

フーリエ解析と物理学

音波のスペクトル分解

物理現象には様々な波が隠されている。

光



電磁波

水面



水面のゆれ

音



空気や水の疎密波

確率の波



ある対象が
ある状態に
なる確率の
揺れ

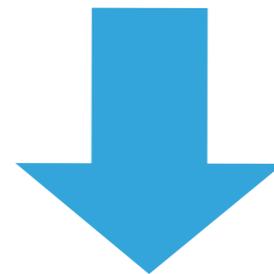
フーリエさんは考えた



Jean Baptiste Joseph Fourier
1768~1830

すべての関数は
三角関数の和で表せる！

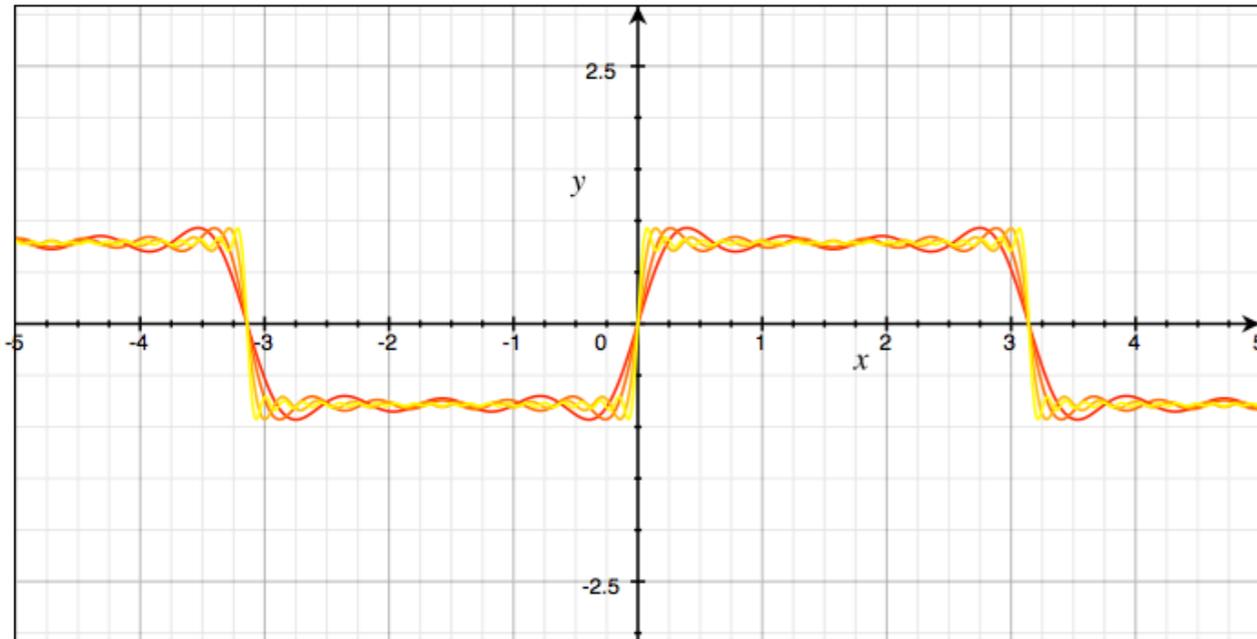
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\}$$



