2012 年 11 月 13 日

曲面を描こう！
～現実世界への応用～

横田 智巳 (Tomomi YOKOTA)†
東京理科大学理学部第一部数学科

概要. 高校では, 関数 $y = f(x)$ とそのグラフ（曲線）の描き方を習う. 大学では, 関数 $z = f(x, y)$ とは何か, そのグラフをどのようにとらえるかを学ぶことができる. この論説では, 関数 $z = f(x, y)$ のグラフは一般に曲面になることを例をあげて解説する. また, 関数の研究が現実世界（熱の伝わり方, 津波の解析, F1 マシン周りの流体解析, インフルエンザの流行等）に応用されていることを紹介する.

第 1 節. 1 変数関数とは

この節では, x を変数とする関数 $y = f(x)$ の定義を復習してから, そのグラフが一般に曲線になることを確認する.

1.1. 1 変数関数の定義と例

まず, 1 変数関数 $y = f(x)$ の定義を復習しよう. 大学レベルの詳しい解説は [**1**] を参照するとよい.

定義 1.1. ある値 x に対して, ただ 1 つの値 y が対応するような関係があるとき, この関係を **1 変数関数**といい, 一般的に

$$y = f(x)$$

と表す. このとき, y は x の関数であるといい, x を変数という. 関数 $y = f(x)$ に対して, 変数 x のとりうる値の範囲をこの関数の**定義域**といい, また, 定義域に対応する関数の値のとりうる範囲をこの関数の**値域**という.

注意 1.2. 上では, 関数を表す文字として f を用いたが, g や h など他の文字を用いることもよくある. また, 変数を表す文字についても, x ではなく t などの文字を用いることもある.

†E-mail: yokota@rs.kagu.tus.ac.jp

例 1.1. 長さ 10 のひもで長方形を作る場合, 横の長さ x を決めて縦の長さ y を対応させる関数は

$$y = 5 - x \tag{1.1}$$

と表される. あるいは (1.1) を

$$f(x) = 5 - x \tag*{(1.1)$'$}$$

と表してもよい. この場合, x の値は

$$0 < x < 5 \tag{1.2}$$

でなければならない. さらに x の値に対応する y の値は

$$0 < y < 5 \tag{1.3}$$

となる. よって, (1.2) と (1.3) から

$$\begin{aligned} &\text{定義域は } 0 < x < 5, \\ &\text{値域は } 0 < y < 5 \end{aligned}$$

となる.

例 1.2. 例 1.1 では x の値が変わると y の値も変わるが, そうならない例もある. すべての実数 x に対して常に定数 10 が対応するような関数

$$y = 10$$

がその例である. このような関数を**定数関数**という.

例 1.3. 関数が具体的な式で表されているとき, 変数がとりうる最大の範囲をその関数の定義域と考えることも多い. 例えば,

$$y = \frac{1}{x}$$

では, 定義域は $x \neq 0$ であるような実数全体,

$$y = \sqrt{x(1-x)}$$

では, 定義域は $0 \leq x \leq 1$ であるような実数全体を考える.[††]

問 1.1. y が x の関数であるかどうか答えよ.

(1) $y = x^2 + 1$

(2) $y = \pm\sqrt{x}$ $(x \geq 0)$

(3) $y = |x|$

[††] 大学では ≦ や ≧ を $\leq$ や $\geq$ と書くのが標準である!

1.2. 1 変数関数のグラフ

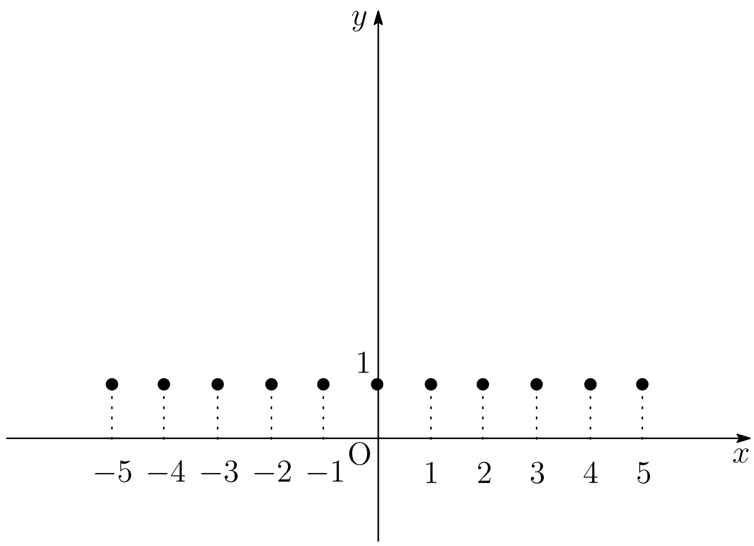
1 変数関数 $y = f(x)$ のグラフを座標平面 (xy 平面) に描いてみよう.

