

4/11 第 1 回 スライド Electrically driven optical antennas の前まで

4/18 第 2 回 スライド 最後 まで (相対論 は省略)

4/25 第 3 回

(Intermission 電磁気学の基本法則は学んだ やっと我々は出発点に立てた)

Advertisement

xiii ページ

電気と磁気 エルステッド、アンペール、ファラデーらによって統一
電磁気学と光学 Maxwell によって統一

xii ページ

摩擦力、垂直抗力、化学結合力、衝突の衝撃力 すべて電磁気力

So electrodynamics, a beautifully complete and successful theory, has become a kind of paradigm for physicists: an ideal model that other theories strive to emulate.

other theories: unified field theory, electroweak theory, chromodynamics, superstring theory

xiv ページ

電荷の性質:

1. 正負の電荷 バルク物質では正負の電荷の相殺は途方もない正確さで保たれている
じゃがいもの電荷の中性が $1/10^{10}$ でも破れていたら大爆発するだろう

2. 電荷保存則

電荷の大域的保存と局所的保存

同時性・上限光速 (電荷が消えた情報が光速を超えて伝わる) との関連 相対論と矛盾しないためには局所的保存

大域的な電荷保存 と 局所的な電荷保存 の違い

ニューヨークで消えた電荷がロサンゼルスで現れ、トータルで電荷量が保存 していても特殊相対論と矛盾 異なる慣性系ではこの2つの現象は同時ではない

微分形の連続の式が電荷保存則を正確に表す。電荷は突然生成したり消滅したりせず、電荷の増減があればその周りから電荷の流入・流出があり、連続的に変化している

1A

3. 電荷の量子化 素電荷 e

Chap. 8 Conservation Laws 8.1, 8.2

3つの保存則 連続の方程式(局所的保存)

電荷 Q ρ 電荷密度 J 電流密度

1B

エネルギー U u エネルギー密度 S (ポインティングベクトル=エネルギー流束密度)を導入、

1C

運動量 P p 運動量密度 $-\vec{T}$ (運動量流束密度=-Maxwell の応力テンソル)を導入

1D

~ .

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = -\nabla \cdot (-\vec{T}) \quad (8.31) \quad (8.30) \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_{\text{mech}} + \mathbf{p}_{\text{em}}$$

8.1.1 電荷の保存則 (連続の方程式) p.360 p.345 (8.4) 物理的意味 閉曲面内の電荷の変化に伴い表面を通過する電流

2A

流束 flux とは? $dV/dt = vA$ dV/dt [m³/s] 単位時間当たりの流量=流束 flux (volume flow rate)

A [m²] 面積

v [m/s] 流束密度 flux density = [m³/(s · m²)] 単位時間 · 面積当たりの流量

質量密度 ρ_m [kg/m³] 電荷密度 ρ_c [C/m³] エネルギー密度 ρ_E [J/m³] の例 (単位体積あたりの密度)

$\rho_m v$
2B

$\rho_c v$

$\rho_E v$

電束 electric flux

2C

磁束 magnetic flux

8.1.2 Poynting's theorem

エネルギーの local な保存

$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ の単位の導出 エネルギー流束密度 S [N/C][A/m]=[N · m/(m² · s)]=[J/(m² · s)]

教科書 ポインティングの定理とポインティングベクトル の導出 確認しておくこと

Ex. 8.1 の説明 S が流れ込む

8.2 Momentum 8.2.1 Fig.8.3 パラドックス

荷電粒子のもつ力学的な運動量だけを考えたのでは、作用 · 反作用の法則が成り立たない 電磁場の運動量も考えることで作用 · 反作用の法則が成り立つ

8.2.2 マックスウェルの応力テンソル の導出 確認しておくこと

2つの電荷が作るクーロン場の例 電気力管 張力、圧力

応力テンソルの空間(面)積分で引力、斥力が求まる

2D

(テンソルの要素の簡単な説明) 略

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \vec{T} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial z} & \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial z} & \frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix} \\
 (\nabla \cdot \vec{T})_x &= \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial z} \\
 &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial x} (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial y} (E_y E_x) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial z} (E_z E_x) + (B) \\
 &= \varepsilon_0 (E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} - E_y \frac{\partial E_y}{\partial x} - E_z \frac{\partial E_z}{\partial x}) + \varepsilon_0 (\frac{\partial E_y}{\partial y} E_x + E_y \frac{\partial E_x}{\partial y}) + \varepsilon_0 (\frac{\partial E_z}{\partial z} E_x + E_z \frac{\partial E_x}{\partial z}) + (B) \\
 &= \varepsilon_0 [(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}) E_x + (E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + E_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + E_z \frac{\partial E_x}{\partial z}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2)] + (B) \\
 &= \varepsilon_0 [(\nabla \cdot \mathbf{E}) E_x + (\mathbf{E} \cdot \nabla) E_x - \frac{1}{2} \nabla_x E^2] + (B)
 \end{aligned}$$

Ex. 8.2

$$\begin{aligned}
 T_{xx} da_x &= \varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \right)^2 \sin \theta \cos \theta \cos \phi \times R^2 \sin \theta d\theta d\phi \sin \theta \cos \phi \\
 &= \varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \right)^2 R^2 \sin^3 \theta \cos \theta \cos^2 \phi d\theta d\phi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{yy} da_y &= \varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \right)^2 \sin \theta \cos \theta \sin \phi \times R^2 \sin \theta d\theta d\phi \sin \theta \sin \phi \\
 &= \varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \right)^2 R^2 \sin^3 \theta \cos \theta \sin^2 \phi d\theta d\phi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{zz} da_z &= \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \right)^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \times R^2 \sin \theta d\theta d\phi \cos \theta \\
 &= \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \right)^2 R^2 (\cos^3 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta \cos \theta) d\theta d\phi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{xx} da_x + T_{yy} da_y + T_{zz} da_z &= \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \right)^2 R^2 (\cos^3 \theta \sin \theta + \sin^3 \theta \cos \theta) d\theta d\phi \\
 &= \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \right)^2 \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi
 \end{aligned}$$

S エネルギー流束密度 $-T$ 運動量流束密度
電磁場のエネルギー、運動量も含んだ保存則

S と c で表せる量の単位のまとめ 同じ単位でも複数の物理的意味

3A

8.2.4 電磁場の角運動量

Ex. 8.4 の説明

$$|E| = \frac{1}{2\pi s} \frac{d}{dt} (B\pi R^2) = \frac{1}{2\pi s} \frac{d}{dt} (\mu_0 n I \pi R^2) = \frac{1}{2} \mu_0 n \frac{dI}{dt} \frac{R^2}{s} \quad s > R$$

$$|E| = \frac{1}{2\pi s} \frac{d}{dt} (B\pi s^2) = \frac{1}{2\pi s} \frac{d}{dt} (\mu_0 n I \pi s^2) = \frac{1}{2} \mu_0 n \frac{dI}{dt} s \quad s < R$$

(p.306 p.322 Ex.7.8

無限の円筒だったら？円筒内部に電場はない 場のたくわえる角運動量は？)

Prob. 8.19 の説明 電流さえない（動く電荷がない）のに場が運動量、角運動量

3B

時間・空間の関数として物質中の Maxwell 方程式を書く E, B, ρ, J があらわに t に依存するときも成り立つか？

4A

p.337, 341

J, ρ given 未知数 E, B 6 個 式 8 個

電荷保存則をマックスウェル方程式から導く 電荷保存則はマックスウェル方程式と矛盾しない
マックスウェル方程式は電荷保存則を満たすように作られている

4B

電場のガウスの法則 電場・電荷が時間の関数であるとき成り立つかは自明ではないが...