もしそうなら物理現象はすべて波で表現できる！

例えば

$3n < x < 3(n+1) \Rightarrow f(x) = -1^n$ となるような関数を三角関数の和で表すと



$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)x)$$

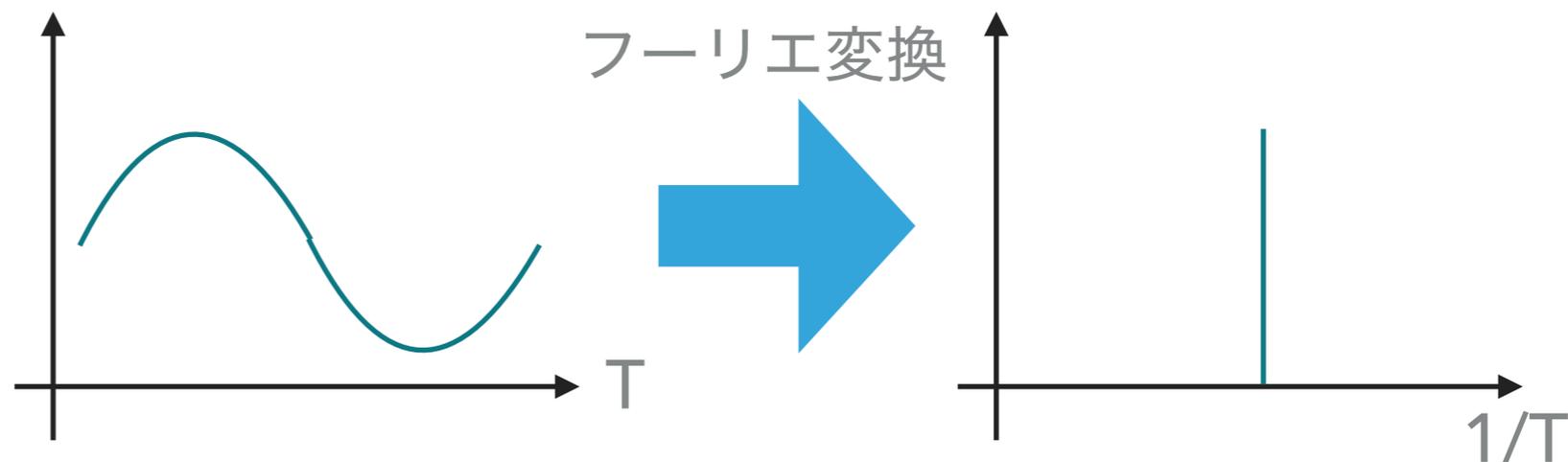
とsin関数の級数の形になる。

じゃあスペクトルって？

