高校数学 テスト

1. 次の積分の値を求めよ.

$$\int_0^1 \frac{2x+2}{x^2+x+1}\,dx.$$

2. 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ について, $a^2+b^2=1,\ c^2+d^2=1,\ ac+bd=0$ を満たすとき, 次を示せ:

$$AB=E.$$

3. $a>0$ とし, x,y が次の 4 つの不等式を同時に満たすとき, $x+y$ の最大値 $f(a)$ を求めよ.

$$\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0, \\ 2x+3y \leq 12, \\ ax+\left(4-\dfrac{3}{2}a\right)y \leq 8. \end{cases}$$

4. 次の極限値を求めよ:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\log\left(\frac{n+k}{n}\right).$$

5.　実数 $\alpha>0$ に対して, $f_\alpha(x)=e^{(\alpha+1)x}-e^x$ とおく. 以下の問に答えよ.

(1) $f_\alpha(x)$ が最小となる x の値 x_α を求めよ.

(2) $g_\alpha(y)=\displaystyle\int_y^{y+1} f_\alpha(x)e^{y-x}\,dx$ とおく. $g_\alpha(y)$ が最小となる y の値 y_α を求めよ.

(3) $0<\alpha\leq 1$ のとき,

$$1+\frac{\alpha}{2}\leq\frac{e^\alpha-1}{\alpha}\leq 1+\frac{\alpha}{2}+\alpha^2$$

が成立することを用いて極限 $\displaystyle\lim_{\alpha\downarrow 0}(y_\alpha-x_\alpha)$ を求めよ.

6. 座標平面の原点を O とし,

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とする. また, α,β は実数とする. 任意の点 P に対し, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ への正射影を $\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ への正射影を $\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}$ とし, 1 次変換 $f_{\alpha,\beta}$ を $f_{\alpha,\beta}=\alpha\,\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}+\beta\,\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}$ により定める. 1 次変換 g がどのような α,β に対しても

$$f_{\alpha,\beta}\circ g=g\circ f_{\alpha,\beta}$$

($\circ$ は変換の合成を表す) となるための必要十分条件はある α',β' に対して,

$$g=f_{\alpha',\beta'}$$

となることである. これを証明せよ.