., J. Math. Anal. Appl. **342** (2008), 1052-1067.
- [6] Mock, M. S., J. Math. Anal. Appl. **49** (1975), 215-225.
- [7] Nagai, T., Yamada, T., J. Math. Anal. Appl. **336** (2007), 704-726.
- [8] Nishihara, K., *Asymptotic profile of solutions to a parabolic system of chemotaxis in one dimensional space*, preprint, Waseda University.
- [9] Ogawa, T., Yamamoto, M., *Asymptotic behavior of solutions to drift-diffusion system with generalized dissipation*,
- [10] Shibata, Y., Shimizu, S., J. Math. Fluid Mech. **3** (2001), 213-230.
- [11] Yamada, T., *Higher-order asymptotic expansions for a parabolic system modeling chemotaxis in the whole space*, preprint, Hiroshima University.

宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6 番 3 号

E-mail address: sa5m27@math.tohoku.ac.jp

SCHWARZ 函数の構成による HELE-SHAW 流の漸近挙動

小野寺 有紹 (東北大学大学院理学研究科)

本講演では、複数の点から非圧縮粘性流体を注入したときに現れる Hele-Shaw 流に対し、求積領域の理論を用いて、時間が十分経過した後の界面の形状について考察する。

Hele-Shaw 流とは、間隔の狭い 2 枚の平行板の間に非圧縮性粘性流体を注入していくときに現れる流れであり、その流体の界面は時間に依存して変化する。これは以下のような数学的問題として定式化される。平行板の間隔は十分小さいとし、流体の流れは 2 次元であるとみなす。 $\Omega(0) \subset \mathbb{C}$ を初期時刻 $t = 0$ において流体が占める領域とし、注入点 $c_j \in \Omega(0)$ ($j = 1, 2, \dots, l$) からそれぞれ単位時間あたりの注入量 $\alpha_j > 0$ ($j = 1, 2, \dots, l$) で流体を注入する。時刻 $t > 0$ において流体が占める領域を $\Omega(t)$ とするとき、その境界 $\partial\Omega(t)$ の各点における法線方向の速さは流体の圧力の法線微分に比例する。一方、時刻 $t > 0$ における流体の圧力分布は、各注入点 c_j を極とする領域 $\Omega(t)$ 上の Green 函数 $G_{c_j, \Omega(t)}$ の線形結合 $\sum_{j=1}^l \alpha_j G_{c_j, \Omega(t)}$ で表される。したがって、Hele-Shaw 流の問題とは

$$(1) \quad \left(\sum_{j=1}^l \alpha_j \frac{\partial G_{c_j, \Omega(t)}}{\partial n}(z) \right) \cdot \frac{\partial T}{\partial n}(z) = -1 \quad (z \in \partial\Omega(t), t > 0)$$

をみたく $\{\Omega(t)\}_{t>0}$ を求める問題である。ただし、 $T = T(z)$ は $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega(0)$ に対し $z \in \partial\Omega(T)$ となる時刻 T として定まる函数であり、 $\partial/\partial n$ は法線微分を表す。

方程式 (1) によって定式化された問題において、たとえ初期領域 $\Omega(0)$ の境界が十分に滑らかであったとしても、 $\Omega(t)$ の境界の滑らかさは先験的にはわからない。そのため、微分を含む定式化 (1) では解析が困難である。そこで、境界の滑らかさを要求しないような別の定式化が必要となる。Sakai [1] は、(1) をみたく $\{\Omega(t)\}_{t>0}$ は、 $\Omega(t)$ 上で劣調和かつ 2 次元 Lebesgue 測度 m に関して可積分な函数族 $SL^1(\Omega(t))$ に対し、

$$(2) \quad \int_{\Omega(0)} s \, dm + t \sum_{j=1}^l \alpha_j s(c_j) \leq \int_{\Omega(t)} s \, dm \quad (s \in SL^1(\Omega(t)))$$

をみたくことから、Hele-Shaw 流の問題を (2) をみたく $\{\Omega(t)\}_{t>0}$ を求める問題としてとらえ、求積領域の理論を適用した。この (2) をみたく領域族 $\{\Omega(t)\}_{t>0}$ を Hele-Shaw 流の問題の弱解という。

求積領域の一般論により、 $m(\Omega(0)) < \infty$ をみたく領域 $\Omega(0) \subset \mathbb{C}$ に対し、Hele-Shaw 流の弱解の存在が示される。

本講演では、 $\Omega(0)$ は有界と仮定して、弱解 $\{\Omega(t)\}_{t>0}$ の $t \rightarrow \infty$ での形状に対しえられた結果を報告する。注入点が 1 個の場合、 $t \rightarrow \infty$ で界面 $\partial\Omega(t)$ は注入点を中心とする円へと漸近していくことが示される。では、注入点が複数

個の場合, 界面 $\partial\Omega(t)$ の漸近形は円であろうか. また, そうだとすると円の中心の位置はどこであろうか.

次の定理が示すように, $t \rightarrow \infty$ で界面 $\partial\Omega(t)$ は,

$$w_l := \frac{\sum_{k=1}^l \alpha_k c_k}{\sum_{k=1}^l \alpha_k}$$

を中心とする円へと漸近することがわかる.

定理. 任意に $j_0 \in \{1, 2, \dots, l\}$ を固定し $\rho > 0$ を $\Omega(0) \subset D(c_{j_0}, \rho)$ となるようにとる. ただし, $D(c, r)$ は点 c を中心とする半径 r の開円板を表す. このとき, (2) をみたく $\{\Omega(t)\}_{t>0}$ に対し, 以下の評価が成り立つ:

$$D\left(w_l, \sqrt{\frac{t}{\pi} \sum_{k=1}^l \alpha_k} - \varepsilon_l^-(t)\right) \subset \Omega(t) \subset D\left(w_l, \sqrt{\frac{t}{\pi} \sum_{k=1}^l \alpha_k} + \varepsilon_l^+(t)\right).$$

ここで,

$$\begin{aligned} \varepsilon_l^-(t) &= \sqrt{\frac{\pi}{\sum_{k=1}^l \alpha_k}} \left(\sum_{j=2}^l \frac{\alpha_j \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_k}{\left(\sum_{k=1}^j \alpha_k\right)^2} |w_{j-1} - c_j|^2 \right) t^{-1/2} + O(t^{-1}) \\ \varepsilon_l^+(t) &= \sqrt{\frac{\pi}{\sum_{k=1}^l \alpha_k}} \left(\sum_{j=2}^l \frac{\alpha_j \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_k}{\left(\sum_{k=1}^j \alpha_k\right)^2} |w_{j-1} - c_j|^2 + \frac{\rho^2}{2} \right) t^{-1/2} + O(t^{-1}) \end{aligned}$$

$(t \rightarrow \infty)$

である.

複素解析を用いることにより, 問題は Schwarz 函数を構成する問題に帰着される. ここで, S が曲線 Γ の Schwarz 函数であるとは, S は Γ のある近傍上で正則で,

$$S(z) = \bar{z} \quad (z \in \Gamma)$$

をみたすことをいう. ただし, \bar{z} は z の複素共役を表す. しかし, 一般に Schwarz 函数を構成することは難しいため, まず注入点が 2 個の場合に対し Schwarz 函数を構成することにより Hele-Shaw 流の漸近挙動を解析し, それを用いて数学的帰納法により一般の場合を示す.

REFERENCES

- [1] M. Sakai, *Quadrature Domains*, Lecture Notes in Mathematics, 934, Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [2] M. Sakai, Sharp estimates of the distance from a fixed point to the frontier of a Hele-Shaw flow, *Potential Analysis* **8** (1998), 277–302.
- [3] H. S. Shapiro, *The Schwarz function and its generalization to higher dimensions*, University of Arkansas Lecture Notes in the Mathematical Sciences, 9, Wiley-Interscience, New York, 1992.

粘菌運動を記述する自由境界問題の 解の存在について

東北大学博士後期課程1年
物部 治徳

本講演では、次の自由境界問題を考える:

$$(P) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + k_1(C_0 - \int_{\Omega(t)} dx) - k_2 u & \text{in } Q_T, \\ u = 1 + A\kappa + BV & \text{on } \Gamma_T, \\ V = -\nabla u \cdot n + l_1(C_0 - \int_{\Omega(t)} dx) & \text{on } \Gamma_T, \\ u = \phi & \text{in } \Omega(0). \end{cases}$$

ここで,

$\Omega(t)$: 時刻 t の \mathbb{R}^2 の領域 ($t \geq 0$), $\partial\Omega(t)$: $\Omega(t)$ の境界,

$Q_T := \bigcup_{0 < t < T} \Omega(t) \times \{t\}$, $\Gamma_T := \bigcup_{0 < t < T} \partial\Omega(t) \times \{t\}$, $\kappa = \kappa(x, t)$: $\partial\Omega(t)$ の曲率,

$V = V(x, t)$: $\partial\Omega(t)$ の法線速度, $n = n(x, t)$: $\partial\Omega(t)$ の外向き単位法線ベクトル,

k_1, k_2, A, B, l_1 : 正定数

とする.

[目的] 方程式 (P) を満たすような、古典的な意味での解 $u(x, t)$ と $\partial\Omega(t)$ の存在を示す.

上の方程式 (P) は、細胞性粘菌の運動を記述した数理モデルである. 神戸大学の梅田民樹氏によると粘菌の運動は、アクチンという筋肉繊維が支配的であると考へ、物理的な考察とシミュレーションなどからある数理モデルを提唱した. 今回、梅田氏との共同研究により本質を失わないようそのモデルを簡略化したものが方程式 (P) である.

細胞性粘菌の代表例としてキイロタマホコリカビが考へられる. キイロタマホコリカビは環境に応じて個体や集合体になることが知られている. 方程式 (P) は集合体の時期の運動を記述しており、白血球の運動に類似していることから別な観点からの生物学的な研究も進められている. しかし、数学的な解析はほとんどされていないように思える. そこで、我々はその解析を行うための一歩目として (P) の研究を行い、現段階で次の結果を得ることが出来た.

定理 1. $\partial\Omega(0) \in C^{3+\alpha}$ の単純閉曲線, $\phi \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega(0)})$ かつ, ϕ は次の両立条件を満たす:

$$\begin{aligned}\phi &= 1 + A\kappa + BV \quad \text{on } \partial\Omega(0), \\ V &= -\nabla\phi \cdot n + |\Omega(0)| \quad \text{on } \partial\Omega(0).\end{aligned}$$

このとき, ある定数 $T_* > 0$ が存在し, (P) を満たす解

$$u \in C^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\overline{Q_{T_*}}), \quad \Gamma_{T_*} \in C^{3+\alpha, (3+\alpha)/2}$$

が一意に存在する.