spectreの原義:見えるもの、現れるもの、像



僕らの見ている波を
三角関数に掛かる級数で
表してもいいんじゃない？



さっきの例では

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)x)$$

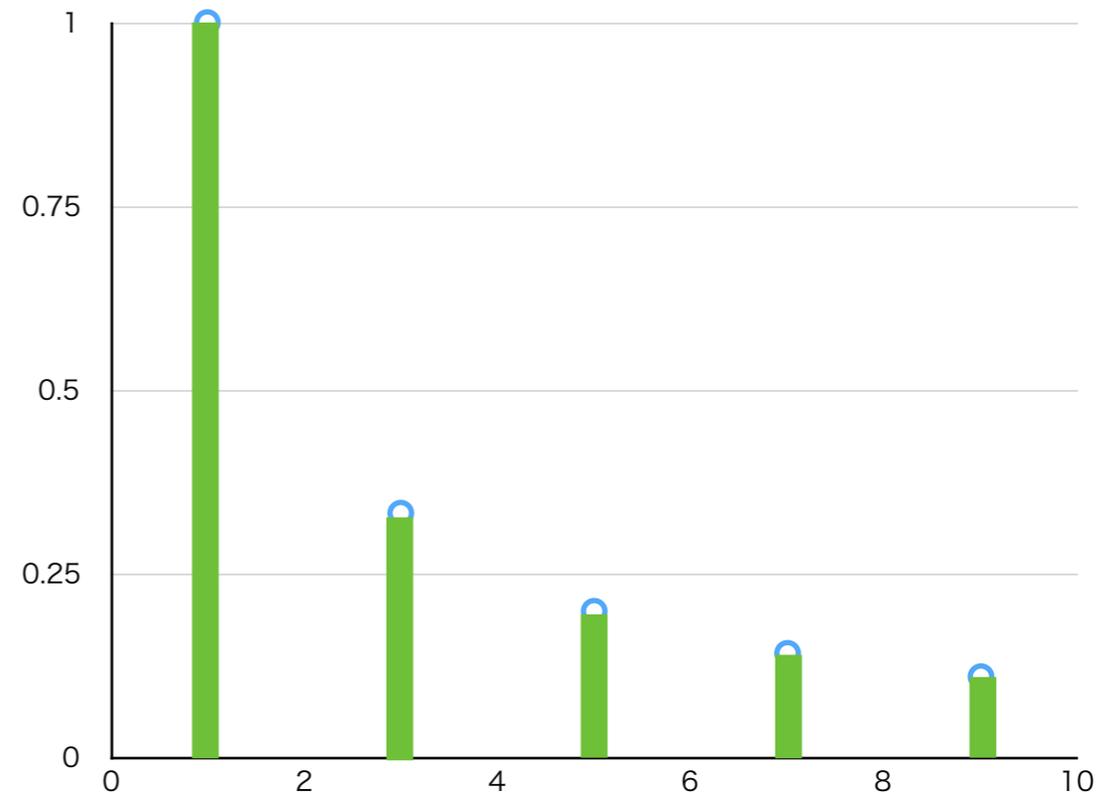
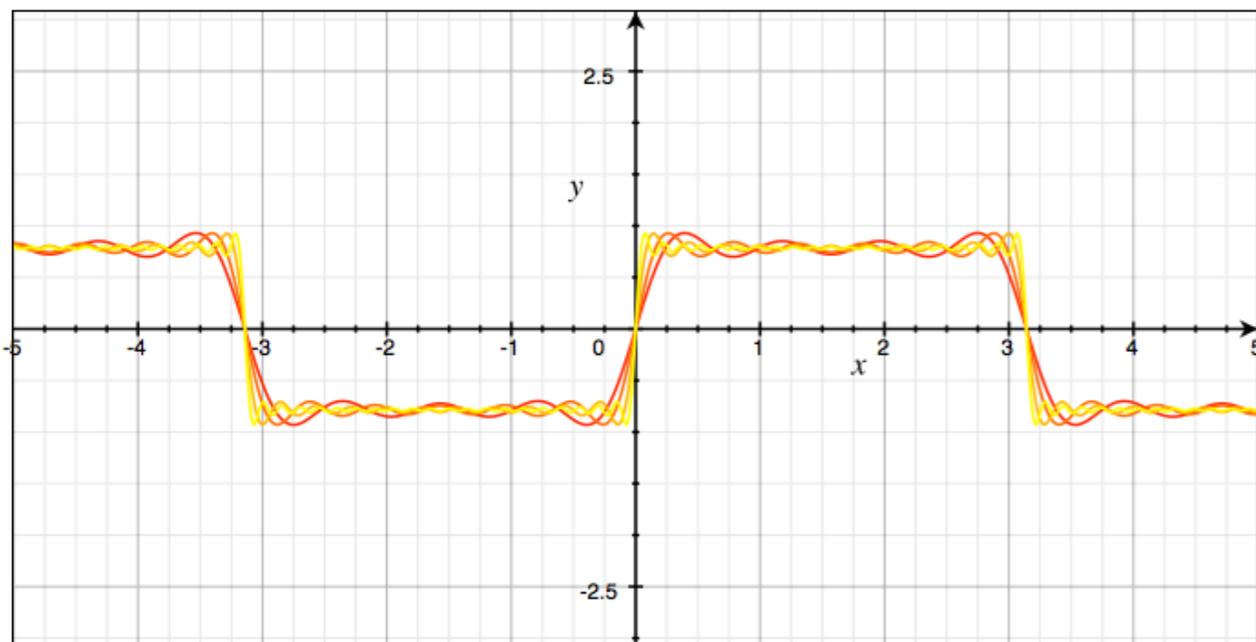
縦軸を $f(x)$

