科学技術と数学

横田智巳
（東京理科大学）

2011年5月26日（木）
於 東京都立多摩科学技術高等学校

授業計画

1. 序論（講演の概要）
2. 微分方程式とは？
3. 生物の個体数変化
4. F1マシンの解析のお話、まとめ

1. 序論（講演の概要）

世の中の様々な現象

- 室内の温度変化
- 生物の個体数変化
- F1マシン周りの流体解析
- 津波の解析

⬇

ある量の変化を表す**微分方程式**
と呼ばれる方程式で記述される。

１次方程式（$ax+b=c$）、

２次方程式（$ax^2+bx+c=0$）については

解が存在するための条件や

解を具体的に求めることは容易

↓

微分方程式については

解が存在するための条件や

解を具体的に求めることは困難

↓

微分方程式を解かずして解く！

（Step 1）方程式の形から考察を始める

（Step 2）解の存在や性質に関する予想を立てる

（Step 3）予想が正しいことを検証する

例えば、方程式 f(x)＝0 の解の存在や解の個数は関数 y＝f(x) のグラフと x軸 との交点を調べればわかるということに相当する。

2. 微分方程式とは？

微分とは？

➡　瞬間的な変化の割合を求めることである。

関数f(x)の微分係数 f ’(a) とは？

➡　bをaに近づけるときの

{f(b)-f(a)}/(b-a)が近づく値（極限値）

関数f(x)の導関数 f ’(x) とは？

➡　微分係数 f ’(a) を a の関数とみて

変数aをxにしたもの

具体的な関数の微分

- 問1. $f(x)=2x+1$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

- 問2. $f(x)=x^2$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

（ヒント） どちらについても、まず変化の割合

$$\{f(b)-f(a)\}/(b-a)$$

を計算する. 次に、bをaに近づける.

最後に、aをxにすればよい.

解答

- 問1．$f(x)=2x+1$

  $\{f(b)-f(a)\}/(b-a) = 2(b-a)/(b-a) = 2$

  bをaに近づけるとき（近づけなくても）、2のまま.

  よって、$f'(x) = 2$

- 問2．$f(x)=x^2$

  $\{f(b)-f(a)\}/(b-a) = (b^2-a^2)/(b-a) = b+a$

  bをaに近づけるとき、$b+a$ は $2a$ に近づく.

  aをxにすることにより、$f'(x) = 2x$

微分方程式とは？

関数とその導関数(微分)との間に成り立つ関係式のことを**微分方程式**という。

現象を数学的に表現すると、微分方程式によって記述されることが多い。

例えば、時刻 t の室温を $u(t)$ で表すとき、

$$u'(t) = u(t)\{27 - u(t)\}$$

は室温の変化の様子を表す微分方程式の1つと考えられる(より詳しくは次項で)。

室温の変化の様子

$u(t)$: 時刻 t の室温

$$u'(t) = u(t)\{27 - u(t)\}$$

(微分方程式から読み取れること)

- 室温 $u(t)$ が 27 より低い
  ➡ $u'(t) > 0$ ➡ 室温が上がる
- 室温 $u(t)$ が 27 より高い
  ➡ $u'(t) < 0$ ➡ 室温が下がる
- 室温 $u(t)$ が 27 と等しい
  ➡ $u'(t) = 0$ ➡ 室温は変化しない

3. 生物の個体数変化

（Lotka-Volterraの生存競争モデル）

次の連立微分方程式を考える:

$$X'(t) = X(t)\{4 - Y(t)\},$$
$$Y'(t) = Y(t)\{X(t) - 4\}$$

X(t): 時刻tの草食動物の個体数
Y(t): 時刻tの肉食動物の個体数

- 問3. 上の連立微分方程式の意味(草食動物と肉食動物の個体数変化の様子)を答えよ。

個体数変化の研究

$$X'(t) = X(t)\{4 - Y(t)\},$$
$$Y'(t) = Y(t)\{X(t) - 4\}$$

$X(t) = 4$, $Y(t) = 4$ のとき、個体数は不変！

$$X(t) = 4 + f(t),\ Y(t) = 4 + g(t)$$

とおいて、4からの変化の具合を考察する。

- 問4. X(t), Y(t)の連立微分方程式を、f(t), g(t)の連立微分方程式に書き換えよ。

不変量からの変化をみる

$$X'(t) = X(t)\{4 - Y(t)\},$$
$$Y'(t) = Y(t)\{X(t) - 4\}$$

$X(t) = 4 + f(t)$ ⬇ $Y(t) = 4 + g(t)$

$$f'(t) = \{4 + f(t)\}\{-g(t)\},$$
$$g'(t) = \{4 + g(t)\}f(t)$$

ここで、$f(t)$, $g(t)$を微小な量とすると

➡2次の項 $f(t)g(t)$ は非常に微小な量となる！

無視できる項を落として予想

$$f'(t) = \{4 + f(t)\}\{-g(t)\},$$
$$g'(t) = \{4 + g(t)\}f(t)$$

2次の項f(t)g(t)を無視

$$f'(t) = -4g(t),$$
$$g'(t) = 4f(t)$$

$$f(t) = a\cos(4t) - b\sin(4t),$$
$$g(t) = a\sin(4t) + b\cos(4t) \quad (a,b: 定数)$$

不変量からの変化の様子

$f(t) = a\cos(4t) - b\sin(4t)$,
$g(t) = a\sin(4t) + b\cos(4t)$ (a,b: 定数)

- 問5. $t \geqq 0$の範囲でtが動くとき、xy平面上の点$(f(t), g(t))$はどのような曲線上を動くか？

（ヒント1） $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

（ヒント2） $f(t)$, $g(t)$を2乗して足してみる。

解答

- 問5.

$$\{f(t)\}^2 = \{a\cos(4t) - b\sin(4t)\}^2$$

$$\{g(t)\}^2 = \{a\sin(4t) + b\cos(4t)\}^2$$

⇒

$$\{f(t)\}^2 + \{g(t)\}^2$$

$$= a^2\{\sin^2(4t) + \cos^2(4t)\}$$

$$+ b^2\{\sin^2(4t) + \cos^2(4t)\}$$

$$= a^2+b^2$$

⇒ (f(t), g(t))は原点からの距離が一定であるから、原点を中心とする円周の上を動く！

個体数の変化(まとめ)

(Lotka-Volterraの生存競争モデル)

$$X'(t) = X(t)\{4 - Y(t)\},$$
$$Y'(t) = Y(t)\{X(t) - 4\}$$

$X(t)$: 時刻tの草食動物の個体数
$Y(t)$: 時刻tの肉食動物の個体数

$$X(t) = 4 + f(t),\ Y(t) = 4 + g(t)$$

とおくとき、$(f(t), g(t))$は原点を中心とする円周の上を動くので、$(X(t), Y(t))$は点(4,4)の周りを円軌道を描くように動く。