ガウスの法則は時間にあらわに依存しない (時間微分がない)、初期状態で電荷分布が与えられれば以後の時間ずっと成り立つ (電荷が保存するので、とも見ることができる)

4C

8 つの式があり、6 つの関数を求める 条件式が多すぎないか 電磁場の独立な成分は 6 つか？

電場・磁場のガウスの法則は初期条件ともみなせる

この 2 つの制約条件があることで、電磁場の独立な成分は 4 つ

5/9 第4回

Chap. 9 Electromagnetic Waves

9.1.1 ぴんと張ったひもを伝搬する力学的波の導出

微小変位を仮定 波動方程式を導出 波の速度 v の表式 $f(z,t)=g(z-vt)+h(z+vt)$ の形の解
フーリエ変換より、任意の波は \sin 波の重ね合わせで表せる $k=2\pi/\lambda$ の定義
複素数で表して実部をとる 波動方程式が線形なのでOK

9.1.3 波の伝搬速度が違う境界での反射と透過の一般論

[力学的な波の反射率と透過率、固定端・自由端 波の速度で 電磁波の反射と透過も同じ形で書ける]

(9.24) $\omega = kv$ で ω が不変より

境界条件 (9.26, 27)

境界条件 界面でなめらかに振幅がつながる その理由

振幅反射率、振幅透過率 電磁波の場合も同じ形 (9.83)参照

v の大小で 固定端、自由端 が決まる

9.1.4 偏光 (電磁波の場合) 縦波、横波 3次元で k ベクトル

$E//k$ 縦波 $E \perp k$ 横波

9.2 真空中の電磁波

9.2.1 真空中の Maxwell eqs. より波動方程式 光速度の導出

9.2.2

平面波の解 (位相が一定の波面が平面 $\theta = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{const}$ この平面内で場が一様) を仮定して真空中の

Maxwell eqs. を適用 (平面電磁波は理想化されたもので実際には存在しないが近似式として有用)

平面電磁波の性質を導く (9.44,46,47) (9.49)

$B=E/c$, $B=E/v$ など

9.2.3 電磁波のエネルギーと運動量

光の振動数は非常に大きく、光の周期の変化は検出できず、時間平均値が検出される

E と B が同じ位相であることから、ポインティングベクトル $\propto \cos^2 \omega t$ 時間平均(サイクル平均)をとると $1/2$

$\langle u \rangle$ $\langle S \rangle$ $\langle P \rangle$

電磁波の Intensity 強度 $I \equiv \langle S \rangle = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2$ (9.63) 強度の表式 重要 よく使う

完全吸収体に電磁波が入射したときの輻射圧 $P=I/c$

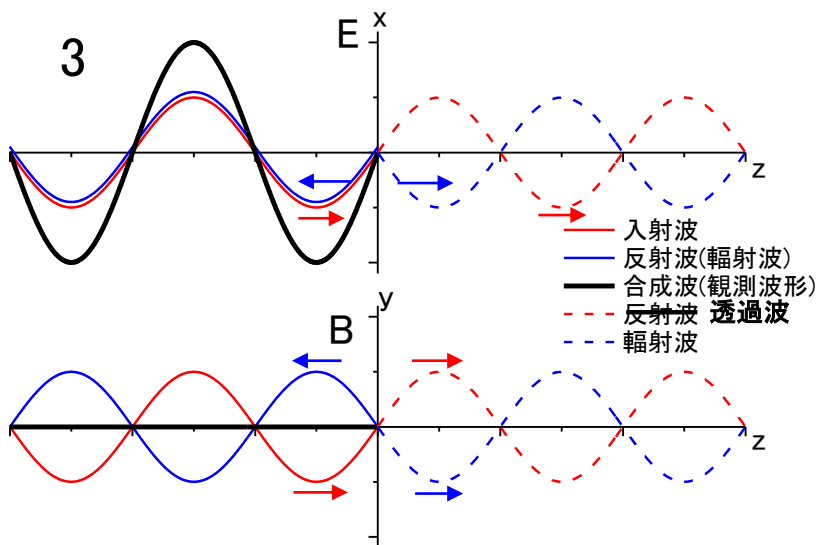
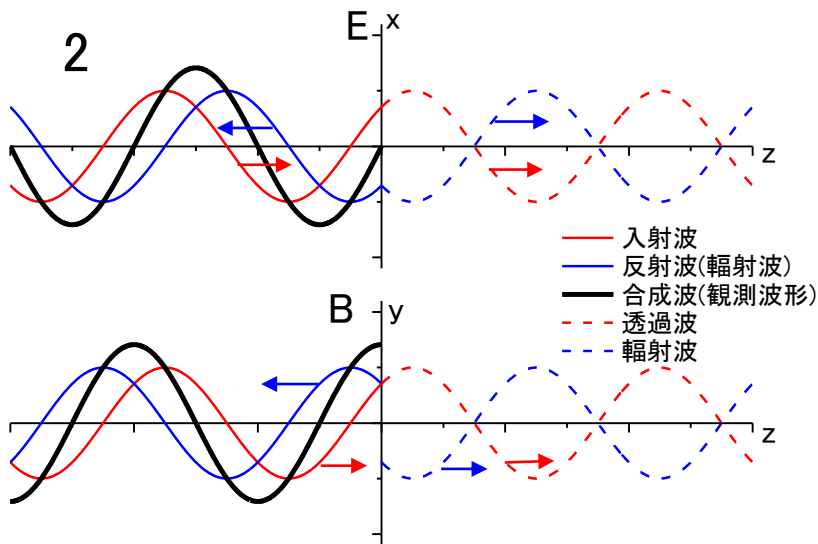
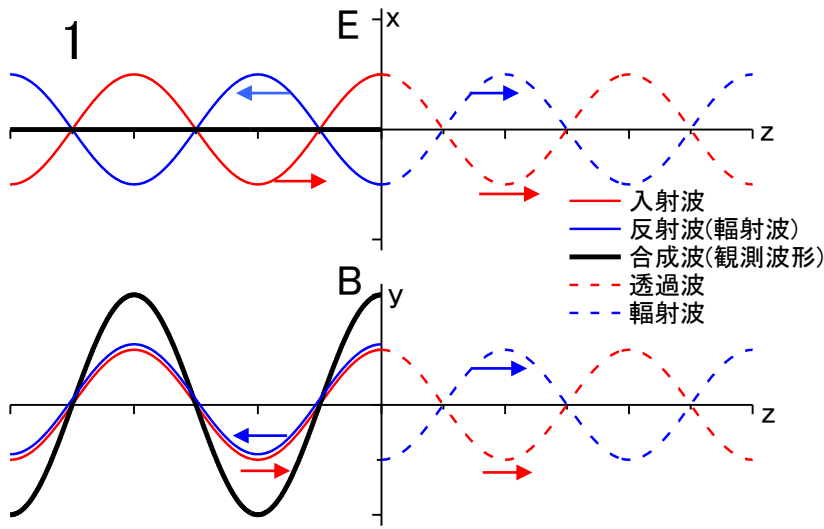
9.3 に行く前に

電磁波の完全導体による反射 電磁波の運動量、圧力を定量的に

(ガイダンススライドで完全導体による電磁波の反射の例 E :固定端 B :自由端 その物理的メカニズムは何か)

完全導体中では 電場、変動磁場 は存在できないことを示す p.417 p.412 (9.120)より導体内 自由電荷 0

5A



6A

界面から両方向に電磁波が放射され、導体内に入射した電場、磁場を完全に打ち消す

反射波が入射波と干渉して界面で定在波

電場 界面で節 磁場 界面で腹

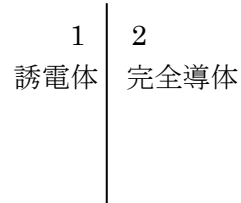
自由空間の電磁波との違い 電場と磁場で 90 度位相がずれる (調和振動子モデル 電磁波の量子化)

このメカニズムは? 定量的に

誘起された表面電流 \mathbf{K} が原因 シート電流 面電流密度

界面の内、外で平行磁場が不連続

p.344 (7.64) p.348 一般的境界条件



電磁波 変動磁場のみを問題にする

完全導体では $\mathbf{E}_2 = 0, \mathbf{B}_2 = 0$ (変動磁場)

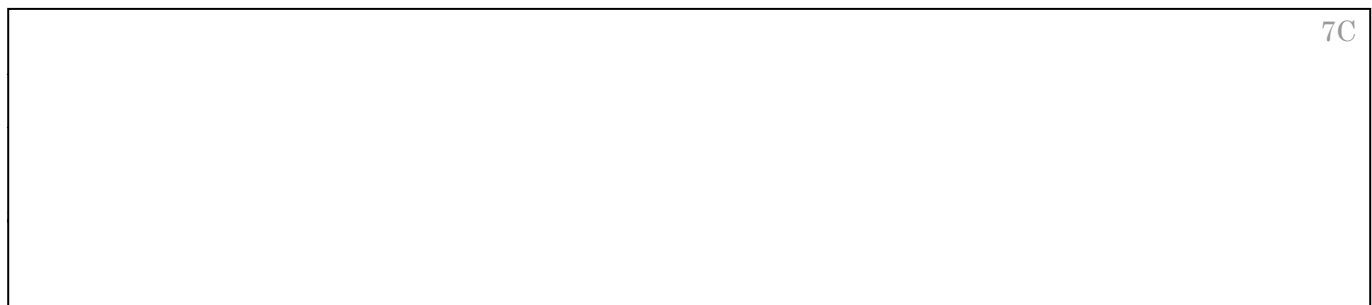
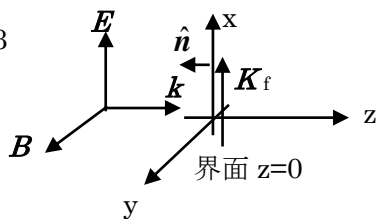


