

第6回数式図形画像処理 (10/23)

横田 智巳 (東京理科大学)

1 1変数関数の連続性

ここでは, 1変数関数の連続性についてふれる. そして, それに基づき連続関数の共通の性質を見ていく.

1.1 ε - δ 式定義と連続関数の性質

点列による定義は複雑な議論をする際, 不便なこともある. そこで, ε - δ 式の定義をする.

定義 1.1. $I \subset \mathbb{R}$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ とする. 関数 f が $x_0 \in I$ で**連続**とは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在して,

$$(1) \quad x \in I, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

が成立すること.

証明. 数列の有界性と区間縮小法を用いて結論を得る. □

定理 1.2 (Weierstrass の最大値定理). $f \in C[a, b] \Rightarrow f$ は $[a, b]$ 上有界で, 最大値, 最小値をとる.

定理 1.2 の証明に必要な補題の主張のみ述べる (詳しくは [1, 第 1 章] を見よ).

補題 1.3 (Bolzano-Weierstrass の定理). 有界な数列は収束部分列をもつ.

証明 (定理 1.2). [1, 第 2 章] を見よ. □

系 1.4. $f(x) := a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ ($x \in [a, b]$) とおく. このとき, f は $[a, b]$ 上有界で, 最大値, 最小値をもつ.

1.2 その他の連続性

連続性には様々なものがある. その中の Lipschitz 連続性¹を扱う.

定義 1.5 (Lipschitz 連続性). $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ とする. f が I 上 **Lipschitz 連続**であるとは, ある $C > 0$ が存在して,

$$(2) \quad |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|, \quad \forall x, y \in I$$

が成立すること.

命題 1.6. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ が I 上 Lipschitz 連続 $\Rightarrow f \in C(I)$.

証明. (2) から得られる. □

¹他にも絶対連続性などがある.

2 関数列

ここでは、関数列がある関数に収束するということについて扱う。

2.1 関数列の一致収束

関数列の収束の速さが x に依存しない一致収束²という概念を扱う。

定義 2.1. 関数列 $\{f_n\}$ が f に $[a, b]$ 上一致収束するとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ が存在し、任意の $x \in [a, b]$ に対して

$$(3) \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0$$

が成立すること。

注意 2.2. 定義 2.1 での一致収束の条件 (3) は次のように言い換えることもできる:

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

2.2 一致収束による関数の性質の遺伝

$I := [a, b]$ とする。次の主張は「連続関数列の一致収束極限も連続」を意味している。

定理 2.3. $\{f_n\} \subset C(I)$ で、 $\{f_n\}$ が f に I 上一致収束する $\Rightarrow f \in C(I)$ 。

証明. 条件 (3), 条件 (1) の順に用いると結論を得る。 □

補題 2.4. 次が成立:

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq (b-a) \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)|.$$

定理 2.5. $\{f_n\} \subset C(I)$, $\{f_n\}$ が f に I 上一致収束するとき、 $f \in C(I)$ で、次が成立:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

証明. 定理 2.3 および補題 2.4 と注意 2.2 より得られる。 □

参考文献

[1] 宮島 静雄, 微分積分学 I, 初版, 共立出版, 2003.

[2] 奥村 晴彦, L^AT_EX₂e 美文書作成入門, 第3版, 技術評論社, 2004.

²各点収束という概念もある。