高校数学 テスト

学籍番号: ____________________

氏名: ____________________

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の積分の値を求めよ:

$$\int_0^1 \frac{2x+2}{x^2+x+1}\,dx.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ について, $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$, $ac+bd=0$ を満たすとき, 次を示せ:

$$AB = E.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $a>0$ とし, x, y が次の 4 つの不等式

$$\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0, \\ 2x+3y \leq 12, \\ ax + \left(4 - \dfrac{3}{2}a\right)y \leq 8 \end{cases}$$

を同時に満たすとき, $x+y$ の最大値 $f(a)$ を求めよ.

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の極限値を求めよ:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \log\left(\frac{n+k}{n}\right).$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ 実数 $\alpha > 0$ に対して,

$$f_\alpha(x) = e^{(\alpha+1)x} - e^x$$

とおく. 以下の問に答えよ.

(1) $f_\alpha(x)$ が最小となる x の値 x_α を求めよ.

(2) $g_\alpha(y) = \displaystyle\int_y^{y+1} f_\alpha(x) e^{y-x}\,dx$ とおく. $g_\alpha(y)$ が最小となる y の値 y_α を求めよ.

(3) $0 < \alpha \leq 1$ のとき,

$$1 + \frac{\alpha}{2} \leq \frac{e^\alpha - 1}{\alpha} \leq 1 + \frac{\alpha}{2} + \alpha^2$$

が成立することを用いて $\displaystyle\lim_{\alpha\downarrow 0}(y_\alpha - x_\alpha)$ を求めよ.

$\boxed{\mathbf{6}}$ 座標平面の原点を O とし,

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とする. また, α, β は実数とする. 任意の点 P に対し, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ への正射影を $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ への正射影を $\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}$ とし, 1 次変換 $f_{\alpha,\beta}$ を $f_{\alpha,\beta} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}$ により定める. 1 次変換 g がどのような α, β に対しても

$$f_{\alpha,\beta} \circ g = g \circ f_{\alpha,\beta}$$

($\circ$ は変換の合成を表す) となるための必要十分条件はある α', β' に対して,

$$g = f_{\alpha',\beta'}$$

となることである. これを証明せよ.