真空から完全導体への平面電磁波の垂直入射

$$E^\perp = 0 \quad \sigma_f = 0$$

$$B^\perp = 0 \quad \mathbf{K}_f \neq 0$$

p.403 Figure 9.13
p.408



p.400 p.405 perfect reflector $P = \frac{2I}{c} = \varepsilon_0 E_0^2$ 光の圧力 $[\frac{C^2}{N \cdot m^2} \frac{N^2}{C^2}] = [\frac{N}{m^2}]$ $[\frac{N}{m^2}] = [\frac{N \cdot m}{m^3}] = [\frac{J}{m^3}]$

K と B によるローレンツ力で光の圧力が定量的に説明できる

p.400 は perfect absorber の場合 perfect reflector の場合は 2 倍

具体的に太陽光の圧力によるソーラーセールの加速の計算
(地上の人間を持ち上げるには？、レーザーを用いると？)略

光の強度 の計算 S のサイクル平均 ガイダンススライド

光子のエネルギーと運動量と、物質のエネルギーと運動量の間関係の違いの相対論的理由

完全導体への斜め入射

① 入射面とEが直交 界面 ($x=0$) で $E^{\parallel} = 0, B^{\perp} = 0, E^{\perp} \neq 0, B^{\parallel} \neq 0$

$$\mathbf{E}_I = \mathbf{E}_{0I} e^{i(\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad \mathbf{E}_R = \mathbf{E}_{0R} e^{i(\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad \mathbf{B}_I = \mathbf{B}_{0I} e^{i(\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad \mathbf{B}_R = \mathbf{B}_{0R} e^{i(\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

$$\mathbf{k}_I = k(-\cos \theta, 0, \sin \theta) = (k_x, 0, k_z)$$

$$\mathbf{k}_R = k(\cos \theta, 0, \sin \theta) = (-k_x, 0, k_z)$$

$$\mathbf{E}_{0I} = E_0(0, -1, 0) \quad \mathbf{E}_{0R} = E_0(0, 1, 0)$$

$$\mathbf{B}_{0I} = B_0(\sin \theta, 0, \cos \theta) \quad \mathbf{B}_{0R} = B_0(-\sin \theta, 0, \cos \theta)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_I + \mathbf{E}_R = \mathbf{E}_{0I} e^{i(\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \mathbf{E}_{0R} e^{i(\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ &= E_0(0, -1, 0) e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} + E_0(0, 1, 0) e^{i(-k_x x + k_z z - \omega t)} \\ &= (0, E_0(-e^{ik_x x} + e^{-ik_x x}), 0) e^{i(k_z z - \omega t)} \\ &= (0, -2iE_0 \sin k_x x e^{i(k_z z - \omega t)}, 0) \end{aligned}$$

$$\text{Re } \mathbf{E} = (0, 2E_0 \sin k_x x \sin(k_z z - \omega t), 0)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{B}_I + \mathbf{B}_R = \mathbf{B}_{0I} e^{i(\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \mathbf{B}_{0R} e^{i(\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ &= B_0(\sin \theta, 0, \cos \theta) e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} + B_0(-\sin \theta, 0, \cos \theta) e^{i(-k_x x + k_z z - \omega t)} \\ &= (B_0 \sin \theta (e^{ik_x x} - e^{-ik_x x}), 0, B_0 \cos \theta (e^{ik_x x} + e^{-ik_x x})) e^{i(k_z z - \omega t)} \\ &= (2iB_0 \sin \theta \sin k_x x, 0, 2B_0 \cos \theta \cos k_x x) e^{i(k_z z - \omega t)} \end{aligned}$$

$$\text{Re } \mathbf{B} = (-2B_0 \sin \theta \sin k_x x \sin(k_z z - \omega t), 0, 2B_0 \cos \theta \cos k_x x \cos(k_z z - \omega t))$$

$$\mathbf{E} = 2E_0 \sin k_x x \sin(k_z z - \omega t) \hat{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{B} = -2B_0 \sin \theta \sin k_x x \sin(k_z z - \omega t) \hat{\mathbf{x}} + 2B_0 \cos \theta \cos k_x x \cos(k_z z - \omega t) \hat{\mathbf{z}}$$

$$\text{at } x=0 \quad E^{\parallel} = E_y = E_z = 0 \quad E^{\perp} = E_x = 0$$

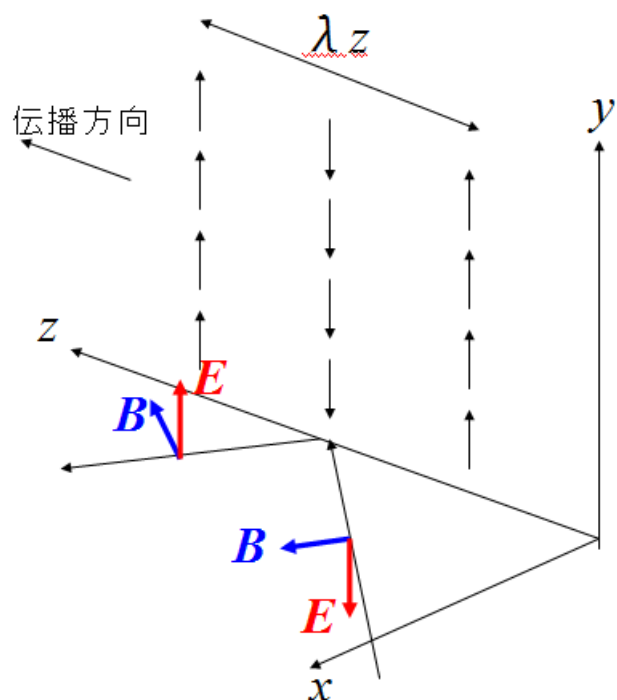
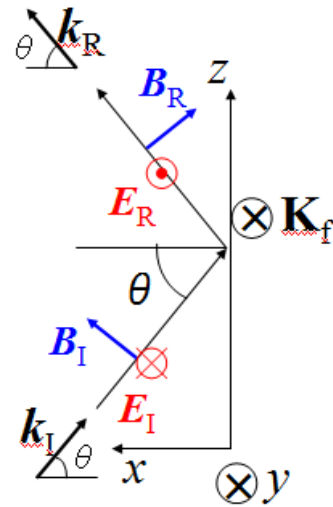
$$B^{\perp} = B_x = 0 \quad B^{\parallel} = B_z = 2B_0 \cos \theta \cos(k_z z - \omega t)$$

$$\sigma_f = 0$$

$$\mathbf{K}_f = -\frac{2}{\mu_0} B_0 \cos \theta \cos(k_z z - \omega t) \hat{\mathbf{y}}$$

$$k_z = k \sin \theta \quad \lambda_z = \frac{\lambda}{\sin \theta}$$

$$k_x = -k \cos \theta \quad \lambda_x = \frac{\lambda}{\cos \theta}$$



②入射面内にE 界面 ($x=0$) で $E^{\parallel}=0, B^{\perp}=0, E^{\perp} \neq 0, B^{\parallel} \neq 0$

$$\mathbf{E}_I = \mathbf{E}_{0I} e^{i(k_I \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad \mathbf{E}_R = \mathbf{E}_{0R} e^{i(k_R \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad \mathbf{B}_I = \mathbf{B}_{0I} e^{i(k_I \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad \mathbf{B}_R = \mathbf{B}_{0R} e^{i(k_R \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

$$\mathbf{k}_I = k(-\cos \theta, 0, \sin \theta) = (k_x, 0, k_z)$$

$$\mathbf{k}_R = k(\cos \theta, 0, \sin \theta) = (-k_x, 0, k_z)$$

$$\mathbf{E}_{0I} = E_0(\sin \theta, 0, \cos \theta) \quad \mathbf{E}_{0R} = E_0(\sin \theta, 0, -\cos \theta)$$

$$\mathbf{B}_{0I} = B_0(0, 1, 0) \quad \mathbf{B}_{0R} = B_0(0, 1, 0)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_I + \mathbf{E}_R = \mathbf{E}_{0I} e^{i(k_I \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \mathbf{E}_{0R} e^{i(k_R \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

$$= E_0(\sin \theta, 0, \cos \theta) e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} + E_0(\sin \theta, 0, -\cos \theta) e^{i(-k_x x + k_z z - \omega t)}$$

$$= (E_0 \sin \theta (e^{ik_x x} + e^{-ik_x x}), 0, E_0 \cos \theta (e^{ik_x x} - e^{-ik_x x})) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

$$= (2E_0 \sin \theta \cos k_x x, 0, 2iE_0 \cos \theta \sin k_x x) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

$$\text{Re } \mathbf{E} = (2E_0 \sin \theta \cos k_x x \cos(k_z z - \omega t), 0, -2E_0 \cos \theta \sin k_x x \sin(k_z z - \omega t))$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_I + \mathbf{B}_R = \mathbf{B}_{0I} e^{i(k_I \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \mathbf{B}_{0R} e^{i(k_R \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

$$= B_0(0, 1, 0) e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} + B_0(0, 1, 0) e^{i(-k_x x + k_z z - \omega t)}$$

$$= (0, B_0(e^{ik_x x} + e^{-ik_x x}), 0) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

$$\text{Re } \mathbf{B} = (0, 2B_0 \cos k_x x \cos(k_z z - \omega t), 0)$$

$$\mathbf{E} = 2E_0 \sin \theta \cos k_x x \cos(k_z z - \omega t) \hat{\mathbf{x}} - 2E_0 \cos \theta \sin k_x x \sin(k_z z - \omega t) \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{B} = 2B_0 \cos k_x x \cos(k_z z - \omega t) \hat{\mathbf{y}}$$

$$\text{at } x=0 \quad E^{\parallel} = E_z = E_y = 0 \quad E^{\perp} = E_x = 2E_0 \sin \theta \cos(k_z z - \omega t)$$