横軸を x



縦軸を a_n

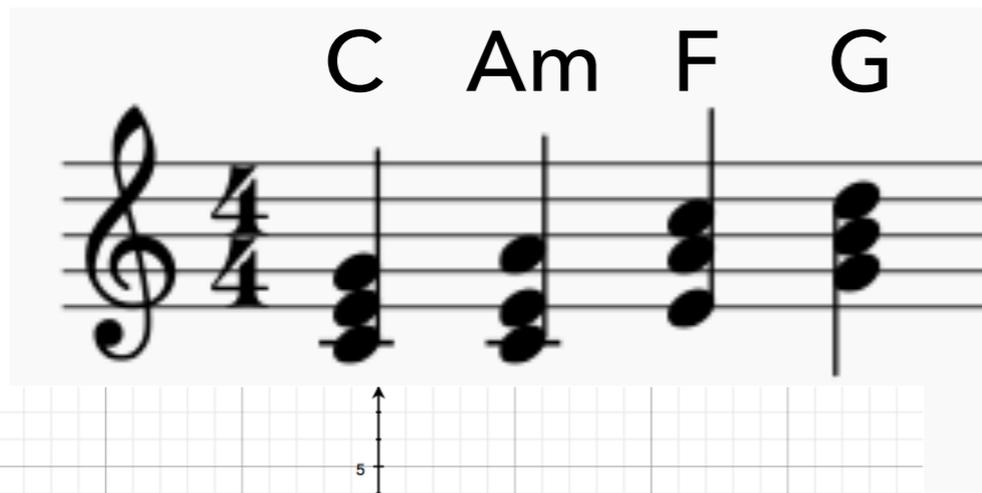
横軸を $2n+1$



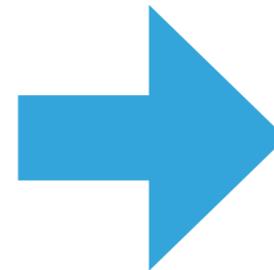
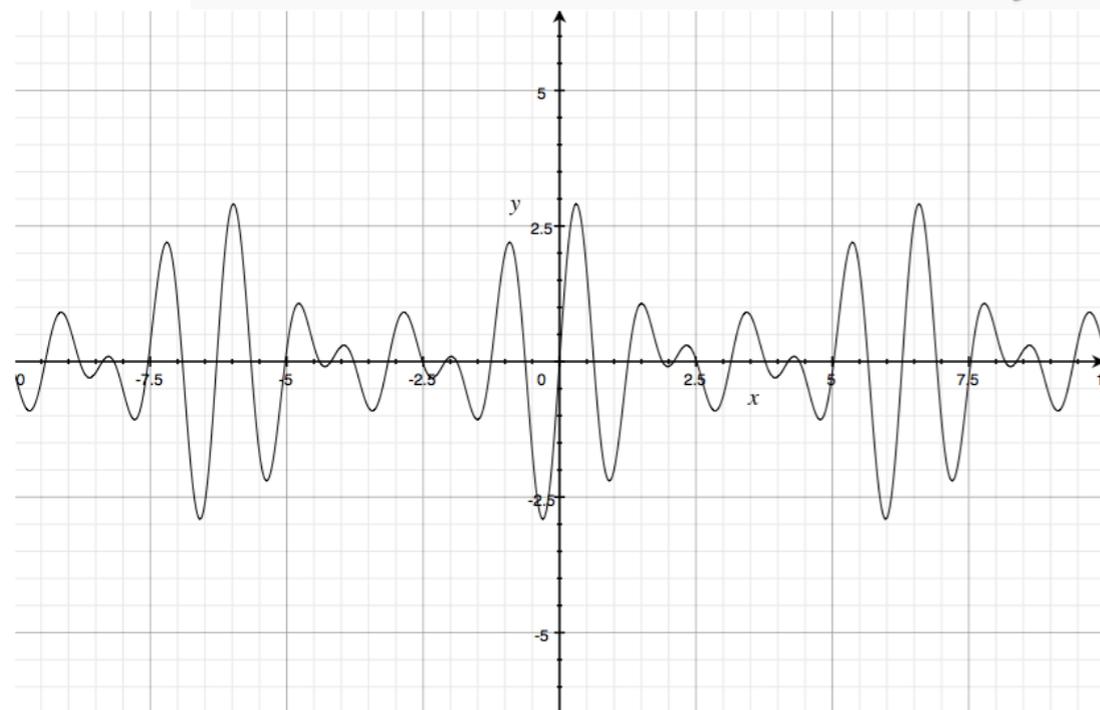
和音を分解してみよう！

