

高校数学テスト

実施日 10月2日

1 $a, b > 0$ を定数とし、次の条件を仮定する:

- 関数 $y = x^3 - ax$ のグラフと点 $(0, 2b^3)$ を通る直線はちょうど2点 P, Q を通る,
- P の x 座標は負, Q の x 座標は正.

(1) 直線 PQ の方程式および, P の座標, Q の座標をそれぞれ a と b を用いて表せ.

(2) 次の問に答えよ.

(i) $4b^6 - 5ab^4 + (a^2 + 1)b^2 = 0$ となることを示せ.

(ii) $\angle POQ = 90^\circ$ となる b が存在するような a の値の範囲を求めよ.

2 空間内の四面体を考える. 辺 AB, BC, CD, DA の中点をそれぞれ K, L, M, N とする.

(i) $4\overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{LN} = |\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{BD}|^2$ を示せ.

(ii) 四面体 $ABCD$ の すべての面が互いに合同である とする. このとき,

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|, |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}|, |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|,$$

を示せ.

3 $n(X)$ は集合 X の元の個数を表すとする.

(1) $A \cap B = \emptyset$ のとき, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ を示せ.

(2) $P = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $Q = \{x \mid 5 \leq x \leq 10, x \text{ は自然数}\}$ のとき, $n(P \cup Q)$ を求めよ.

4 次の問に答えよ.

(1) $f(x) = x^4$ ($0 \leq x \leq 10$) とするとき, 次の表1を埋めよ.

x	0	...	$\sqrt[4]{6}$...	2
f		

表1 $f(x) = x^4$ ($0 \leq x \leq 10$) の変化表.

(2) $g(x) = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) とするとき, 次の表2を埋めよ.

x	0	...	$\frac{\pi}{4}$...	$\frac{\pi}{2}$
g'	1			+	0
g	0	\nearrow	$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1

表2 $g(x) = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) の増減表.