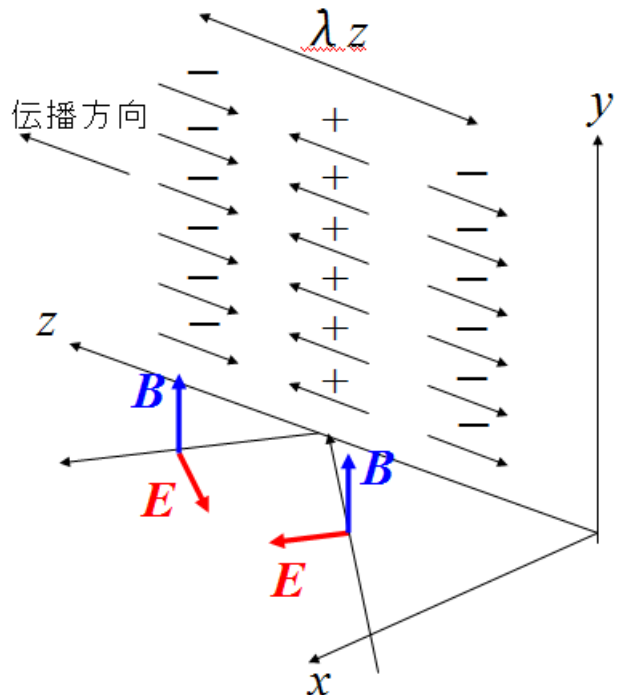
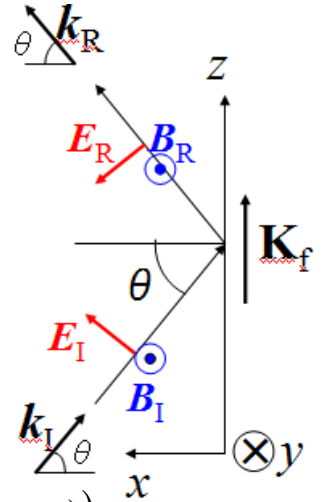
$$B^{\perp} = B_x = 0 \quad B^{\parallel} = B_y = 2B_0 \cos(k_z z - \omega t)$$

$$\sigma_f = 2\varepsilon_0 E_0 \sin \theta \cos(k_z z - \omega t)$$

$$\mathbf{K}_f = \frac{2}{\mu_0} B_0 \cos(k_z z - \omega t) \hat{\mathbf{z}}$$

$$k_z = k \sin \theta \quad \lambda_z = \frac{\lambda}{\sin \theta}$$

$$k_x = -k \cos \theta \quad \lambda_x = \frac{\lambda}{\cos \theta}$$

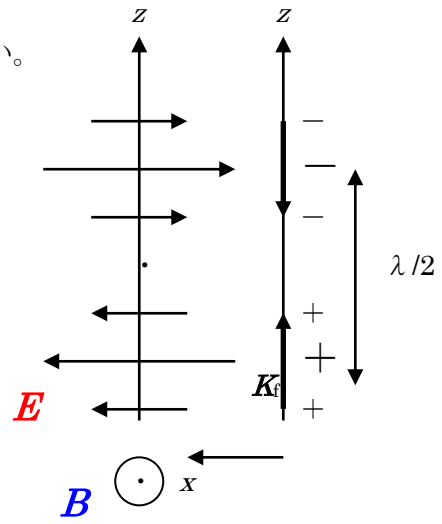


TM波 = E波

p 偏光

①の場合、 $x=0$, $\theta \rightarrow \pi/2$ の導体面に沿った進行波は存在できない。

②の場合、 $x=0$, $\theta \rightarrow \pi/2$ の進行波が存在。



9.3 物質中の光の速度、屈折率、エネルギー密度、エネルギー流束密度（強度）

9.3 medium linear ($D = \epsilon E = \epsilon_0 E + P$, $P = \epsilon_0 \chi E \Leftrightarrow$ nonlinear) と homogeneous (\Leftrightarrow inhomogeneous)の説明

真電荷、真電流なし

比透磁率=1

9.3.2 垂直入射

(9.77)より(9.83) p.390 p.395 (9.32)と等価

コメント： β を特性インピーダンス Z で表す（あとで詳しく触れる）

11A

$v_2 > v_1$ ($n_1 > n_2$) 同位相 自由端の条件

$v_2 < v_1$ ($n_1 < n_2$) 反射の位相が反転 固定端の条件

(9.77)の ii 式は(9.27)と等価

11B

p. 405 p.410 エネルギーの保存が成り立つ（エネルギー流束密度）

振幅反射率・透過率とエネルギー反射率・透過率の区別

注意点 後者は前者の単純な2乗ではない

エネルギー反射率、透過率は入射の向きによらない

ガラス板の場合の具体例 表面、裏面反射で約 92%透過

11C

2つ解があり物理的に意味のあるほうを残す

9.3.3 斜め入射

(9.92) ω が変化しないで、 \mathbf{k} は変化するのなぜか？ 1年物理学序論のスライド「波の振る舞い」から抜粋

(9.93)が常に成り立つ(境界面の任意の場所、時刻で)ことから ω が変化しないことがいえる
 ω が変化しないことから、(9.94)

First law 入射面 (すべての \mathbf{k} が同じ面内)

(9.98) これは実は Snell の法則 ($\mathbf{k} = n\mathbf{k}_0 = n\omega/c = \omega/v$)

Snell の法則(屈折の法則)、反射の法則は、

空間の一様性から来る

z 方向には一様でないので、 k_z は保存されない

1個の光子を入射したら何が起こるか (レーザーを減光して擬似単一光子光源) 略

(Minkowski 運動量と Abraham 運動量の矛盾)

ω が変化する場合 ラマン散乱 鏡が動く場合(マイケルソン干渉計、ドップラー効果、光速度測定)

α 、 β を導入して斜め入射の反射率、透過率

p 偏光 \mathbf{E} が入射面内 parallel (独) 平行な

s 偏光 \mathbf{E} が入射面と垂直 senkrecht (独) 垂直の

波の反射の物理的メカニズム、インピーダンスと反射の関係

ある振動数 f の外力により媒質を振動させたとき、どのような波長(波数)、速度で伝搬する波が発生するかは媒質の性質によって決まる。媒質の密度 ρ や復元力(張力 T や圧力 P)によって波の速さ v が異なる

り、波長 λ も $\lambda = v/f$ で与えられ媒質の性質に依存する。では、性質の異なる媒質 1,2 が接していて、媒質 1 を伝搬する波が媒質 2 に入射したら何が起こるだろうか？このとき、境界面で振動の変位と発生する応力が滑らかにつながる（あるいは変位の連続性とエネルギー流束の保存）という物理的な条件を要請すると、媒質 2 に透過する波だけでなく、媒質 1 に反射されて入射波と逆向きに進む反射波が発生することが導かれる。このために、まず波のエネルギーの表式を導こう。波は、場所を固定してその時間変動を見ていれば媒質の単振動であり、その単振動のエネルギーが波の速度で伝搬していくものと見なせる。従って、質量 m 、固有振動数 $\omega = \sqrt{k/m}$ の単振動 $y = A \cos \omega t$ のエネルギーは位置エネルギーと運動エネルギーの和から

$$\frac{1}{2}k(A \cos \omega t)^2 + \frac{1}{2}m(-\omega A \sin \omega t)^2 = \frac{1}{2}(k + m\omega^2)A^2 = m\omega^2 A^2$$

となるので、波動が単位時間、単位面積あたりに運ぶエネルギー $\left[\frac{\text{J}}{\text{s} \cdot \text{m}^2} \right]$ は(単位体積あたりのエネルギー×速

