第7回 数式図形画像処理 (10/30)

横田 智巳 (東京理科大学)

§1. 1変数関数の連続性

ここでは, 1変数関数の連続性についてふれる. そして, それに基づき連続関数の共通の性質を見ていく.

1.1. ε-δ 式定義と連続関数の性質

点列による定義は複雑な議論をする際, 不便なこともある. そこで, ε-δ 式の定義をする.

定義 1.1. $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ とする. 関数 f が $x_0 \in I$ で**連続**とは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在して,

$$x \in I, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \tag{1.1}$$

が成立すること.

証明. 数列の有界性と区間縮小法を用いて結論を得る. □

定理 1.2 (Weierstrass の最大値定理)**.** $f \in C[a,b]$
$\Rightarrow f$ は $[a,b]$ 上有界で, 最大値, 最小値をとる.

定理 1.2 の証明に必要な補題の主張のみ述べる (詳しくは [**1**, **定理 1.13**] を見よ).

補題 1.3 (Bolzano-Weierstrass の定理)**.** 有界な数列は収束部分列をもつ.

証明 (定理 1.2)**.** [**1**, **定理 2.2**] を見よ. □

系 1.4. $f(x) := a_n x^n + \cdots + a_0$ $(x \in [a,b])$ とすると, f は $[a,b]$ 上有界で, 最大値, 最小値をもつ.

1.2. その他の連続性

連続性には様々なものがある. その中の Lipschitz 連続性[1)]を扱う.

定義 1.5 (Lipschitz 連続性)**.** $f : I \to \mathbb{R}$ とする. f が I 上 **Lipschitz 連続**であるとは, ある $C > 0$ が存在して,

$$|f(x) - f(y)| \le C|x - y|, \quad \forall\, x, y \in I \tag{1.2}$$

が成立すること.

命題 1.6. $f : I \to \mathbb{R}$ が I 上 Lipschitz 連続 $\Rightarrow f \in C(I)$.

証明. (1.2) から得られる. □

[1)] 他にも絶対連続性などがある.

§2. 関数列

ここでは, 関数列がある関数に収束するということについて扱う.

2.1. 関数列の一様収束

関数列の収束の速さが x に依存しない一様収束[2)]という概念を扱う.

定義 2.1. 関数列 $\{f_n\}$ が f に $[a,b]$ 上**一様収束**するとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ が存在し, 任意の $x \in [a,b]$ に対して

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0 \tag{2.1}$$

が成立すること.

注意 2.2. 定義 2.1 での一様収束の条件 (2.1) は次のように言い換えることもできる:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0. \tag{2.2}$$

2.2. 一様収束による関数の性質の遺伝

$I := [a,b]$ とする. 次の主張は「連続関数列の一様収束極限も連続」を意味している.

定理 2.3. $\{f_n\} \subset C(I)$ で, $\{f_n\}$ が f に I 上一様収束する $\Rightarrow f \in C(I)$.

証明. 条件 (2.1), 条件 (1.1) の順に用いると結論を得る. □

補題 2.4. 次が成立:

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|.$$

項別積分定理

定理 2.5. $\{f_n\} \subset C(I)$, $\{f_n\}$ が f に I 上一様収束するとき, $f \in C(I)$ で, 次が成立:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

証明. 定理 2.3 および補題 2.4 と (2.2) より得られる. □

参考図書

[1] 宮島 静雄, 微分積分学 I, 初版, 共立出版, 2003.

[2] 奥村 晴彦, LaTeX2e 美文書作成入門, 第 3 版, 技術評論社, 2004.

---

2) 各点収束という概念もある.