証明は [1] と [4] の方法にならって, 方程式 (P) の境界条件 $u = 1 + A\kappa + BV$ を (P_*) としたとき, (P) に対する未知関数 u の近似関数列と (P_*) によって導かれる自由境界 Γ_T の近似集合列を構成し, その極限が (P) の解であることを示す. 具体的には以下に述べる帰納法による. u としてある関数 u_1 をとる. このとき (P_*) である $u_1 = 1 + A\kappa + BV$ を考える. この条件は, ある準線形放物型方程式とみなすことができ, その解によって境界を決定することができる. それを $\partial\Omega_1(t)$ とおく. この $\partial\Omega_1(t)$ を境界条件として考え, 方程式を解く. その解を u_2 とおく. この u_2 を u_1 の代わりとして同様の議論を繰り返す. このようにして得られた集合と関数の列の組の極限が (P) の解であることを不動点定理を使って示す. 証明の中で鍵となる考えは Q_T 領域を cylinder 領域である $\bigcup_{0 < t < T} \Omega(0) \times (0, T)$ に変換する写像を Hanzawa 微分同相写像 [2] の作り方を参考にして具体的に作る.

今後の展望としては, 簡略化したモデルで解の存在を示すことが出来たので, 走化性や, 内部のアクチンの保存性を考慮したモデルも解くことが出来ると予想している. 具体的には, 方程式 (P) に対して

$$\int_{\Omega(t)} dx \rightarrow \int_{\Omega(t)} u dx, \quad l_1 \rightarrow g(x, t) \in C^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\mathbb{R}^2)$$

と置き換えた問題の解の存在を示すことを, 当面の目標と考えている.

参考文献

- [1] X.Chen and F.Reitch, Local existence and uniqueness of the Stefan problem with surface tension and kinetic undercooling, *J. Math. Anal. and Appl.* **164** (1992), 350–362.
- [2] E.Hanzawa, Classical solution of stefan problem, *Tohoku Math. J.* (2) **33** (1981), 297-335.
- [3] O.A.Ladyzenskaya V.A.Solonnikov and N.N.Uralceva, Linear and quasilinear equation of parabolic type, vol.**23**, *Amer. Math. Soc, Providence, R. I*, 1968.
- [4] W.Merz and P.Rybka, A free boundary problem describing reaction-diffusion problem in chemical vapor infiltration of pyrolytic carbon, *J.Math.Anal.Appl* **292** (2004), 571-588.

非線形熱方程式と Navier-Stokes 方程式に対する Modulation 空間を用いた解の存在定理について

岩淵 司 (東北大学大学院理学研究科数学専攻 D1)

本講演では次の非線形熱方程式と Navier-Stokes 方程式の初期値問題を Modulation 空間を用いて考察する. n を自然数, λ を実数, p を 1 より大きい自然数とする.

$$(H) \quad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u = \lambda u^p & \text{for } t \in (0, \infty), \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{for } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

$$(NS) \quad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla \pi = 0 & \text{for } t \in (0, \infty), \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{for } t \in (0, \infty), \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{for } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

定義 (Modulation 空間). \mathcal{F} は Fourier 変換, \mathcal{F}^{-1} は Fourier 逆変換を表すとする. $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ を次を満たす 1 の分解とする. $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ を

$$\operatorname{supp} \varphi \subset \{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid |\xi| \leq \sqrt{n} \}, \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\xi - k) = 1 \quad \text{for any } \xi \in \mathbb{R}^n$$

を満たす関数とし, $\varphi_k(\xi) := \varphi(\xi - k)$ とおく. $0 < q, \sigma \leq \infty$ に対して, Modulation 空間 $M_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ を次で定義する.

$$M_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \|f\|_{M_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\},$$

$$\|f\|_{M_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n)} := \begin{cases} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\mathcal{F}^{-1} \varphi_k \mathcal{F} f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} & \text{for } 0 < \sigma < \infty, \\ \sup_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\mathcal{F}^{-1} \varphi_k \mathcal{F} f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} & \text{for } \sigma = \infty. \end{cases}$$

非線形偏微分方程式の解の存在定理の研究は, Lebesgue 空間と Sobolev 空間においては数多く行われている. 本講演では Modulation 空間を用いて初期値問題を考察し, 関数空間と偏微分方程式との関係を考察する. Modulation 空間は, Feichtinger [1] によって導入され, 近年偏微分方程式への応用が発達してきている. Modulation 空間における偏微分方程式の研究として Wang, Zhao, Guo [3] があり, 彼等は非線形 Schrödinger 方程式と Navier-Stokes 方程式について初期値 u_0 を $M_{2,1}(\mathbb{R}^n)$ からとり時間局所解の存在を示した. また, Wang, Hudzik [2] では非線形 Schrödinger 方程式と非線形 Klein-Gordon 方程式の時間大域解の存在を示した.

以下の定理では, [3] の Navier-Stokes 方程式に対する時間局所解の結果を拡張し, また, 時間大域解の存在を示した. 加えて非線形熱方程式にも応用し, 時間局所解と時間大域解について考察した.

定理 (非線形熱方程式). $1 \leq q \leq \infty$, $1 \leq \sigma < \infty$ とし, p は $1 < p \leq 1 + 2\sigma/n(\sigma - 1)$ を満たす自然数とする (ただし, $\sigma = 1$ の時は p は任意の自然数). この時, 任意の $u_0 \in M_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ に対して $T > 0$ が存在して (H) の一意時間局所解 $u \in X_T$ が存在する. ただし,

$$X_T := \{ u \in C([0, T], M_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n)) \mid \|u\|_X < \infty \},$$

$$\|u\|_X := \begin{cases} \sup_{t \in (0, T)} \|u(t)\|_{M_{q, \sigma}(\mathbb{R}^n)} + \sup_{t \in (0, T)} t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\sigma})} \|u(t)\|_{M_{q, \nu}(\mathbb{R}^n)} \\ \quad \text{if } \frac{\sigma}{\sigma - 1} < p \leq 1 + \frac{2\sigma}{n(\sigma - 1)} \text{ and } 1 < \sigma < \infty, \\ \sup_{t \in (0, T)} \|u(t)\|_{M_{q, \sigma}(\mathbb{R}^n)} \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

であり, ν は次を満たす任意の実数である.

$$\frac{p-1}{p} < \frac{1}{\nu} < \frac{p-1}{p} + \frac{1}{p\sigma}.$$

注意. (1) 定理の σ に依存する p の上限値は次の考察により, 臨界の指数と考えられる.

$$\begin{cases} H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^r(\mathbb{R}^n) & \text{if } s = n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right), \quad 2 < r < \infty, \\ M_{2, \sigma}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^r(\mathbb{R}^n) & \text{if } \sigma = \frac{r}{r-1}, \quad 2 < r < \infty \end{cases}$$

という連続的な埋め込みが成立し, 二つの等式から r を消去すると, 関係式 $1 + 4/(n - 2s) = 1 + 2\sigma/n(\sigma - 1)$ が得られ, 右辺は定理の p の上限値であり, 左辺は $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$ の場合の可解性の為の尺度不変性の議論から求まる p の臨界値である.

(2) q を p に依存せず自由にとることが出来, これは Lebesgue 空間 $L^q(\mathbb{R}^n)$ における初期値問題の結果とは異なる点である. これより初期値 u_0 が, 空間遠方では $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ に属し, 局所的には $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ には属さない関数の場合にも解の存在を示すことが出来る.

(3) 定理の仮定に加えて, $1 + 2/n < 1 + 2q/n \leq p$ とすると, 十分小さい $u_0 \in M_{q, \sigma}(\mathbb{R}^n)$ に対して時間大域解を得ることが出来る.

(4) 一般に非線形項の冪 p は自然数でなければ扱えないが, 低次元においては実数の p も扱うことが出来, 具体的には $n = 1, 2, u_0 \in M_{2, \infty}(\mathbb{R}^n), 1 < p < 1 + 2/n$ とし, 時間局所解の存在を示すことが出来る. ここで, デルタ関数は $M_{2, \infty}(\mathbb{R}^n)$ に属することに注意する.

定理 (Navier-Stokes 方程式). $n \geq 2, 1 < q < \infty, 1 \leq \sigma \leq n/(n - 1)$ とする. このとき $\operatorname{div} u_0 = 0$ を満たす任意の $u_0 \in [M_{q, \sigma}(\mathbb{R}^n)]^n$ に対して $T > 0$ が存在して (NS) の一意時間局所解 $u \in X_T$ が存在する. ただし,

$$X_T := \{ u \in [C([0, T], M_{q, \sigma}(\mathbb{R}^n))]^n \mid \|u\|_X < \infty, \operatorname{div} u = 0 \},$$

$$\|u\|_X := \begin{cases} \sup_{t \in (0, T)} \|u(t)\|_{M_{q, \sigma}(\mathbb{R}^n)} + \sup_{t \in (0, T)} t^{\frac{1}{2}} \|\nabla u(t)\|_{M_{q, \sigma}(\mathbb{R}^n)} & \text{if } \sigma < \frac{n}{n-1}, \\ \sup_{t \in (0, T)} \|u(t)\|_{M_{q, \sigma}(\mathbb{R}^n)} + \sup_{t \in (0, T)} t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\sigma})} \|u(t)\|_{M_{q, \nu}(\mathbb{R}^n)} \\ \quad + \sup_{t \in (0, T)} t^{\frac{1}{2} + \frac{n}{2}(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\sigma})} \|\nabla u(t)\|_{M_{q, \nu}(\mathbb{R}^n)} & \text{if } \sigma = \frac{n}{n-1} \end{cases}$$

であり, ν は次を満たす任意の実数である.

$$\frac{1}{\sigma} < \frac{1}{\nu} < \frac{1}{\sigma} + \frac{\sigma - 1}{2\sigma}.$$

注意. 定理の仮定に加えて, $1 < q \leq n$ とすると, 十分小さい $u_0 \in M_{q, \sigma}(\mathbb{R}^n)$ に対して時間大域解を得ることが出来る.

REFERENCES

- [1] H. G. Feichtinger, Technical Report, University of Vienna, 1983.
- [2] B. Wang, H. Hudzik, J. Differential Equations, **232** (2007), 36-73.
- [3] B. Wang, L. Zhao, B. Guo, J. Funct. Anal., **233** (2006), 1-39.