度) $\left[\frac{\text{J}}{\text{m}^3} \frac{\text{m}}{\text{s}} \right] = \rho \omega^2 A^2 v$ に比例することがわかる。ここで ρ は密度、 v は波の速さである。媒質 1 での入射

波 $A \sin(\omega t - k_1 x)$ 、反射波 $B \sin(\omega t + k_1 x)$ 、媒質 2 での透過波 $C \sin(\omega t - k_2 x)$ とすると、

(1)媒質 1 と 2 の境界面 $x=0$ での変位の連続 $A + B = C$

(2)エネルギー保存(入射エネルギー=反射エネルギー+透過エネルギー)

$$\rho_1 \omega^2 A^2 v_1 = \rho_1 \omega^2 B^2 v_1 + \rho_2 \omega^2 C^2 v_2$$

(1),(2)を連立させて解くと、

$$B = \frac{\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2}{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2} A \quad C = \frac{2\rho_1 v_1}{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2} A$$

となる。反射波の変位 B は $\rho_1 v_1 < \rho_2 v_2$ のとき入射波 A に対して反転(π ずれる)し(固定端反射)、 $\rho_1 v_1 > \rho_2 v_2$ のときは同位相になる(自由端反射)ことがわかる。水平に張ったひもに発生する波の速さは張力 T 、線密度 ρ として $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ であることから、媒質 1 から 2 へ入射するとき、固定端反射の条件は $\sqrt{\rho_1 T_1} < \sqrt{\rho_2 T_2}$ 、

自由端反射の条件は $\sqrt{\rho_1 T_1} > \sqrt{\rho_2 T_2}$ とも書け、この極端な場合が復元力無制限、復元力ゼロの場合である。

自由端反射の条件は $\sqrt{\rho_1 T_1} > \sqrt{\rho_2 T_2}$ とも書け、この極端な場合が復元力無制限、復元力ゼロの場合である。

ρv の次元は $\left[\frac{\text{kg m}}{\text{m s}} \right] = \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}} \right]$ であり、媒質の変位の速度 $v \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$ をかけると $\left[\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] = [\text{N}]$ となり、復元力を与える。

電流 I (電荷の速度に比例)に抵抗 R (=インピーダンス)をかけると電圧 V (電荷に及ぼす力を与える電場に比例)になることになぞらえて ρv を力学的インピーダンスという。音波における等価な物理量を音響インピーダンスといい、媒質中の音速と媒質の密度との積で表され、媒質の速度をかけると圧力となる量となる。これらはもともと電気信号の伝送での反射率・透過率を規定する特性インピーダンスの概念が拡張されたものである(後で詳しく)。インピーダンスが等しいとき、反射波がなくなり、エネルギーを 100%伝送できる。これをインピーダンス整合という。空気の音響インピーダンスは約 $4.3 \times 10^2 \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}^3$ で、水の音響インピーダンスは約 $1.5 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}^3$ なので、空気中から水に入射する音波にとって水面は固定端となり、そのほとんどが反射されることがわかる。ちなみに、光波(電磁波)の境界面での反射率・

透過率を決めるのも媒質の特性インピーダンスであり、媒質の誘電率 ϵ 、透磁率 μ として $\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}[\Omega]$ で与え

られる。透磁率が 2 つの媒質で違いがないとき、 $1/\sqrt{\epsilon} \propto 1/n$ と媒質の屈折率 n の違いにのみ依存するようになる。

特性インピーダンスによる反射の理解

真空の特性インピーダンス 真空中の電磁波の E と H の比

電磁波の振動磁場が変位電流に由来し、それと電場との比を表す

$$Z_0 = \frac{E_0[\text{V/m}]}{H_0[\text{A/m}]} = \frac{E_0}{B_0/\mu_0} = \frac{E_0}{(E_0/c)/\mu_0} = \mu_0 c = \mu_0 \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.7\Omega$$

ϵ, μ の媒質との境界面での垂直入射による振幅反射率 r

媒質の特性インピーダンス $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ $Z_1 \rightarrow Z_2$

$$r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} - \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} + \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}} = \frac{1 - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}}{1 + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}} = \frac{1 - \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1}}}{1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1}}} = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \quad \text{p.404 p.409 (9.82)式}$$

ななめ入射

E が入射面内にあるとき (p偏光)

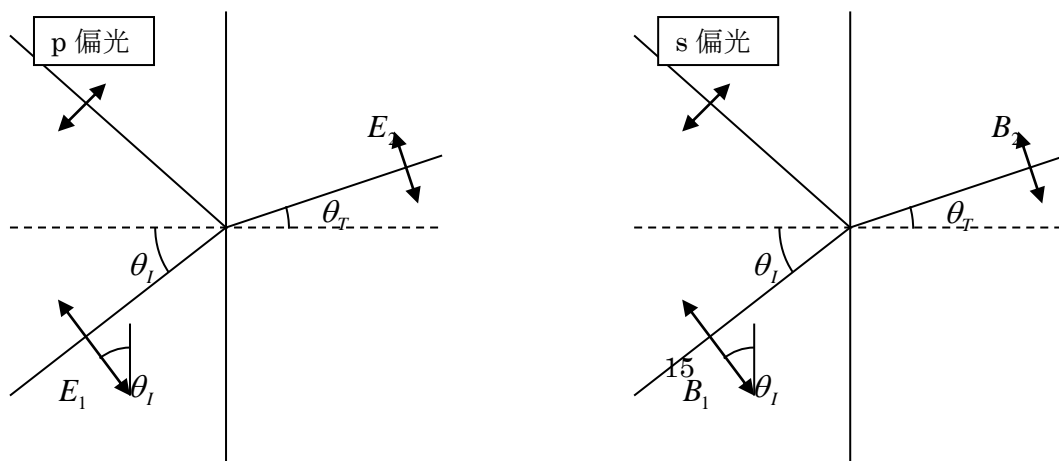
$$Z_1 = \frac{E_1 \cos \theta_i}{H_1} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \cos \theta_i \quad Z_2 = \frac{E_2 \cos \theta_t}{H_2} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \cos \theta_t$$

$$r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \cos \theta_t - \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \cos \theta_i}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \cos \theta_t + \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \cos \theta_i} = \frac{\frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}}{\frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}} = \frac{\alpha - \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1}}}{\alpha + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1}}} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \quad \text{p.409 (9.109)式 p.414}$$

B が入射面内にあるとき (s偏光)

$$Z_1 = \frac{E_1}{H_1 \cos \theta_i} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \frac{1}{\cos \theta_i} \quad Z_2 = \frac{E_2}{H_2 \cos \theta_t} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \frac{1}{\cos \theta_t}$$

$$r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \frac{1}{\cos \theta_t} - \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \frac{1}{\cos \theta_i}}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \frac{1}{\cos \theta_t} + \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \frac{1}{\cos \theta_i}} = \frac{1 - \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}}{1 + \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}} = \frac{1 - \alpha \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1}}}{1 + \alpha \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1}}} = \frac{1 - \alpha \beta}{1 + \alpha \beta} \quad \text{Problem 9.17 p.416}$$



$$(9.105) \quad (9.102) \text{より} \quad \beta = \frac{\varepsilon_2 \sin \theta_T}{\varepsilon_1 \sin \theta_I} = \frac{\varepsilon_2 n_1}{\varepsilon_1 n_2} = \frac{\varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}{\varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_1}}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_2}} = \frac{\mu_1 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}{\mu_2 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}} = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1} \quad (9.106)$$

$$\beta = \frac{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_1}}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_2}} = \frac{\sqrt{\mu_1 / \varepsilon_1}}{\sqrt{\mu_2 / \varepsilon_2}} = \frac{Z_1}{Z_2}$$

p 偏光を考える

入射面：入射波数ベクトルと界面の法線ベクトルで張られる面

p 偏光 \mathbf{E} が入射面内 s 偏光 \mathbf{E} が入射面と垂直

(9.109)と s 偏光の場合の式

(9.109)よりわかること

- 1) 入射角 0 で垂直入射(9.82)と等しい
- 2) 入射角 90 度に近づくと反射率が 100%に近づくこと 濡れた路面、廊下、鏡のような湖面
- 3) $\alpha = \beta$ ブリュースター角 入射角 (=反射角) と屈折角の和が 90 度 を導く s 偏光では存在しない