例題 1.3. 定数関数 $y = 1$ のグラフを描け.

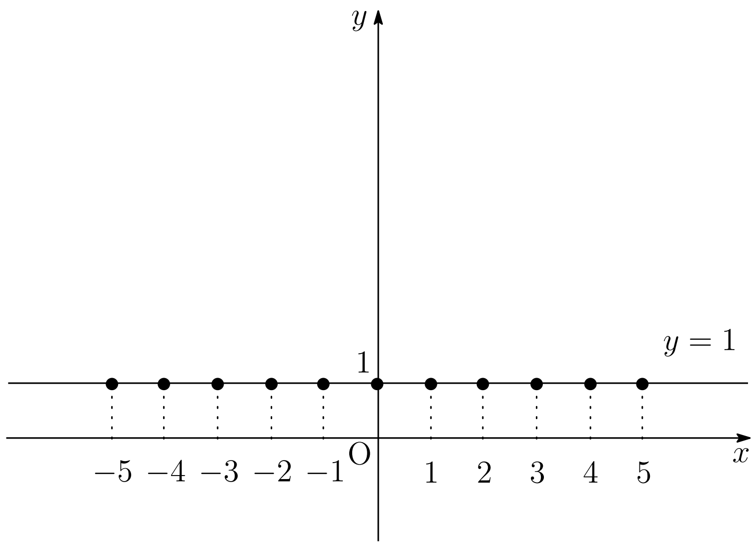
解説. まず x の値と y の値の対応表を作成してみよう.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

上の表に対応する点を座標平面上に描くと次のようになる:

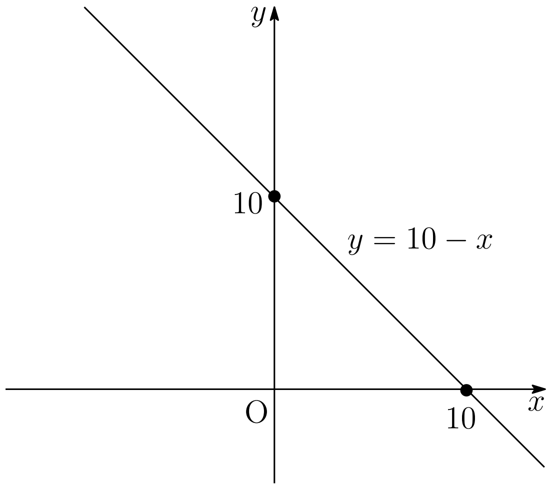


他の x の値も考えれば, 定数関数 $y = 1$ のグラフは上で描いた点を通る次の直線になることがわかる:

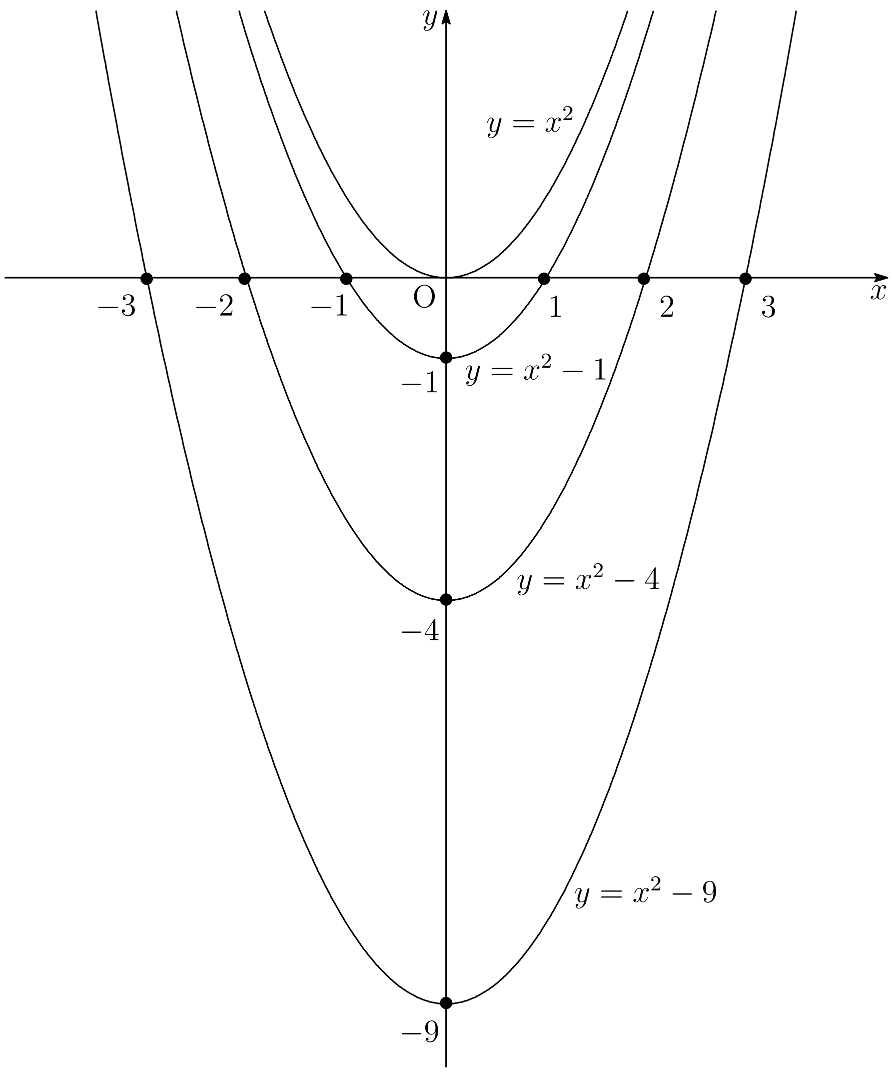


□

例 1.4. 例題 1.3 と同様の手順により, 関数 $y = 10 - x$ のグラフは次のようになることがわかる:



例 1.5. 例題 1.3 と同様の手順により, 関数 $y = x^2$, $y = x^2 - 1$, $y = x^2 - 4$, $y = x^2 - 9$ のグラフを同じ座標平面上に描くと次のようになることがわかる:



第2節. 2変数関数とは

この節では, x, y を変数とする関数 $z = f(x, y)$ を定義してから, そのグラフが一般に曲面になることを確認する.

2.1. 2変数関数の定義と例

2変数関数 $z = f(x, y)$ は次のように定義される.

定義 2.1. ある値 x, y に対して, ただ1つの値 z が対応するような関係があるとき, この関係を**2変数関数**といい, 一般的に

$$z = f(x, y)$$

と表す. このとき, z は x, y の関数であるといい, x, y を変数という. 関数 $z = f(x, y)$ に対して, 変数 x, y のとりうる値の範囲をこの関数の**定義域**といい, また, 定義域に対応する関数の値のとりうる範囲をこの関数の**値域**という.

例 2.1. 長さ60のひもで長方体の箱を作る場合, 幅 x と奥行き y を決めて高さ z を対応させる関数は,

$$z = 15 - x - y$$

と表される. 例1.1と同様に,

$$\begin{aligned}&\text{定義域は } 0 < x + y < 15,\\&\text{値域は } 0 < z < 15\end{aligned}$$

となる.

例 2.2. すべての実数 x, y に対して常に定数10が対応する関数は

$$z = 10$$

と表される. このような関数を**定数関数**という.

問 2.1. z が x, y の関数であるかどうか答えよ.

(1) $z = x^2 + y^2$

(2) $z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ $(x^2 + y^2 \leq 1)$

(3) $z = |x| + |y|$

2.2. 2 変数関数のグラフ

2 変数関数 $z = f(x, y)$ のグラフを座標空間 (xyz 空間) に描いてみよう.

例題 2.2. 定数関数 $z = 1$ ($f(x, y) = 1$) のグラフを描け.

解説.

□

例題 2.3. 関数 $z = 10 - x - y$ のグラフを描け.

解説.

□

例題 2.4. 関数 $z = x^2 + y^2$ のグラフを描け.

解説.

□

問 2.2. 関数 $z = x^2 - y^2$ のグラフを描け.

第 3 節. 多変数関数と現実世界への応用

前節と同様にして, 変数を 3 つ以上にした関数も定義される ([**2**] に詳しい解説がある). この節では, 特に x, y, t を変数とする関数 $z = f(x, y, t)$ のグラフのとらえかたを解説する. またそのような関数の研究が現実世界に応用されていることを紹介する.

3.1. 3 変数関数のグラフ

3.2. 現実世界への応用

参考資料

[1] 宮島 静雄, 微分積分学 I, 1 変数の微分積分, 共立出版, 2003.

[2] 宮島 静雄, 微分積分学 II, 多変数の微分積分, 共立出版, 2003.