LORENTZ 空間, LORENTZ-ZYGMUND 空間における BREZIS-MERLE 型不等式

猪奥 倫左 (東北大学理学研究科 D1)

本講演では, 外力項 f を持つ N -Laplace 方程式の解の正則性が外力項 f の可積分性に依存してどのように変化するかについて考察する. ここで正則性とは, 解 u に対する可微分性を指すのが通常であるが, より一般化して解の可積分性の度合いや解の有界性も含めた意味で正則性を考える. $N \geq 2$ を空間次元とし, 有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 上で, 次の N -Laplace 方程式の非斉次境界値問題を考える.

$$(N) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{N-2} \nabla u) = f, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

$N = 2$ の場合, 問題 (N) は 2 次元 Poisson 方程式と一致する.

外力を Lebesgue 空間 $L^p(\Omega)$ ($1 < p$) から取ったとき, 方程式 (N) の解 u は有界となることが知られている. また, 外力を $L^1(\Omega)$ から取ったとき, 方程式 (N) の解 u は一般に有界にならない. 解 u が一般に満たす正則性について, $N = 2$ のとき Brezis-Merle [2] によって, $N \geq 3$ のとき Aguilar-Peral [1] によって, それぞれ次の指数関数型可積分性が満たされることが示された.

命題 1 (Brezis-Merle の不等式 [2, 1]). $N \geq 2$ として, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を有界領域とする. u を外力 $f \in L^1(\Omega)$ に対する方程式 (N) の解とする. このとき, 任意の $0 < \alpha < N\omega_N^{1/(N-1)}$ に対してある $C = C(\alpha, N, \Omega) > 0$ が存在して

$$\int_{\Omega} \exp\left(\frac{\alpha|u(x)|}{\|f\|_{L^1}^{1/(N-1)}}\right) dx \leq C$$

が成り立つ. ここで ω_N は N 次元単位球面の表面積である.

以上のことから, 解が有界となるための外力の条件は, Lebesgue 空間の範疇では $L^1(\Omega)$ が境目であることがわかる. 外力の条件を細分化するために, 外力を取る関数空間として Lorentz-Zygmund 空間を用いる.

定義 2 (Lorentz-Zygmund 空間). Lorentz-Zygmund 空間 $L \log^q L(\Omega)$ を次で定める.

$$L \log^q L(\Omega) := \left\{ f \in L^1(\Omega); \int_{\Omega} |f(x)| \left(\log(e + |f(x)|) \right)^q dx < \infty \right\}.$$

Ω が有界領域であることに注意すると, 定義から次の包含関係を満たす.

$$L^p(\Omega) \subset L \log^q L(\Omega) \subset L \log^r L(\Omega) \subset L^1(\Omega) \quad (q > r > 0, p > 1).$$

また, Lorentz-Zygmund 空間は適当な norm を導入することにより Banach 空間となる.

空間次元を $N = 2$ とする. このとき, 外力を Lorentz-Zygmund 空間 $L \log^1 L(\Omega)$ から選ぶとき, 解は有界となることが知られている. 一方, 空間次元を $N \geq 3$ とすると, 外力を $L \log^{N-1} L(\Omega)$ から選ぶとき, 解は一般に有界とは限らないことが Boccardo-Peral-Vazquez [3] によって示された. Boccardo らは同じ論文の中で, 外力の可積分性について狭くした空間 $L \log^{N-1+\varepsilon} L(\Omega)$ ($\varepsilon > 0$) から選ぶと解は

一般に有界となることも示している。これらのことは、 N -Laplace 方程式の解の正則性は外力の可積分条件を Lorentz-Zygmund 空間まで細分化して考えたとき、 $N = 2$ の場合と $N \geq 3$ の場合でずれが生じることを示している。

定理 3. $N \geq 2, 0 \leq q < N - 1$ とし、 u を $f \in L \log^q L(\Omega)$ に対する方程式 (N) の解とする。このとき任意の $0 \leq \alpha < \beta$ に対して、ある $C = C(\alpha, q, N, \Omega) > 0$ が存在して

$$\int_{\Omega} \exp \left(\left(\frac{\alpha |u(x)|}{\|f\|_{L \log^q L}^{\frac{1}{N-1}}} \right)^{\frac{N-1}{N-1-q}} \right) dx \leq C$$

が成り立つ。ただし、 ω_N は N 次元単位球面の表面積で、

$$\beta := \begin{cases} N\omega_N^{\frac{1}{N-1}}, & 0 < q \leq 1, \\ \left(q \left(1 - \frac{q-1}{N-2} \right)^{N-2} \right)^{\frac{1}{N-1}} N\omega_N^{\frac{1}{N-1}}, & 1 < q < N-1. \end{cases}$$

注意 3.1. この結果は、外力を $L \log^{N-1} L(\Omega), L^1(\Omega)$ から取ったときの解の正則性を補間した形になっており、解の正則性の細分化となっている。また、定理 3 と類似の Brezis-Merle 型不等式が、外力を Lorentz 空間から選んだ場合にも示すことが出来る。

外力を選ぶ空間を $L \log^{N-1} L(\Omega)$ と $L \log^{N-1+\varepsilon} L(\Omega)$ ($\varepsilon > 0$) の補間空間から選ぶために、Lorentz-Zygmund 空間の更なる細分化 $L \log^{N-1} L \log \log^q L(\Omega)$ を定義する。

$$L \log^{N-1} L(\Omega) \subset L \log^{N-1} L \log \log^q L(\Omega) \subset L \log^{N-1+\varepsilon} L(\Omega) \quad (\varepsilon > 0, q > 0)$$

に注意する。

定理 4. $N \geq 3, q > 0$ とし外力を $f \in L \log^{N-1} L \log \log^q L(\Omega)$ とする。このとき方程式 (N) の弱解 u が存在して次が成り立つ。

- (1) $0 < q < N - 2$ とする。このとき、ある $\beta > 0$ が存在して任意の $0 < \alpha < \beta$ に対して

$$\int_{\Omega} \exp \left(\exp \left(\left(\frac{\alpha |u(x)|}{\|f\|_{L(\log L)^{N-1}(\log \log L)^q}} \right)^{\frac{N-1}{N-2-q}} \right) \right) dx < \infty$$

が成り立つ。

- (2) $q > N - 2$ とする。このとき $u \in L^\infty(\Omega)$ が成り立つ。

注意 4.1. 外力 f の可積分性を更に細分化して $f \in L \log^{N-1} L \log \log^{N-2} L \log \log \log \dots$ のときの解の正則性を求めることも可能である。

定理 3, 4 の証明には、Talenti [4] の球対称化の手法を用いる。解を外力 f の球対称化関数を用いて評価し、外力の可積分条件に吸収させることができない特異性の度合いをはかることにより証明する。

REFERENCES

- [1] Aguilar, J. A., Peral, I., *An a priori estimate for the N -laplacian*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I **319**, No. 3 (1994), 161–166.
 - [2] Brezis, H., Merle, F., *Uniform estimates and blow-up behavior for solutions of $-\Delta u = V(x)e^u$ in two dimensions*, Comm. Partial Differential Equations, **16** (1991), 1223–1253.
 - [3] Boccardo, L., Peral, I., Vazquez, J., *The N -laplacian elliptic equation: variational versus entropy solution*, J. Math. Anal. Appl., **201** (1996), 671–688.
 - [4] Talenti, G., *Nonlinear elliptic equations, rearrangements of functions and Orlicz spaces*, Annali Mat. Pura Appl., **120** (1979), 159–184.
- E-mail address:* sa6m02@math.tohoku.ac.jp

Maximum principle for L^p -viscosity solutions of fully nonlinear equations

中川 和重

埼玉大学大学院理工学研究科 D3

1 はじめに

本講演では L^p 粘性解の最大値原理について述べる。

完全非線形 2 階一様楕円型方程式における粘性解の regularity 理論に関しては Caffarelli [C] による結果がある。その後、 L^p 粘性解の概念が Caffarelli-Crandall-Kocan-Świąch[CCKS] によって導入されその理論が整備された。 L^p 粘性解の理論は係数に連続性がない場合にも適用できるので強解の理論の一般化であると考えられ、係数が L^p 関数の場合でも強解のときに得られた結果が得られることが期待される。

L^p 粘性解の regularity 理論の第一歩といえる最大値原理に関しては Koike-Świąch により 1 階微分の項が一次の増大度または一次以上の増大度を持つときに最大値原理が成立することを示した [KS2]。また、非斉次項が次元より低い冪乗可積分の場合の場合についても示している [KS2] (但し、1 階微分の項が一次以上の場合には条件付で成立する)。本講演では、1 階微分の項に一次および一次以上の増大度を持つ場合についての最大値原理について考える。

2 結果

次の方程式を考える。

$$\mathcal{P}^-(D^2u) - \mu_1(x)|Du| - \mu_m(x)|Du|^m = f(x) \quad \text{in } \Omega. \quad (1)$$

$\Omega \subset B_1 \subset \mathbb{R}^n$, $m > 1$, $p > n/2$, $q \geq p$ とし、特に断りのない限り $f \in L^p_+(\Omega)$, $\mu_1, \mu_m \in L^q_+(\Omega)$ とする。ここで、 $L^p_+(\Omega)$ は非負な $L^p(\Omega)$ の全体とし、さらに S^n を $n \times n$ 実対称行列全体、固定された一様楕円定数 $0 < \lambda \leq \Lambda$ に対し、 $S^n_{\lambda, \Lambda} = \{A \in S^n \mid \lambda I \leq A \leq \Lambda I\}$ とおくととき Pucci 作用素 $\mathcal{P}^\pm : S^n \rightarrow \mathbb{R}$ を次で定義する。

$$\mathcal{P}^+(X) = \max\{-\text{trace}(AX) \mid A \in S^n_{\lambda, \Lambda}\},$$

$$\mathcal{P}^-(X) = \min\{-\text{trace}(AX) \mid A \in S^n_{\lambda, \Lambda}\}.$$

このとき次の結果が成立する .

《定理 1》(ABP 最大値原理)[N]

$q = p > n$ とする . このとき ,

$$\hat{D}^m \|f\|_p^{m-1} \|\mu_m\|_p < \delta$$

を満たす $\delta > 0$, $\hat{C} > 0$ と $C > 0$ があって u が (1) の L^p 粘性劣解ならば

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u + C\hat{D} \left(\|f\|_n + \hat{D}^m \|f\|_p^m \|\mu_m\|_n \right)$$

が成立する . ここで $\hat{D} = \exp(\hat{C} \|\mu_1\|_n^n)$ である .

また , p が次元より低い場合にも成立することがわかる . $p_0 = p_0(n, \lambda, \Lambda) \in [n/2, 2)$ を Escauriaza 定数とする .