$\alpha = \beta$ のときの θ_I を $\theta_I \equiv \theta_B$ (Brewster's angle)と定義

$$(9.108) \text{より} \quad \alpha = \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_B} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_T}}{\cos \theta_B} = \frac{\sqrt{1 - (n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_B}}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_B}} = \beta$$

$$\alpha^2 = \beta^2 \text{より} \quad \frac{1 - (n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_B}{1 - \sin^2 \theta_B} = \beta^2 \quad \sin^2 \theta_B = \frac{1 - \beta^2}{(n_1/n_2)^2 - \beta^2} \quad (9.111)$$

$$\mu_1 = \mu_2 \text{のとき} \quad \beta = n_2/n_1 \text{なので} \quad \sin^2 \theta_B = \frac{1 - \beta^2}{1/\beta^2 - \beta^2} = \frac{\beta^2(1 - \beta^2)}{1 - \beta^4} = \frac{\beta^2}{1 + \beta^2}$$

$$\tan^2 \theta_B = \frac{\sin^2 \theta_B}{\cos^2 \theta_B} = \frac{\sin^2 \theta_B}{1 - \sin^2 \theta_B} = \frac{\beta^2}{1 - \frac{\beta^2}{1 + \beta^2}} = \beta^2 = (n_2/n_1)^2 \quad (9.112)$$

Brewster 角の起源の直観的説明 Brewster 角の物理的意味 屈折波と反射波が直交 $\mathbf{k}_T \perp \mathbf{k}_R$

$$\begin{cases} \tan \theta_I = \tan \theta_B = n_2/n_1 \\ n_1 \sin \theta_I = n_2 \sin \theta_T \end{cases}$$

$$\tan \theta_I = \frac{\sin \theta_I}{\sin \theta_T} \quad \cos \theta_I = \sin \theta_T \quad \therefore \theta_I + \theta_T = \pi/2 \quad \theta_I = \theta_R \text{より} \quad \theta_R + \theta_T = \pi/2$$

15A

(9.116) 界面に垂直な方向のエネルギー保存
 (界面に平行な方向はどうなっているだろうか? 課題)

Problem 9.17 s 偏光 の場合の答

$$\tilde{E}_{0R} = \left(\frac{1-\alpha\beta}{1+\alpha\beta} \right) \tilde{E}_{0I} \quad \tilde{E}_{0T} = \left(\frac{2}{1+\alpha\beta} \right) \tilde{E}_{0I} \quad \theta_t = 0 (\alpha=1) \text{で垂直入射の場合と一致}$$

5/23 第6回

ガイダンス 完全導体の反射、表皮効果 のスライド

相対論で考える電磁放射におけるエネルギーと運動量の保存

自由空間、真空中の等速電子が速度を減じて光速 c の光子を放射できるか できない
 導波管内の電磁波 の分散関係との類似

9.4 導体中の電磁波

(9.120) 導体中で自由電荷が存在できないこと

k が複素数

(9.125)より

$$k^2 - \kappa^2 = \mu\epsilon\omega^2 \rightarrow (9.126)$$

$$2k\kappa = \mu\sigma\omega$$

(9.126) 両極限での表式

$$\sigma \ll \epsilon\omega \quad \kappa = \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2} - 1 \right]} \approx \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2 - 1 \right]} = \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right) = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

$$\sigma \gg \epsilon\omega \quad \kappa \approx \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2} \left[\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right]} = \sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}} \quad k = \kappa$$

真空の誘電率 8.854×10^{-12} F/m 真空の透磁率 $4\pi \times 10^{-7}$ H/m

表皮効果 表皮の厚さ $d \equiv \frac{1}{\kappa} = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}}$

Cu の表皮厚さ 波長 $10 \mu\text{m}$ (30 THz) の光 $\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{10^{-5} \text{ m}} = 3 \times 10^{13} / \text{s}$

$$\sigma \approx 6.0 \times 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \gg \epsilon\omega \approx 8.9 \times 10^{-12} \times 2\pi \times 3 \times 10^{13} \text{ を満たす}$$

$$d = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}} = \sqrt{\frac{2}{4\pi \times 10^{-7} \times 2\pi \times 3 \times 10^{13} \times 6 \times 10^7}} \cong 0.0012 \times 10^{-5} \text{ m} = 12 \text{ nm} \quad \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi c \mu_0 \sigma}} \text{ より } \frac{d}{\lambda} \propto \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

いろいろな周波数での銅の表皮厚さ

30 THz (10 μm)	12 nm
300 GHz (1 mm)	120 nm
3 GHz (100 mm)	1.2 μm
1 GHz (300 mm)	2.1 μm
10 MHz (30 m)	21 μm

銀 $\sigma = 6.3 \times 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$

銅 $\sigma = 5.96 \times 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$

(9.127) 両極限での表式

\mathbf{E} と \mathbf{B} の位相がずれること

(9.130)→(9.131)

$$(iii) \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad E_x = \tilde{E}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{y} \frac{\partial E_x}{\partial z} - \hat{z} \frac{\partial E_x}{\partial y} = \hat{y}(-\kappa + ik)E_x = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = i\omega \mathbf{B}$$

$$i\omega \mathbf{B} = \hat{y}(-\kappa + ik)E_x \quad \mathbf{B} = \frac{(-\kappa + ik)}{i\omega} E_x \hat{y} = \frac{-i(-\kappa + ik)}{\omega} E_x \hat{y} = \frac{(i\kappa + k)}{\omega} E_x \hat{y} = \frac{\tilde{k}}{\omega} E_x \hat{y} \quad (9.131)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \frac{\tilde{k}}{\omega} \tilde{E}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)} \hat{y} \quad (9.131)$$

$$\tilde{B}_0 = \frac{\tilde{k}}{\omega} \tilde{E}_0$$

$$B_0 e^{i\delta_B} = \frac{K e^{i\phi}}{\omega} E_0 e^{i\delta_E} \quad (9.135)$$

$$Z = \frac{\tilde{E}}{\tilde{H}} = \frac{E_0 e^{i\delta_E}}{B_0 e^{i\delta_B}} = \frac{\mu \omega}{K e^{i\phi}} = \frac{\mu \omega}{\tilde{k}}$$

$$\sigma \gg \varepsilon \omega \quad (9.133) \text{より } K = \omega \sqrt{\frac{\mu \sigma}{\omega}} = \sqrt{\mu \sigma \omega} \quad k = \kappa \text{より } \tilde{k} = \sqrt{\mu \sigma \omega} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$Z = \frac{\mu \omega}{\sqrt{\mu \sigma \omega} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)} = \sqrt{\frac{\mu \omega}{\sigma}} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\mu \omega}{2\sigma}} (1 - i) \quad \sigma \rightarrow \infty \quad Z \rightarrow 0$$

β を複素数とすることで有限の σ の効果が入っている (表面電流の効果が入っている) ???

しかし 垂直入射で境界面での磁場の接続を考えると

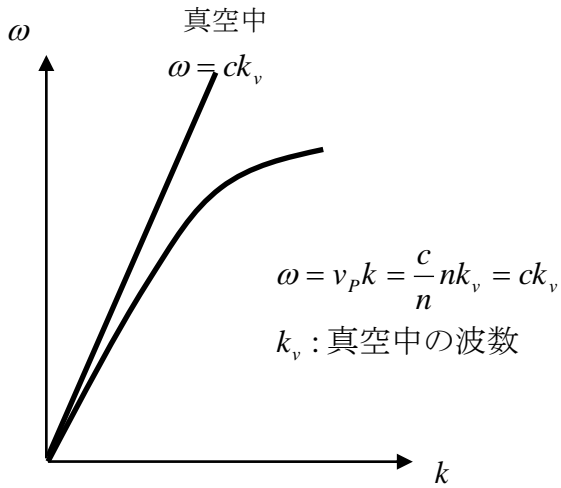
$$\left\{ \begin{array}{l} (9.144) \quad \frac{1}{\mu_1} (\tilde{\mathbf{B}}_{0I} + \tilde{\mathbf{B}}_{0R}) - \frac{1}{\mu_2} \tilde{\mathbf{B}}_{0T} = 0 \\ (9.46) \quad \tilde{\mathbf{B}}_0 = \frac{k}{\omega} (\hat{\mathbf{z}} \times \tilde{\mathbf{E}}_0) \quad \tilde{\mathbf{E}}_0 = \frac{\omega}{k} (\tilde{\mathbf{B}}_0 \times \hat{\mathbf{z}}) \quad (9.143) \text{より} \quad \frac{\omega}{k_1} \tilde{\mathbf{B}}_{0I} - \frac{\omega}{k_1} \tilde{\mathbf{B}}_{0R} = \frac{\omega}{k_2} \tilde{\mathbf{B}}_{0T} \end{array} \right.$$

$$\mu_1 = \mu_2 \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{B}}_{0I} + \tilde{\mathbf{B}}_{0R} = \tilde{\mathbf{B}}_{0T} \\ \tilde{k}_2 (\tilde{\mathbf{B}}_{0I} - \tilde{\mathbf{B}}_{0R}) = k_1 \tilde{\mathbf{B}}_{0T} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{B}}_{0R} = \frac{\tilde{k}_2 - k_1}{\tilde{k}_2 + k_1} \tilde{\mathbf{B}}_{0I} \\ \tilde{\mathbf{B}}_{0T} = \frac{2\tilde{k}_2}{\tilde{k}_2 + k_1} \tilde{\mathbf{B}}_{0I} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{B}}_{0R} = \frac{\tilde{\beta} - 1}{\tilde{\beta} + 1} \tilde{\mathbf{B}}_{0I} \\ \tilde{\mathbf{B}}_{0T} = \frac{2\tilde{\beta}}{\tilde{\beta} + 1} \tilde{\mathbf{B}}_{0I} \end{array} \right. \quad \sigma \rightarrow \infty \quad (9.126) \text{より} \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{B}}_{0R} \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}_{0I} \\ \tilde{\mathbf{B}}_{0T} \rightarrow 2\tilde{\mathbf{B}}_{0I} \end{array} \right. \quad \text{おかしい} (\mathbf{K}_f = 0 \text{としているから})$$