和音は主に三つ以上の音が混ざっている。

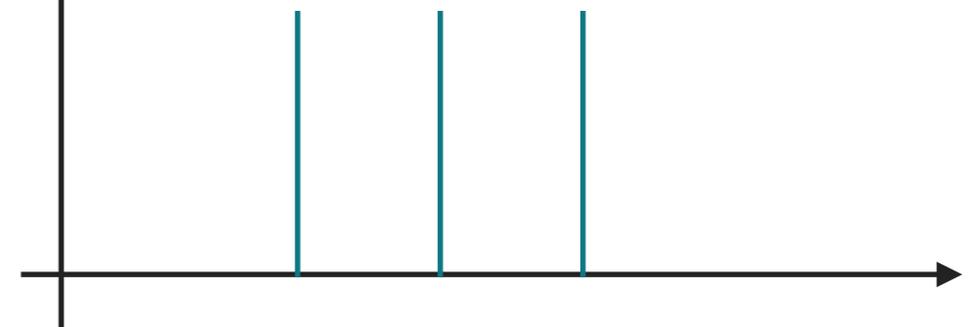
例



三つの音をフーリエ解析により
分解すれば



複雑な波形をスペクトル
ごとに分けられる



参考資料:音階の定義

平均律での音階は以下のように定められている。

ド	ド#	レ	レ#	ミ	ファ	ファ#	ソ	ソ#	ラ	ラ#	シ
1	$2^{1/12}$	$2^{2/12}$	$2^{3/12}$	$2^{4/12}$	$2^{5/12}$	$2^{6/12}$	$2^{7/12}$	$2^{8/12}$	$2^{9/12}$	$2^{10/12}$	$2^{11/12}$
ド	ド#	レ	レ#	ミ							
2	$2^{13/12}$	$2^{14/12}$	$2^{15/12}$	$2^{16/12}$							

参考資料:音階の定義

平均律での音階は以下のように定められている。

ド	ド#	レ	レ#	ミ	ファ	ファ#	ソ	ソ#	ラ	ラ#	シ
1	1.059	1.122	1.189	1.260	1.335	1.414	1.498	1.587	1.682	1.782	1.888
ド	ド#	レ	レ#	ミ							
2	2.119	2.245	2.378	2.520							

PCで解析した和音に含まれる振動数を調べてみよう

	和音 1	和音 2	和音 3	和音 4	和音 5	和音 6
第一音						
第二音						
第三音						

ドの音からの振動数の比をそれぞれ記入してみよう

	和音 1	和音 2	和音 3	和音 4	和音 5	和音 6
第一音						
第二音						
第三音						

周波数の比から構成音を調べてみよう

	和音 1	和音 2	和音 3	和音 4	和音 5	和音 6
第一音						
第二音						
第三音						

明るい音、暗い音の違いは？

明るい音は周波数の比が整数で表せるが、暗い音はずれてしまう

例えば、

音	比
ソ	6
ミ	5
ド	4

音	比
ソ	6
ミ ^b	4.73...
ド	4

試しにド・ミ・ソの和音の比に4を掛けてみよう

ほんとうに整数比といえるだろうか...?

この辺りのお話はふか～い音楽理論に関わる

平均律と純正律

平均律

純正律

半音は常に $2^{1/12}$ 倍で上がる

音によりまちまち

どの和音も整数比から少しずれる

特定の和音はピッタリ整数比

どんな曲でも弾ける

曲により調節が必要



ここが調律師の腕の見せどころ

人の声をフーリエ解析してみよう

人によって違いはでるだろうか？

声の高さでは？

発音による違いは？

テキスト

メモ

メモ