《定理 2》(ABP 最大値原理)[N]

$p_0 < p \leq n < q$ とする . このとき , $N \geq 1$, $\delta > 0$, $C > 0$ があって次を満たすと
する .

$$p > \frac{nq(m-1)}{mq-n}, \quad \hat{D}^m \hat{E}_N^m \|f\|_p^{m^N(m-1)} \|\mu_m\|_q^{m^N} < \delta$$

このとき , u が (1) の L^p 粘性劣解ならば定理 1 と同様に ABP 型の最大値原理が成立する .

さらに , この最大値原理は放物型方程式

$$u_t + \mathcal{P}^-(D^2u) - \mu_1(x, t)|Du| - \mu_m(x, t)|Du|^m = f(x, t) \quad \text{in } Q \quad (2)$$

においても楕円型の場合と同様の結果を得ることができる . ここで $Q := \Omega \times (0, 1]$.

参考文献 :

[C] Caffarelli, L. A., Interior a priori estimates for solutions of fully non-linear equations, *Ann. Math.* **130** (1989), 189–213.

[CCKS] Caffarelli, L. A., M. G. Crandall, M. Kocan, and A. Świąch, On viscosity solutions of fully nonlinear equations with measurable ingredients, *Comm. Pure Appl. Math.* **49** (1996), 365–397.

[KS1] Koike, S., and A. Świąch, Maximum principle and existence of L^p -viscosity solutions for fully nonlinear uniformly elliptic equations with measurable and quadratic terms, *Nonlinear Differential Equations Appl.*, **11** (4) (2004) 491-509.

[KS2] Koike, S., and A. Świąch, Maximum principle for fully nonlinear equations via the iterated comparison function method, *Math. Ann.*, **339** (2007), 461-484.

[KS3] Koike, S., and A. Świąch, Weak Harnack inequality for L^p -viscosity solutions of fully nonlinear uniformly elliptic partial differential equations with unbounded ingredients, preprint.

[N] Nakagawa, K., Maximum principle for L^p -viscosity solutions of fully nonlinear equations with unbounded ingredients and superlinear growth terms, preprint.

EXACT DIFFERENTIAL AS THE DECISIVE CRITERIA OF EQUILIBLIUM/MOTION AND IRROTATION/ROTATION

増田 茂 (首都大学東京 大学院理学研究科 博士後期課程 数学専攻 D4)

ABSTRACT. In the fluid mechanics, it is an important concept to analyze it, for example in three variables, for $udx + vdy + wdz$ to be satisfied with an *exact differentiability* or a *complete differentiability*. By D'Alembert, Euler, Lagrange, Laplace, Cauchy, Poisson and Stokes succeeded the exact differential as the decisive criteria of equilibrium/motion. From the geometrical point of view, Gauss and Riemann applied it. Moreover Helmholtz and W.Thomson applied it to the theory of vorticity, in which treated the exact differential as the decisive criteria of irrotation/rotation. To Helmholtz's vorticity equation, Bertrand criticized but Saint-Venant sided with him. Two constants theory was deduced in equilibrium/motion of the isotropic elasticity by Poisson, Navier, Cauchy, Saint-Venant and Stokes. In motional equations, these became the origin of Navier-Stokes equations.

1. From the observation of exact differential to vortex

There are theories of equilibrium, applications and discussions about an exact differentiability of $udx + vdy + wdz$ for the fluid mechanics. We see such a history, in which the topics are : condition of equilibrium of fluid / proof of the eternal continuity in time and space of an exact differential / curvature / electro magnetic / geometry / vorticity / discussion on Helmholtz's papers / other applications.

1.1. Exact differential as the decisive criteria of equilibrium/motion.

1.1.1. Navier's equation of fluid equilibrium.

Navier deduces the expressions of forces of the molecular action which is under the state of motion as follows : ¹
We consider the two molecules M and M' . x, y, z are the values of the rectangular coordinates of M and $x + \alpha, y + \beta, z + \gamma$ are the values of the rectangular coordinates of M' . The length of a rayon emitting from M : $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$, where $\alpha = \rho \cos \psi \cos \varphi$, $\beta = \rho \cos \psi \sin \varphi$, $\gamma = \rho \sin \psi$. The velocity of the molecule M are u, v, w and that of the molecules M' . Navier deduces the moment in equilibrium as follows :

$$8 \int_0^\infty d\rho \rho^3 f(\rho) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(\frac{d\delta x}{dx} \cos^3 \psi \cos^2 \varphi + \frac{d\delta y}{dy} \cos^3 \psi \sin^2 \varphi + \frac{d\delta z}{dz} \sin^2 \psi \cos \psi \right).$$

It turns into :

$$8 \frac{2}{3} \frac{\pi}{4} \int_0^\infty d\rho \rho^3 f(\rho) \left(\frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz} \right), \Rightarrow \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty d\rho \rho^3 f(\rho) \equiv p. \dots \text{Remark : } p \text{ is the one of two constants. cf. §1.3.}$$

By the partial integration we get

$$0 = \iiint dx dy dz \left[\left(P - \frac{dp}{dx} \right) \delta x + \left(Q - \frac{dp}{dy} \right) \delta y + \left(R - \frac{dp}{dz} \right) \delta z \right] - \iint dy dz (p' \delta x' - p'' \delta x'') - \iint dx dz (p' \delta y' - p'' \delta y'') - \iint dx dy (p' \delta z' - p'' \delta z''). \quad (1)$$

Navier reduces the indeterminate equations (1) for fluid equilibrium into two cases.

- Exact differential for the conditions of the equilibrium of the arbitrary, interior point of the fluid, $\frac{dp}{dx} = P$, $\frac{dp}{dy} = Q$, $\frac{dp}{dz} = R$, $dp = Pdx + Qdy + Rdz$, $p = \int (Pdx + Qdy + Rdz) + const.$
- The boundary condition to surface,
 $0 = \int (Pdx + Qdy + Rdz) + const.$ We get the differential equation : $0 = Pdx + Qdy + Rdz.$

In the same molecular way, Navier deduced the motional equations which became the origin of the Navier-Stokes equations.

1.1.2. Stokes' vorticity equation for the proof of the eternal existence of exact differential.

Stokes deduces his vorticity equation for the proof of the eternity of *exact differential*.

$$(28S) \quad \begin{cases} \frac{D\omega'}{Dt} = -\left(\frac{dv}{dw} + \frac{dy}{dz}\right)\omega' + \frac{du}{dx}\omega'' + \frac{dv}{dx}\omega''', \\ \frac{D\omega''}{Dt} = \frac{du}{dy}\omega' - \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dz}\right)\omega'' + \frac{dv}{dy}\omega''', \\ \frac{D\omega'''}{Dt} = \frac{du}{dz}\omega' + \frac{dv}{dz}\omega'' - \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right)\omega'''. \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{D\omega'}{Dt} \\ \frac{D\omega''}{Dt} \\ \frac{D\omega'''}{Dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) & 0 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) & 0 \\ 0 & 0 & -\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega' \\ \omega'' \\ \omega''' \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{DW}{Dt} = -W \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad \text{where, } W = \begin{bmatrix} \omega' \\ \omega'' \\ \omega''' \end{bmatrix}, \quad \omega' = \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz} \right), \quad \omega'' = \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx} \right), \quad \omega''' = \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} \right). \quad (2)$$

1.2. Exact differential as the decisive criteria of irrotation/rotation.

Date: 2008/08/17.

¹Navier ([3, pp.399-405])

1.2.1. Helmholtz's definition of irrotation.

Helmholtz uses Euler's equations (1_H), because it is called that he had not known until then about Navier's equations.

$$(1_H) \quad \begin{cases} X - \frac{1}{h} \frac{dp}{dx} = \frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz}, \\ Y - \frac{1}{h} \frac{dp}{dy} = \frac{dv}{dt} + u \frac{dv}{dx} + v \frac{dv}{dy} + w \frac{dv}{dz}, \\ Z - \frac{1}{h} \frac{dp}{dz} = \frac{dw}{dt} + u \frac{dw}{dx} + v \frac{dw}{dy} + w \frac{dw}{dz}, \\ \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F - \frac{1}{h} \nabla p = \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \text{where } F \equiv (X, Y, Z), \quad \mathbf{u} \equiv (u, v, w). \end{cases} \quad (3)$$

We consider not only the forces X, Y and Z of the potential $V : (1a_H) \quad X = \frac{dV}{dx}, \quad Y = \frac{dV}{dy}, \quad Z = \frac{dV}{dz}$, but also moreover, *Geschwindigkitespotential* φ (velocity potential), so that : (1b_H) $u = \frac{d\varphi}{dx}, \quad v = \frac{d\varphi}{dy}, \quad w = \frac{d\varphi}{dz}$, From the conservative law of (3) (= 1_H) we get also as follows : $\Delta\varphi = 0$, Helmholtz does not mention explicitly about *vollständigen Differentialien* (exact differential or complete differential), however from (1b_H) we get as follows : (1c_H) $\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx} = 0, \quad \frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy} = 0, \quad \frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz} = 0, \Rightarrow \nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$. To study these three conditions (1c_H), Helmholtz, considering an infinitely small volume of water in a time period dt , makes investigation comprehensively into the variation from the three various motions : $u \equiv A, v \equiv B, w \equiv C, \quad \frac{du}{dx} \equiv a, \frac{dv}{dy} \equiv b, \frac{dw}{dz} \equiv c, \frac{dw}{dy} = \frac{dv}{dz} \equiv \alpha, \frac{du}{dz} = \frac{dw}{dx} \equiv \beta, \frac{dv}{dx} = \frac{du}{dy} \equiv \gamma$. (\dots these are the exact differential condition.)

1.2.2. Helmholtz's deduction of rotation in vorticity equations. - Helmholtz's decomposition.

Next, Helmholtz assumes the conditions of a rotatory motion. We get the components of velocity which are brought about, on a parallel with the coordinate axis x, y and z are as follows : Then we get the response tensor compounding the translation tensor and the rotational tensor. By differentiating u, v and w with respect to x, y and z respectively and then it turns out the following vorticity equations :

$$\begin{bmatrix} a & (\gamma + \zeta) & (\beta - \eta) \\ (\gamma - \zeta) & -b & (\alpha + \xi) \\ (\beta + \eta) & (\alpha - \xi) & c \end{bmatrix} \Rightarrow (2_H) \quad \begin{cases} \frac{dw}{dz} - \frac{dv}{dy} = 2\xi, \\ \frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz} = 2\eta, \\ \frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx} = 2\zeta. \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \equiv \mathbf{W}$$

Helmholtz uses Euler equations, which are for incompressible fluid, without viscous term. Moreover, he deletes pressure term by assuming the constant value in barotropic condition. From (3=(1_H)) by $\mathbf{W} \equiv \text{curl } \mathbf{u}$, we can deduce the vorticity equation by Helmholtz :

$$\frac{D\mathbf{W}}{Dt} = (\mathbf{W} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \mathbf{W}(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{W} \cdot \text{grad } \mathbf{u} - \mathbf{W} \text{ div } \mathbf{u}, \quad \text{where } \mathbf{W} \equiv \text{curl } \mathbf{u}. \quad (4)$$

Helmholtz's (4) is correspondent to Stokes' (2), but the meaning of \mathbf{W} of Helmholtz and W of (2) are different each other. When, in a molecule of water, ξ, η and ζ are equal to zero each other at the same time, then $\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0$.