(9.148) と形式的には矛盾しないが $|\tilde{\mathbf{B}}_{0T}| = \left| \frac{\tilde{k}_2}{\omega} \right| |\tilde{\mathbf{E}}_{0T}|$ で $\left| \frac{\tilde{k}_2}{\omega} \right| \rightarrow \infty$ $|\tilde{\mathbf{E}}_{0T}| \rightarrow 0$ $|\tilde{\mathbf{B}}_{0T}| \rightarrow \text{有限値}$

9.4.3 なぜ屈折率の波長依存性?



群速度

$$E(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk E(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} + \text{C.C.}$$

$$k = k_0 + \Delta k \quad \omega(k) = \omega(k_0) + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} \Delta k + \dots$$

$$E(x,t) \cong \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta k E(k_0 + \Delta k) e^{i[(k_0 + \Delta k)x - \omega(k_0)t - \frac{d\omega}{dk}(k_0)\Delta kt]} + \text{C.C.}$$

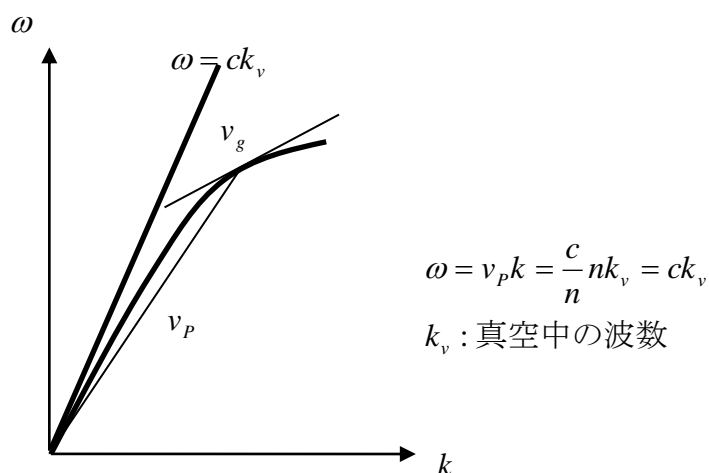
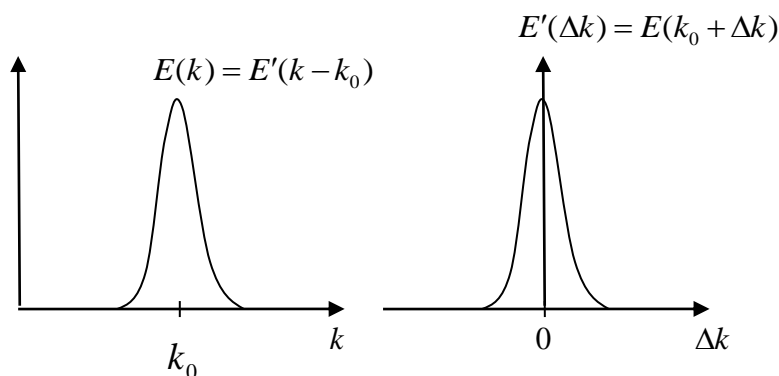
$$= e^{i[k_0x - \omega(k_0)t]} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta k E(k_0 + \Delta k) e^{i\Delta k [x - \frac{d\omega}{dk}(k_0)t]} + \text{C.C.}$$

$$= e^{i[k_0x - \omega(k_0)t]} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta k E'(\Delta k) e^{i\Delta k [x - \frac{d\omega}{dk}(k_0)t]} + \text{C.C.}$$

$$= E'(x - v_g t) e^{i[k_0x - \omega(k_0)t]} + \text{C.C.}$$

$$E(k_0 + \Delta k) = E'(\Delta k) \quad E'(k) \xrightarrow{FT} E'(x)$$

$$\text{群速度 } v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} \quad \text{位相速度 } v_p = \frac{\omega(k_0)}{k_0}$$

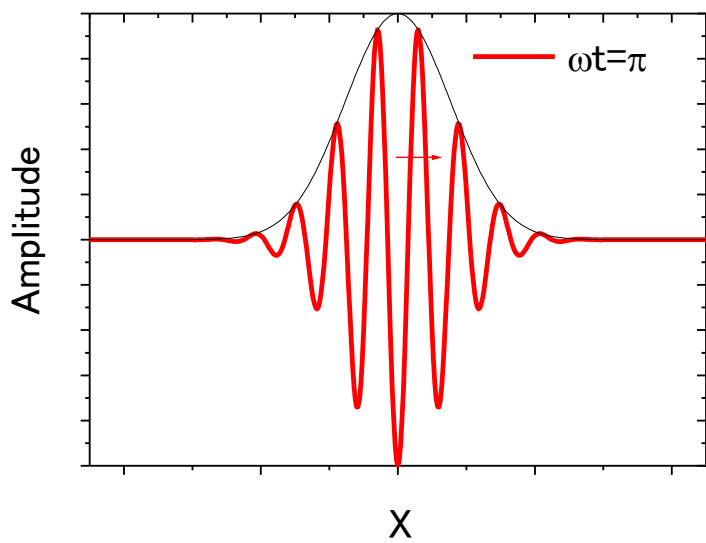
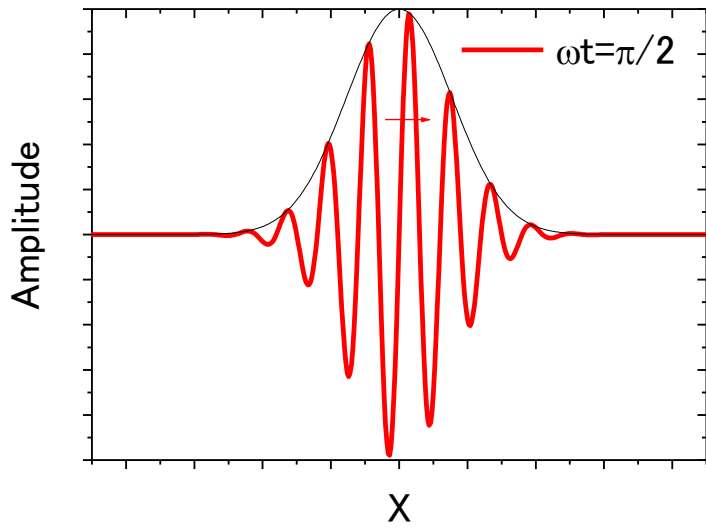
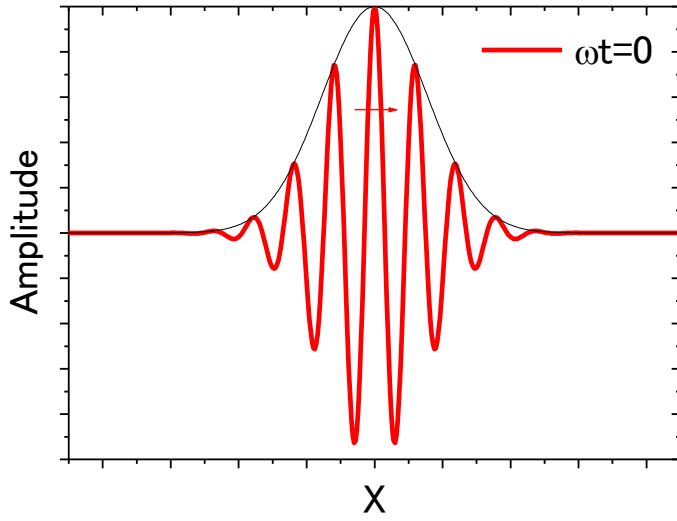