Diejenigen Wassertheilchen also, welche nicht schon Rotationsbewegungen haben, bekommen auch im Verlaufe der Zeit keine Rotationsbewegungen. [1, p.34] (Vortex is not only generated but also not disappear.)

1.2.3. Disputes on Helmholtz's paper.

Bertrand and Saint-Venant discuss about Helmholtz's theorem. Bertrand always criticizes Helmholtz's. As the *decisive* example of the motion along the only z -axis Bertrand says : $\xi = 0, \eta = 0$ and $\zeta = \frac{1}{2}$ is not a decisive example ? Helmholtz responds to Bertrand the decisive criterion of exact differential or not, which were none in his original paper in 1858, as follows :

Si l'expression $(udx + vdy + wdz)$ est une différentielle exacte, il n'y a pas de rotation dans la partie du fluid correspondant. Si cette expression n'est pas une différentielle exacte, il y a rotation. [2, p.136]

1.3. Formulation of the two constants theory in isotropic elasticity and Navier-Stokes equations.

The partial differential equations of the elastic solid or elastic fluid are expressed by using one or the pair of C_1 and C_2 such that : in the elastic solid : $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - (C_1 T_1 + C_2 T_2) = \mathbf{f}$. In the elastic fluid : $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - (C_1 T_1 + C_2 T_2) + \dots = \mathbf{f}$, where T_1, T_2, \dots are the tensors or terms consisting our equations. For example, in modern notation of the incompressible Navier-Stokes equations, the kinetic equation and the equation of continuity are conventionally described as follows : $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0$, in which $-\mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p$ corresponds to $-(C_1 T_1 + C_2 T_2)$. Moreover, C_1 and C_2 are described as follows :

$$\begin{cases} C_1 \equiv \mathcal{L}r_1 f_1 S_1, \\ C_2 \equiv \mathcal{L}r_2 f_2 S_2, \end{cases} \quad \begin{cases} S_1 = \iint f_3 \rightarrow C_3, \\ S_2 = \iint f_4 \rightarrow C_4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = C_3 \mathcal{L}r_1 f_1 = \frac{2\pi}{15} \mathcal{L}r_1 f_1, \\ C_2 = C_4 \mathcal{L}r_2 f_2 = \frac{2\pi}{3} \mathcal{L}r_2 f_2. \end{cases}$$

REFERENCES

- [1] H.v.Helmholtz, *Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen*, J. Reine Angew. Math., **55**(1858) 25-55.
- [2] H.v.Helmholtz, *Sur le mouvement le plus général d'un fluide. Réponse à une communication précédente de M.S.Bertrand*, Académie des Sciences, Comptes-rendus hebdomadaires des séances, **67**(1868), 221-225, also in Herman von Helmholtz, *Wissenschaftliches Abhandlungen*, **1**, 134-139. 1868. (We use bellow CR and WHA.)
- [3] C.L.M.H.Navier, *Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques*, Mémoires de l'Académie des Science de l'Institut de France, **7**(1827), 375-393. (Lu : 14/mai/1821.) \rightarrow <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k32227>, 375-393.
- [4] C.L.M.H.Navier, *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*, Mémoires de l'Académie des Science de l'Institut de France, **6**(1827), 389-440. (Lu : 18/mar/1822.) \rightarrow <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3221x>, 389-440.
- [5] S.D.Poisson, *Mémoire sur l'Équilibre et le Mouvement des Corps élastiques*, Mémoires de l'Académie royale des Sciences, **8**(1829), 357-570, 623-27. (Lu : 14/apr/1828.) \rightarrow <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3223j>
- [6] S.D.Poisson, *Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides*, (1829), J. école Polytech., **13**(1831), 1-174. (Lu : 12/oct/1829.)
- [7] A.B. de Saint-Venant, *Note à joindre au Mémoire sur la dynamique des fluides. (Extrait.)*, Académie des Sciences, *Comptes-rendus hebdomadaires des séances*, **17**(1843), 1240-1243. (Lu : 14/apr/1834.)
- [8] G.G.Stokes, *On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids, 1849*, (read 1845), (From the *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* Vol. VIII. p.287), Johnson Reprint Corporation, Newyork and London, 1966, 75-129.

粘性項の消えた非等温な Penrose-Fife 型の相転移モデルについて

熊崎耕太 (名古屋工業大学大学院工学研究科博士後期課程)

1. 導入 Penrose-Fife 型の相転移モデルの可解性について考える。参考文献 [7] では数学的な難しさを回避するため、粘性項を考慮した Penrose-Fife 型の相転移モデルについて考え、global solution まで得られた。しかしもとのモデルには粘性項が含まれていないため、今回はそれを落とすことを考えた。本講演では、以下の粘性項をおとした Penrose-Fife 型の相転移モデルについて考える。(cf. [8])

$$\begin{aligned} e_t - \Delta \tilde{\alpha} &= f, \quad e = u + \lambda(w), \quad \tilde{\alpha} \in \alpha(u) \quad \text{a.e. in } \Omega \times (0, T), \\ w_t &= \Delta \{-\kappa \Delta w + g(w) + \xi - \tilde{\alpha}'(w)\}, \quad \xi \in \beta(w) \quad \text{a.e. in } \Omega \times (0, T), \\ \nabla \{-\kappa \Delta w + g(w) + \xi - \tilde{\alpha}'(w)\} \cdot n &= 0 \quad \text{a.e. on } \Gamma \times (0, T), \\ w &\geq l_0, \quad \nabla w \cdot n \geq 0, \quad (w - l_0) \nabla w \cdot n = 0 \quad \text{a.e. on } \Gamma \times (0, T), \\ \tilde{\alpha} &= h \quad \text{a.e. on } \Gamma \times (0, T), \\ e(0) &= e_0, \quad w(0) = w_0 \quad \text{a.e. in } \Omega. \end{aligned}$$

ここで、 Ω は \mathbf{R}^N ($N = 1, 2, 3$) の有界領域であり、 Γ はその境界である。 α, β は \mathbf{R} の maximal monotone であり、 κ は正の定数である。また n は境界上の外向き法線ベクトルであり、 g は C^1 関数である。また f は $\Omega \times (0, T)$ 上で定義された与えられた関数であり、 ξ は抑制項である。 e_0, w_0 は初期条件である。物理現象としては主に二つの合金の分解現象を表したモデルであり、 e, u, w は内部エネルギー、温度、オーダーパラメータ (ここでは片方の合金の局所的濃度) をそれぞれ表している。 l_0 は正定数であり、二つの合金の混ざる比率を表している。

参考文献 [7] では、 h は $\Gamma \times (0, T)$ 上で定義された与えられた関数であり、 λ は C^2 関数と仮定していたが、粘性項を落とすため今回は $h(t) = h \in H^1(\Gamma)$ 、 $\lambda(w) = \lambda_0 w$ 、 $\lambda_0 \in \mathbf{R}$ とした。主定理を得るために以下の H^{-1} 上での適正下半連続凸関数を用いる。

2. 定理 ([6, Theorem 2.1]) there exists a proper, l.s.c, convex function $\psi : H^{-1}(\Omega) \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ such that the following holds.

For $z \in L^2(\Omega)$ and $z^* \in H^{-1}(\Omega)$, $z^* \in \partial\psi(z)$ if and only if there exists $\tilde{z} \in L^2(\Omega)$ such that $\tilde{z} \in \alpha(z)$ a.e. in Ω , $\tilde{z} - h \in H_0^1(\Omega)$ and $z^* = F(\tilde{z} - h)$.

ここで、 F は $H_0^1(\Omega)$ から $H^{-1}(\Omega)$ への共役写像である。上記の定理から generalized solution の概念を導入し以下の主定理を得た。主定理において以下の記号を用いている。 V_0^* は V_0 の共役空間であり、 $V_0 = H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ である。また $L_0^2(\Omega)$ は

$$L_0^2(\Omega) := \{z \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} z = 0\}.$$

で定義する。 F_0 は V_0 から V_0^* への共役写像であり、 π_0 は以下で定義される $L^2(\Omega)$ から $L_0^2(\Omega)$ への射影作用素である。

$$\pi_0[z] := z - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} z, \quad \forall z \in L^2(\Omega).$$

3. 主定理 (P) has a unique generalized solution (e, w) on $[0, T]$ satisfying properties:

(S1) $e \in W^{1,2}(0, T; H^{-1}(\Omega))$, $w \in W^{1,2}(0, T; V_0^*) \cap L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega))$.

(S2) For a.e. $t \in (0, T)$ the following equation holds:

$$e'(t) + u^*(t) = f(t) + \Delta h, \quad u^*(t) \in \partial\psi(u(t)),$$

where $u(t) := e(t) - \lambda_0 w(t)$.

(S3) There exists $\xi \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ such that $\xi \in \beta(w)$ a.e. in $\Omega \times (0, T)$ and

$$F_0^{-1}w'(t) + \pi_0[-\kappa\Delta w(t) + \xi(t)] + \pi_0[g(w(t)) - \lambda_0\tilde{\alpha}(t)] = 0 \quad \text{a.e. } t,$$

$$w \geq l_0, \quad \nabla w \cdot n \geq 0, \quad (w - l_0)\nabla w \cdot n = 0 \quad \text{a.e. on } \Gamma \times (0, T),$$

where $\tilde{\alpha}(t) := F^{-1}u^*(t) + h$.

(S4) $e(0) = e_0, w(0) = w_0$.

ここで (S2) については、もし $u(t) \in L^2(\Omega)$ であれば

$$\tilde{\alpha} \in \alpha(u) \quad \text{a.e. } \Omega \times (0, T),$$

$$\langle e'(t), z \rangle + \int_{\Omega} \nabla \tilde{\alpha}(t) \cdot \nabla z = (f(t), z)_{L^2} \quad \forall z \in H_0^1(\Omega)$$

と同値になる。したがって、 $u^* \in \partial_{H^{-1}}\psi(u)$ a.e. $\Omega \times (0, T)$ は広い意味で $\tilde{\alpha} \in \alpha(u)$ a.e. $\Omega \times (0, T)$ となることを表している。

参考文献

- [1] H. Brézis, Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert, North-Holland, Amsterdam, London, New York, 1973.
- [2] M. Brokate and J. Sprekels, "Hysteresis and Phase Transitions", Applies Mathematical Sciences **121**, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [3] A. Ito, N. Kenmochi and M. Kubo, Non-isothermal phase transition models with Neumann boundary conditions, Nonlinear analysis, **53** (2003), 977-996.
- [4] A. Ito, N. Kenmochi, M. Niezgodka, Phase separation model of Penrose-Fife type with Signorini boundary condition, Adv. Math. Sci. Appl., 17(2007), 337-356.
- [5] M. Kubo, Well-posedness of initial boundary value problem of degenerate parabolic equations, Nonlinear Analysis, **63** (2005), e2629-e2637.
- [6] M. Kubo, Q. Lu, Evolution equation for nonlinear degenerate parabolic PDE, Nonlinear Analysis **64** (2006) 1849-1859.
- [7] K. Kumazaki, A. Ito, M. Kubo, A non-isothermal phase separation with constraints and Dirichlet boundary condition for temperature, submitted.
- [8] O. Penrose and P.C. Fife, Thermodynamically consistent models of phase-field type for the kinetics of phase transitions, Physica D **43** (1990), 44-62.

熱水力学に現れる障害物問題について

深尾 武史 (岐阜工業高等専門学校 一般 (自然))

本研究は名古屋工業大学の久保雅弘先生との共同研究です. $0 < T < +\infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を有界領域とし, その境界 $\Gamma := \partial\Omega$ は十分滑らかとします. この発表では, 熱水力学に現れる障害物のある問題 (P):= {(1)-(7)} の解の存在について考えます:

- (1)
$$\theta \geq \psi \quad \text{in } Q := (0, T) \times \Omega,$$
- (2)
$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta - \Delta \theta = f \quad \text{in } Q(\theta) := \{(t, x) \in Q; \theta > \psi\},$$
- (3)
$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta - \Delta \theta \geq f \quad \text{in } Q_1(\theta) := \{(t, x) \in Q; \theta = \psi\},$$
- (4)
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v} = \mathbf{g}(\theta) - \nabla p \quad \text{in } Q,$$
- (5)
$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{in } Q,$$
- (6)
$$\theta = h, \quad \mathbf{v} = 0 \quad \text{on } \Sigma := (0, T) \times \Gamma,$$
- (7)
$$\theta(0) = \theta_0, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 \quad \text{in } \Omega,$$

ここで, $\theta = \theta(t, x)$ は温度, $\mathbf{v} := (v_1(t, x), v_2(t, x))$ は流速, そして $p := p(t, x)$ は圧力です. 問題 (P) は通常は移流項のある熱方程式 (2) ですが, 最低温度 $\psi := \psi(t, x)$ を下回ることが無いように, 温度 θ が ψ に到達したら (1) の制約を満たすように不等式 (3) として Ω 内で温度制御装置が働く障害物問題です. $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\theta_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{v}_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ は与えられた関数です. Navier-Stokes 方程式 (4) に現れる $\mathbf{g}(\theta)$ は対流の Boussinesq 近似と呼ばれ, 熱方程式との連立系を総称して Boussinesq 系と呼ぶこともあります. 熱方程式が線形の Boussinesq 系については, 森本 (1992) などの結果があります. 熱方程式にある種の非線形性が加わったものには, Diaz, Galiano(1998) や Lorca, Boldrini(1999) があり, 拡散項に非線形性を課しています. さらに退化放物型方程式の連立系に対して, Dirichlet 境界条件下で久保 (2005), Neumann 境界条件下で深尾, 久保 (2007) の結果があります. そして深尾, 久保 (2008) では二重の障害物 ψ_1 と ψ_2 の問題に対して解の存在と一意性を証明しています. その証明では $\psi_i \in L^\infty(Q)$ の仮定から $\psi_1 \leq \theta \leq \psi_2$ が得られれば自動的に $|\theta|_{L^\infty(Q)} \leq \max_{i=1,2} \{\|\psi_i\|_{L^\infty(Q)}\}$ が得られますが, 上記問題では $|\theta|_{L^\infty(Q)}$ の評価を別の方法で得る必要があり, そのために証明の手順も深尾, 久保 (2008) とは変わってきます.

$H := L^2(\Omega)$, $V := H_0^1(\Omega)$, $\mathcal{D}_\sigma(\Omega) := \{\mathbf{u} \in C_0^\infty(\Omega) := (C_0^\infty(\Omega))^2; \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ in } \Omega\}$, $\mathbf{H} := L_\sigma^2(\Omega)$, $\mathbf{V} := \mathbf{H}_\sigma^1(\Omega)$ とし, $a(\cdot, \cdot) : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ と $b(\cdot, \cdot, \cdot) : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ を次のように定義します.

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) := \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} dx, \quad b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) := \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j dx \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}.$$

さらに時間依存閉凸集合 $K(t)$ を次のように定義します.

$$K(t) := \{z \in H; z \geq \psi(t) \text{ a.e. on } \Omega\}.$$

定義 $\{\theta, \mathbf{v}\} \in L^\infty(Q) \times L^2(Q)$ が次の (D1)–(D3) を満たすとき, 問題 (P) の定義する:

(D1) $\theta \in W^{1,2}(0, T; H) \cap L^\infty(0, T; V) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega))$, そして $\theta(t) \in K(t)$ a.e. $t \in [0, T]$,
 $\mathbf{v} \in W^{1,2}(0, T; \mathbf{V}^*) \cap L^\infty(0, T; \mathbf{H}) \cap L^2(0, T; \mathbf{V})$;

(D2) 任意のテスト関数 $z \in K(t)$ と $z \in V$ に対して, θ と \mathbf{v} は次を満たす.

$$(\theta' - \Delta\theta + \mathbf{v} \cdot \nabla\theta - f, \theta - z)_H \leq 0 \quad \text{a.e. on } (0, T],$$

$$\langle \mathbf{v}', \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{V}^*, \mathbf{V}} + a(\mathbf{v}, \mathbf{z}) + b(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{z}) = (\mathbf{g}(\theta), \mathbf{z})_{\mathbf{H}} \quad \text{a.e. on } (0, T];$$

(D3) $\theta(0) = \theta_0$, $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ a.e. in Ω , $\theta = h$ a.e. on Σ .

仮定

(A1) $\psi \in W^{1,2}(0, T; V) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$;

(A2) $h \in W^{1,2}(0, T; H^{3/2}(\Gamma)) \subset L^\infty(\Sigma)$ で $h(t) \geq \psi(t)$ a.e. on Σ , $\forall t \in (0, T]$;

(A3) $f \in L^\infty(Q)$, g_i : Lipschitz 連続 ($i = 1, 2$), $\theta_0 \in V \cap L^\infty(\Omega) \cap K(0)$, $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{H}$.

定理 仮定 (A1), (A2), (A3) のもと少なくとも一つの (P) の解 $\{\theta, \mathbf{v}\}$ が存在する.

適正下半連続凸関数 $\phi : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ に対して ϕ の劣微分 (多価) は $u^* \in \partial\phi(u) \Leftrightarrow u \in D(\phi) = \{u \in H; \phi(u) < +\infty\}$ で $(u^*, z - u)_H \leq \phi(z) - \phi(u) \quad \forall z \in H$. また,

$$I_{K(t)}(z) := \begin{cases} 0 & \text{if } z \in K(t), \\ +\infty & \text{if } z \in H \setminus K(t). \end{cases}$$

$$\varphi^t(z) := \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla z|^2 dx & \text{if } z \in V \text{ and } z = h(t) \text{ a.e. on } \Gamma, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

と定義すると $I_{K(t)}$ と φ^t は H 上適正下半連続凸関数で $\partial\varphi^t(z) = -\Delta z$ a.e. on Ω で $z = h(t)$ a.e. on Γ , つまり $D(\partial\varphi^t) = \{z \in H^2(\Omega); z = h(t) \text{ a.e. on } \Gamma\}$ となる. $\forall \lambda, \mu \in (0, 1)$,

$$J_\lambda^{\partial\varphi^t} := (I + \lambda\partial\varphi^t)^{-1}, \quad J_\mu^{\partial I_{K(t)}} = (I + \mu\partial I_{K(t)})^{-1} = P_{K(t)},$$

$$(\partial\varphi^t)_\lambda(z) := \frac{1}{\lambda}(z - J_\lambda^{\partial\varphi^t} z) = \partial\varphi_\lambda^t(z), \quad (\partial I_{K(t)})_\mu(z) = \frac{[z - \psi(t)]^-}{\mu} = \partial I_{K(t)}^\mu(z),$$

$$\varphi_\lambda^t(z) := \inf_{y \in H} \left\{ \frac{1}{2\lambda} |z - y|_H^2 + \varphi^t(y) \right\}, \quad I_{K(t)}^\mu(z) = \frac{1}{2\mu} |P_{K(t)} z - z|_H^2,$$

とおくと次の補題が成立する.

補題 1. $\exists a \in [0, 1)$ と $\exists b, c \in L^1(0, T)$ (非負) s.t.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \varphi_\lambda^t(v(t)) - \left(v'(t), \partial\varphi_\lambda^t(v(t)) \right)_H \\ & \leq a |\partial\varphi_\lambda^t(v(t))|_H^2 + b(t) |\varphi_\lambda^t(v(t))| + c(t) (1 + |v(t)|_H^2) \quad \text{for a.e. } t \in (0, T], \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} I_{K(t)}^\mu(v(t)) - \left(v'(t), \partial I_{K(t)}^\mu(v(t)) \right)_H = \left(\psi'(t), \partial I_{K(t)}^\mu(v(t)) \right)_H \quad \text{for a.e. } t \in (0, T],$$

$\forall v \in W^{1,1}(0, T; H)$, $\forall \lambda, \mu \in (0, 1)$.

補題 2. $\exists d \in L^2(0, T)$ (非負) s.t.

$$(\partial I_{K(t)}^\mu(z), \partial\varphi_\lambda^t(z))_H \geq -d(t) |\partial I_{K(t)}^\mu(z)|_H \quad \text{for a.e. } t \in (0, T],$$

$\forall z \in H$, $\forall \lambda, \mu \in (0, 1)$.

補題 3. $\exists c_1 > 0$ s.t.

$$|G(\mathbf{v}, \theta)|_{L^2(0, T; H)}^2 \leq c_1 |\mathbf{v}|_{L^4(0, T; L_\sigma^4(\Omega))}^2 |\theta|_{L^\infty(Q)} \left(|\Delta\theta|_{L^2(0, T; H)} + |h|_{L^2(0, T; H^{3/2}(\Gamma))} \right),$$

$\forall \mathbf{v} \in L^4(0, T; L_\sigma^4(\Omega))$, $\forall \theta \in L^2(0, T; D(\partial\varphi^t)) \cap L^\infty(Q)$.

熱ストレス応答タンパク質合成プロセスの 数理モデル化と数値シミュレーション

伊藤 昭夫, 山本 和彦 (近畿大学工学部)
柳 雄一, 細野 聖 (近畿大学大学院)

1. 序論

増殖や形状変化等の癌腫瘍が引き起こす様々な現象を解明するには、1つ1つの癌細胞内で誘導される生化学反応を数理科学的な視点から解明することが重要である。何故ならば、癌細胞内で誘導されるミクロなレベルでの生化学反応はマクロなレベルで観測される癌腫瘍の挙動に様々な影響を与えているからと考えられているからである。故に、癌腫瘍が引き起こす様々な現象を解明するには、癌細胞内で誘導される生理現象を解明することが極めて重要である。

本講演では、細胞に熱刺激を加えたときの熱ストレス応答タンパク質 (Heat Shock Protein, 以下, HSP とする) の合成プロセスモデルの提案とその数値解析を行い、細胞分子工学による実験結果と比較することにより、数理モデルの妥当性を検討し HSP 合成プロセスを解明することを目的としている。このように、HSP 合成プロセスを数理科学と細胞分子工学との連携により解明することは、癌腫瘍が引き起こす多くの現象の解明に基礎研究となる。

2. 数理モデルの提案と実験結果

HSP は正常な細胞の維持やアポトーシスの誘導を行う働きを持つ細胞の生命維持に重要なタンパク質である。よって、細胞の状態を把握するためには細胞内での HSP の合成の程度や合成後の HSP の反応を解明することが極めて重要である。本講演では [1] で提唱された HSP 合成モデルの問題点を修正した数理モデルを提案する。ここで、細胞内での HSP 合成プロセスのフローチャートを次ページの図 1 に示す。ただし、図 1 中の HSF, HSE, S, S*, I, Pr, DPr, mRNA はそれぞれ Heat Shock Factor, Heat Shock Element, 非活性状態のストレス応答キナーゼ, 活性状態のストレス応答キナーゼ, 非活性化ホスファターゼ, 正常タンパク質, 変性タンパク質, メッセンジャーリボ核酸を表す。

図 1 に従って、各パスにおける生化学反応を化学反応速度論により数理モデル化すると、次の連立常微分方程式系が得られる：

$$\begin{aligned}a_1' &= k_2 a_9 a_{15} - 3k_4 a_1^3 + (2k_{11} a_5 + 2k_{14} a_3 - k_{16} a_1) a_{11} + k_{16b} a_9, \\a_2' &= -k_5 a_2 a_{17} + k_{15} a_8, \\a_3' &= k_5 a_2 a_{17} + k_{7b} a_4 - (k_7 a_{12} + k_{14} a_{11}) a_3, \\a_4' &= k_7 a_3 a_{12} - (k_{7b} + k_8) a_4, \\a_5' &= k_8 a_4 - k_{11} a_5 a_{11}, \\a_6' &= k_{11} a_5 a_{11} - k_{12} a_6 a_{13} + k_{12b} a_7, \\a_7' &= k_{12} a_6 a_{13} - (k_{12b} + k_{13}) a_7, \\a_8' &= k_{13} a_7 + k_{14} a_3 a_{11} - k_{15} a_8, \\a_9' &= -k_2 a_9 a_{15} + k_{15} a_8 + k_{16} a_1 a_{11} - k_{16b} a_9, \\a_{10}' &= k_9 a_5 - \frac{k_{mRNA}}{k_{mRNA} + a_{12}} a_{10}, \\a_{11}' &= k_3 a_{16} + k_{10} a_{10} + k_{16b} a_9 - (k_{11} a_5 + k_{14} a_3 + k_{16} a_1 + k_{17} a_{15} + k_{HSP}) a_{11},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{12}' &= k_{6MAX}(\theta) \frac{a_{18}}{k_6 + a_{18}} - k_{6bMAX} \frac{a_{12}}{k_{6b} + a_{12}} - k_7 a_3 a_{12} + (k_{7b} + k_8) a_4, \\
a_{13}' &= -k_{12} a_6 a_{13} + (k_{12b} + k_{13}) a_7, \\
a_{14}' &= -k_1(\theta) a_{14} + k_3 a_{16}, \\
a_{15}' &= k_1(\theta) a_{14} - (k_2 a_9 + k_{17} a_{11}) a_{15} \\
a_{16}' &= -k_3 a_{16} + (k_2 a_9 + k_{17} a_{11}) a_{15}, \\
a_{17}' &= k_4 a_1^3 - k_5 a_{17} a_2, \\
a_{18}' &= -k_{6MAX}(\theta) \frac{a_{18}}{k_6 + a_{18}} + k_{6bMAX} \frac{a_{12}}{k_{6b} + a_{12}}.
\end{aligned}$$

ここで, $a_i (1 \leq i \leq 18)$ は未知の非負値関数で HSF, HSE, [HSF₃:HSE], [S*:HSF₃:HSE], [P:HSF₃:HSE], [HSP:P:HSF:HSE], [I:HSP:P:HSF:HSE], [HSP:HSF:HSE], [HSP:HSF], mRNA, HSP, S*, I, Pr, DPr, [HSP:DPr], [HSF₃], S の量をそれぞれ表わす. また, $k_i (1 \leq i \leq 18)$, $k_{6MAX}(\theta)$, k_{6bMAX} , k_{6b} , k_{7b} , k_{12b} , k_{16b} , k_{HSP} , k_{mRNA} は各化学反応での反応速度をそれぞれ表す. 特に, 反応速度 $k_1(\theta)$ と $k_{6MAX}(\theta)$ は熱刺激による P から DPr への変性速度と S から S* への活性化速度を各々表すため, 温度 θ に依存する正值関数として与える.

平衡状態と思われる各種癌細胞においてウエスタンブロッティング法で有色分子量マーカーを用い細胞内の HSP90 を検出した結果を図 2 に示す. 図中のバンドは左側が肝癌細胞, 右側が肺癌細胞の HSP90 の量をそれぞれ表している.

図 1 HSP 合成プロセス

図 2 HSP90 のバンド

3. 今後の課題

現在様々な温度において, 生化学反応が平衡状態となったと思われるときの癌細胞内に含まれる HSP90 の量に関する測定データを入手している. 今後は数理モデルの定常解をもとにそれら実験データの再現を行う. また, 本講演で提案した数理モデルでは, 合成後の HSP の働きはフォールディングしか考慮していないため, 細胞の制御に重要な HSP のアポトーシスへの影響を考慮したモデルを構築し HSP 合成プロセスの解明を行う.

参考文献

- [1] T.R. Rieger, R.I. Morimoto, and V. Hatzimanikatis, Mathematical Modeling of the Eukaryotic Heat-Shock Response: Dynamics of the HSP70 Promoter, Biophysical Journal, 88 (2005), 1646-1658.

Asymptotic energy concentration in the phase space of the weak solutions to the Navier-Stokes equations

岡部 考宏 (東北大学大学院理学研究科 D1)

$n \geq 2$ として全空間 \mathbb{R}^n での Navier-Stokes 方程式において弱解のエネルギーの漸近挙動について考察する.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) = a & \text{in } \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (\text{N-S})$$

ここに $u = u(x, t) = (u_1(x, t), \dots, u_n(x, t))$ と $p = p(x, t)$ は未知函数で, それぞれ点 $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ における流体の速度ベクトルと圧力を表し, $a = a(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))$ は与えられた初期速度を表すとする.

(N-S) の解のエネルギー減衰などの漸近挙動に関しては多くの研究がなされているが, 近年, 別の視点による (N-S) の解の漸近挙動が調べられている. Skalák [2], [3] は次の (1) の意味で解のエネルギーの漸近挙動を扱った:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|E_\lambda u(t)\|_2}{\|u(t)\|_2} = 1. \quad (1)$$

ここで $\{E_\lambda\}_{\lambda \geq 0}$ は Stokes 作用素 A のスペクトル分解とし, $\|\cdot\|_2$ は $L^2(\mathbb{R}^n)$ -ノルムを表すものとする. また u が (1) を満たすとき, u のエネルギーは Fourier 周波数 λ に局在すると呼ぶことにする. Skalák [2], [3] は (1) を時間について滑らかな解である (N-S) の強解に対して $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|A^{1/2}u(t)\|_2/\|u(t)\|_2 < \infty$ なる条件を仮定して証明した.

しかしこの条件を確かめることは一般には困難である. そこで我々の目的は, 初期速度に何らかの条件を設けることで (1) を導くことである. この目的のため, 次の集合を導入する. $\alpha, \delta > 0$ と $m \geq 0$ に対して

$$K_{m, \alpha}^\delta = \{\phi \in L^2(\mathbb{R}^n); |\hat{\phi}(\xi)| \geq \alpha|\xi|^m \text{ for } |\xi| \leq \delta\}. \quad (2)$$

この集合 $K_{m, \alpha}^\delta$ は Schonbeck [1] によって与えられた集合の一般化とみなすことができる. この集合 $K_{m, \alpha}^\delta$ を用いて以下の結果を得た.

Theorem. $2 \leq n \leq 4$ とし, $\alpha, \delta > 0$ とする. 指数 $r > 1$ と $m \geq 0$ を

(i) $n = 2$ のとき,

$$1 < r < \frac{4}{3}, \quad 0 \leq m < \frac{4}{r} - 3,$$

(ii) $n = 3, 4$ のとき,

$$1 < r < \frac{n}{n-1}, \quad 0 \leq m < \frac{n}{r} - (n-1)$$

とする. もし $a \in L_\sigma^r \cap L_\sigma^2 \cap K_{m,\alpha}^\delta$ ならば任意の (N-S) の *turbulent solution* u に対して, 或る $T > 0$ と定数 $C(n, r, m, \delta, \alpha, T) > 0$ が存在して

$$\left| \frac{\|E_\lambda u(t)\|_2}{\|u(t)\|_2} - 1 \right| \leq \frac{C}{\lambda} t^{-(n/r - n + 1 - m)} \quad (3)$$

が任意の $\lambda > 0$ と任意の $t > T$ に対して成り立つ.

ここに, *turbulent solution* u は通常のエネルギークラス $L^\infty(0, \infty; L^2) \cap L^2(0, T; H^1)$, $T > 0$ に属する (N-S) の超関数解であり強エネルギー不等式

$$\|u(t)\|^2 + 2 \int_s^t \|\nabla u(\tau)\|^2 d\tau \leq \|u(s)\|^2$$

を任意の $0 \leq s < t < \infty$ に対して満たすものである.

Remark.

- (i) Skalák [3] では $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|A^{1/2}u(t)\|_2 / \|u(t)\|_2 < \infty$ の条件のもと (1) を示した. Theorem の仮定から, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|A^{1/2}u(t)\|_2 / \|u(t)\|_2 = 0$ を示すことができる. しかし, 我々は Skalák [3] とは別の方法を用いて (1) を示すことができた. また Skalák [3] では得られていなかった, (1) の正確な漸近指数を得ることができた.
- (ii) 我々の結果における利点は (1) を引き起こすような初期速度の集合を構成したことにあると思われる. 初期速度の集合 $K_{m,\alpha}^\delta$ を導入することにより解のエネルギー減衰の下からの評価を導くことができる.

参考文献

- [1] M. E. Schonbek, *Comm. Partial Differential Equations*, **11** (1986), 733-763.
- [2] Z. Skalák, *WSEAS Trans. Math.*, **3** (2006), 280-288.
- [3] Z. Skalák, *Some aspects of the asymptotic dynamics of solutions of the homogeneous Navier-Stokes equations in general domains*, preprint.

cone 領域における反応拡散方程式系の時間大域解の非存在について

五十嵐 威文 (日本大学理工学部 一般教育教室 助教)
梅田 典晃 (東京大学大学院 数理科学研究科 特任研究員)

$D = \{x \in \mathbf{R}^N; x \neq 0 \text{ and } x/|x| \in \Omega\}$ とする。但し, Ω を S^{N-1} 上のある十分滑らかな領域とする。この領域 D を \mathbf{R}^N における cone 領域という。

次の反応拡散方程式系の初期境界値問題を考える;

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + K_1(x, t)v^{p_1}, & x \in D, t > 0, \\ v_t = \Delta v + K_2(x, t)u^{p_2}, & x \in D, t > 0, \\ u(x, t) = v(x, t) = 0, & x \in \partial D, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, & x \in D, \end{cases} \quad (1)$$

但し, $p_1, p_2 \geq 1, p_1 p_2 > 1$ とする。初期データ $u_0(x)$ 及び $v_0(x)$ は \bar{D} において有界かつ連続で, ∂D 上で $u_0(x) = v_0(x) = 0$ とする。関数 $K_i(x, t)$ ($i = 1, 2$) は $D \times (0, \infty)$ において非負で連続とする。

以下の Theorem 1 では $K_i(x, t)$ ($i = 1, 2$) に関して次の仮定をする;

$$K_i(x, t) \leq C_U \langle x \rangle^{\hat{\sigma}_i} (t+1)^{\hat{q}_i} \quad \text{for any } x \in D, t \geq 0, \quad (2)$$

但し, $C_U, \hat{\sigma}_i, \hat{q}_i \geq 0, \langle x \rangle = (|x|^2 + 1)^{1/2}$ 。

L_a^∞ を $\|\xi\|_{\infty, a} := \text{ess. sup}_{x \in D} \langle x \rangle^a |\xi(x)| < \infty$ となるような D で L^∞ 関数のバナッハ空間であるとする。 $T > 0$ に対して,

$$E_T = \{(u, v) : [0, T] \rightarrow L_{\delta_1}^\infty \times L_{\delta_2}^\infty; \|(u, v)\|_{E_T} < \infty\}$$

とおく。但し,

$$\begin{aligned} \|(u, v)\|_{E_T} &:= \sup_{t \in [0, T]} \{\|u(t)\|_{\infty, \delta_1} + \|v(t)\|_{\infty, \delta_2}\}, \\ \delta_1 &= \frac{\hat{\sigma}_2 p_1 + \hat{\sigma}_1}{p_1 p_2 - 1}, \quad \delta_2 = \frac{\hat{\sigma}_1 p_2 + \hat{\sigma}_2}{p_1 p_2 - 1} \end{aligned}$$

である。

Theorem 1 (時間局所解の存在). $\langle x \rangle^{\delta_1} u_0(x)$ 及び $\langle x \rangle^{\delta_2} v_0(x)$ が \bar{D} で有界であるとする。 $K_i(x, t)$ ($i = 1, 2$) が (2) を満たすとする。このとき, ある $T > 0$ に対して, $D \times (0, T)$ において (1) の非負解 $(u, v) \in E_T$ が一意に存在する。

以下の Theorem 2 では $K_i(x, t)$ ($i = 1, 2$) に関して次の仮定をする;

$$K_i(x, t) \geq C_L |x|^{\sigma_i} t^{q_i} \quad \text{for any } x \in \cup_{m=1}^\infty B(x_m, k|x_m|), t \geq 0, \quad \text{但し, } C_L > 0, \sigma_i, q_i \geq 0. \quad (3)$$

ここで, $B(x_m, k|x_m|)$ は x_m を中心とする半径 $k|x_m|$ ($\exists k > 0$) の球で, $\{x_m\}_{m=1}^\infty$ は $0 < |x_m| < |x_{m+1}|$ ($\forall m$) かつ $\lim_{m \rightarrow \infty} |x_m| = \infty$ を満たすとする。また, $\cup_{m=1}^\infty B(x_m, k|x_m|) \subset D$ とする。

Δ_Ω を Ω 上のラプラス ベルトラミ作用素とすると, $\{\omega_n\}_{n=1}^\infty$ をディリクレ境界条件下での Δ_Ω に対する固有値とし, $\{\psi_n(\theta)\}_{n=1}^\infty$ (但し $\theta = x/|x|$) を $\{\omega_n\}_{n=1}^\infty$ に対応する正規直交系の固有関数とする。

γ_+ を 2 次方程式 $\gamma(\gamma + N - 2) = \omega_1$ の正の根とする。また, H_a, α_1, α_2 をそれぞれ

$$H_a = \{\xi \in C(\bar{D}); \xi(x) \geq M \langle x \rangle^{-a} \psi_1(x/|x|) \text{ for } x \in \cup_{m=1}^\infty B(x_m, k|x_m|) \text{ with some } M > 0\},$$

$$\alpha_1 = \frac{(2 + \sigma_1 + 2q_1) + (2 + \sigma_2 + 2q_2)p_1}{p_1 p_2 - 1}, \quad \alpha_2 = \frac{(2 + \sigma_2 + 2q_2) + (2 + \sigma_1 + 2q_1)p_2}{p_1 p_2 - 1}$$

とする。このとき, 次の主結果が得られた。

Theorem 2 (時間大域解の非存在). $K_i(x, t)$ ($i = 1, 2$) が (3) を満たすとする。また, 次の 2 つの条件のうち 1 つが成り立つとする;

$$\max\{\alpha_1, \alpha_2\} \geq N + \gamma_+.$$

$$u_0 \in H_{a_1} \text{ with } a_1 < \alpha_1 \text{ または } v_0 \in H_{a_2} \text{ with } a_2 < \alpha_2$$

このとき, (1) の非自明な時間大域解が存在しない。

Theorems 1 and 2 の証明は, [4] の方法に基づいて行われているが, cone 領域 D で考えているので下記のこと特に注意する必要がある;

Remark 1. (1) は積分方程式

$$\begin{cases} u(x, t) = S(t)u_0(x) + \int_0^t S(t-s)K_1(x, s)v(x, s)^{p_1} ds, \\ v(x, t) = S(t)v_0(x) + \int_0^t S(t-s)K_2(x, s)u(x, s)^{p_2} ds, \end{cases}$$

を満たす。但し,

$$S(t)\xi(x) = \int_D G(x, y, t)\xi(y)dy$$

で, $G(x, y, t) = G(r, \theta, \rho, \phi, t)$ ($r = |x|$, $\rho = |y|$, $\theta = x/|x|$, $\phi = y/|y| \in \Omega$) は, cone 領域 D における拡散方程式のグリーン関数なので,

$$G(r, \theta, \rho, \phi, t) = \frac{1}{2t}(r\rho)^{-(N-2)/2} \exp\left(-\frac{\rho^2 + r^2}{4t}\right) \sum_{n=1}^{\infty} I_{\nu_n}\left(\frac{r\rho}{2t}\right) \psi_n(\theta)\psi_n(\phi) \quad (4)$$

と表される。ここで, $\nu_n = [(N-2)^2/4 + \omega_n]^{1/2}$, $I_{\nu_n}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k}}{k!\Gamma(\nu_n + k + 1)}$ で, Γ はガンマ関数 $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} s^{z-1}e^{-s}ds$ である。

References

- [1] C. Bandle and H. A. Levine, *On the existence and nonexistence of global solution of reaction-diffusion equation in sectorial domains*, Trans. Amer. Math. Soc. **316** (1989), 595–622.
- [2] T. Hamada, *Nonexistence of global solutions of parabolic equations in conical domains*, Tsukuba J. Math. **19** (1995), 15-25.
- [3] T. Hamada, *On the existence and nonexistence of global solutions of semilinear parabolic equations with slowly decaying initial data*, Tsukuba J. Math. **21** (1997), 505-514.
- [4] T. Igarashi and N. Umeda, *Existence and nonexistence of global solutions in time for a reaction-diffusion system with inhomogeneous terms*, Funkcialaj Ekvacioj **51** (2008), 17–37.
- [5] T. Igarashi and N. Umeda, *Nonexistence of global solutions in time for reaction-diffusion systems with inhomogeneous terms in cones*, Preprint Series, Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, UTMS 2008-18.
- [6] H. A. Levine, *A Fujita type global existence-global nonexistence theorem for a weakly coupled system of reaction-diffusion equations*, J. Appli. Math. Phys. (ZAMP) **42** (1991), 408-430.
- [7] H. A. Levine and P. Meier, *The value of critical exponent for reaction-diffusion equation in cones*, Arch. Ratl. Mech. Anal. **109** (1990), 73-80.
- [8] H. A. Levine and P. Meier, *A blowup result for the critical exponent in cones*, Israel J. Math. **67** (1989), 129-136.
- [9] M. H. Protter and H. F. Weinberger, “Maximum principles in Differential Equations”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1967.
- [10] Y.-W. Qi and H. A. Levine, *The critical exponent of degenerate parabolic systems*, Z. Angew Math. Phys. **44** (1993), 249-265.
- [11] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd Ed., Cambridge University Press, London/New York 1944.