群速度 $d\omega/dk$ の直観的説明 群速度 0 とはどういうことか

波束を構成するすべての波長成分について、 Δt の間の位相の変化が等しいと波束のピークは動かない

群速度 $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ の理由

(1) 群速度 0, 位相速度 $\neq 0$ とは？

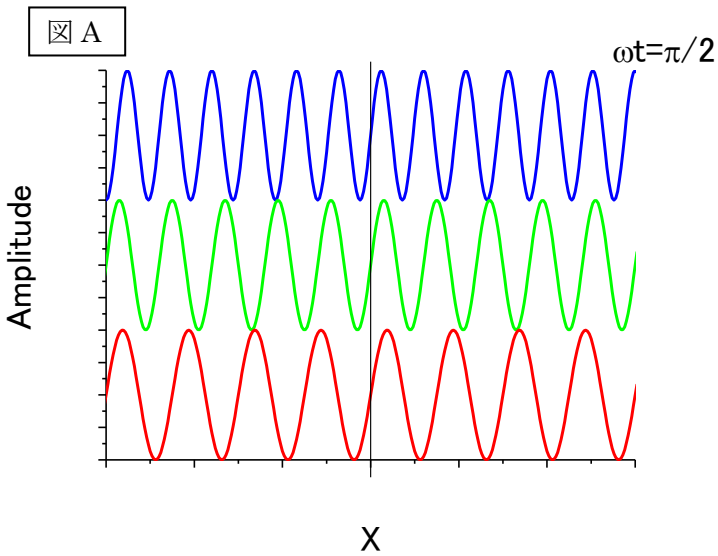
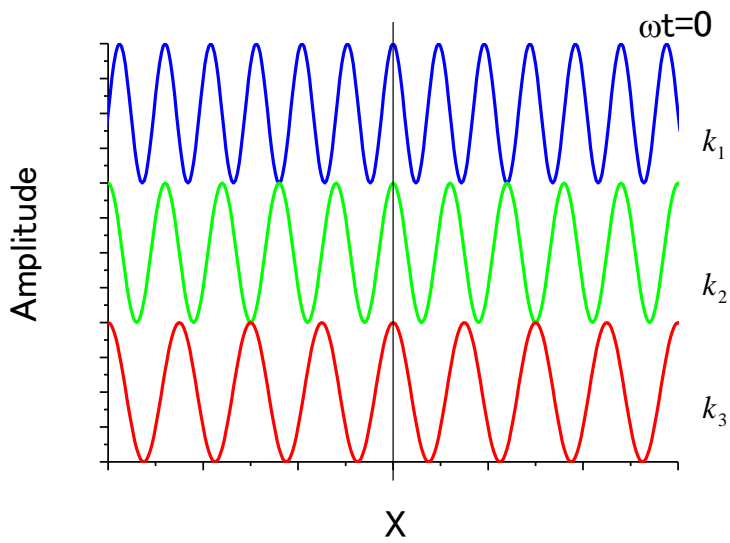
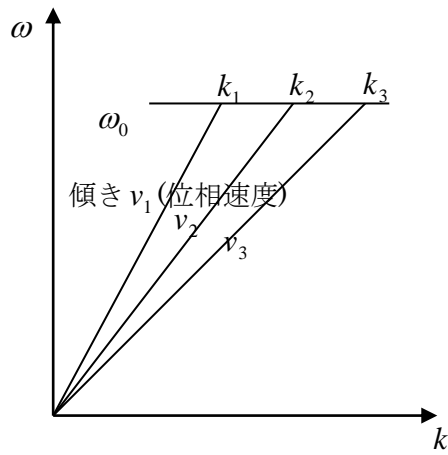


波束を構成するすべての波長成分について、 Δt の間の位相の変化 $\Delta\phi$ が等しい

$$\Delta\phi_1 = 2\pi \frac{v_1 \Delta t}{\lambda_1} = k_1 v_1 \Delta t \quad \Delta\phi_2 = 2\pi \frac{v_2 \Delta t}{\lambda_2} = k_2 v_2 \Delta t \quad \Delta\phi_3 = 2\pi \frac{v_3 \Delta t}{\lambda_3} = k_3 v_3 \Delta t \quad \Delta\phi_1 = \Delta\phi_2 = \Delta\phi_3$$

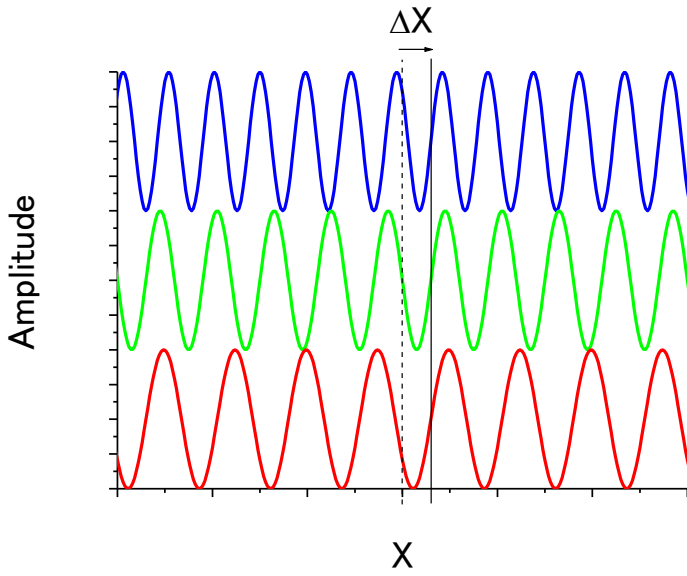
$$\frac{\Delta\phi_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\phi_2}{\Delta t} = \frac{\Delta\phi_3}{\Delta t} = \omega_0 = k_1 v_1 = k_2 v_2 = k_3 v_3$$

このとき、確かに $\frac{d\omega}{dk} = 0$



(2) 群速度≠0 のとき

静止している人から見て、 Δt で波束（包絡線）のピークが ΔX 進む このとき群速度 $V_g = \frac{\Delta X}{\Delta t}$



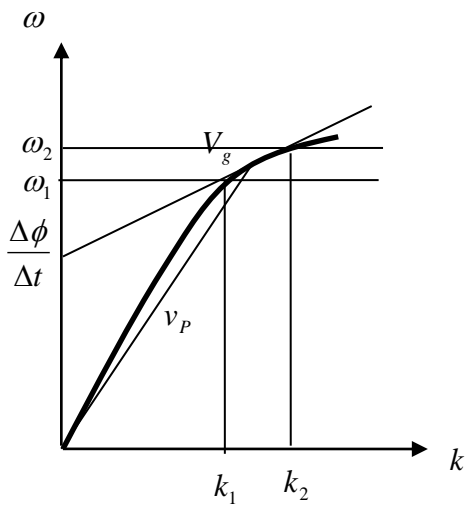
$$\omega_1 \Delta t = \Delta \phi + 2\pi \frac{\Delta X}{\lambda_1} \quad \omega_2 \Delta t = \Delta \phi + 2\pi \frac{\Delta X}{\lambda_2}$$

$$\omega_1 = \frac{\Delta \phi}{\Delta t} + k_1 \frac{\Delta X}{\Delta t} \quad \omega_2 = \frac{\Delta \phi}{\Delta t} + k_2 \frac{\Delta X}{\Delta t}$$

$$\omega_1 = \frac{\Delta \phi}{\Delta t} + k_1 V_g \quad \omega_2 = \frac{\Delta \phi}{\Delta t} + k_2 V_g$$

$$\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1 = (k_2 - k_1) V_g$$

$$\frac{\Delta \omega}{\Delta k} = V_g$$



V_g で動いている人から見ると、波束のピークは動かない。図Aのように見える。したがって

$$\Delta\phi_1' = 2\pi \frac{v_1' \Delta t}{\lambda_1} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Delta\phi_2' = 2\pi \frac{v_2' \Delta t}{\lambda_2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Delta\phi_3' = 2\pi \frac{v_3' \Delta t}{\lambda_3} = \frac{\pi}{2}$$

v_1', v_2', v_3' : V_g で動いている人から見た位相速度、つまり

$$\Delta\phi_1' = 2\pi \frac{(v_1 - V_g) \Delta t}{\lambda_1} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Delta\phi_2' = 2\pi \frac{(v_2 - V_g) \Delta t}{\lambda_2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Delta\phi_3' = 2\pi \frac{(v_3 - V_g) \Delta t}{\lambda_3} = \frac{\pi}{2}$$

静止している人から見て、

$$\Delta\phi_1 = 2\pi \frac{v_1 \Delta t}{\lambda_1} = \frac{\pi}{2} + 2\pi \frac{V_g \Delta t}{\lambda_1} = \frac{\pi}{2} + k_1 V_g \Delta t$$

$$\Delta\phi_2 = 2\pi \frac{v_2 \Delta t}{\lambda_2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi \frac{V_g \Delta t}{\lambda_2} = \frac{\pi}{2} + k_2 V_g \Delta t$$

$$\Delta\phi_3 = 2\pi \frac{v_3 \Delta t}{\lambda_3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi \frac{V_g \Delta t}{\lambda_3} = \frac{\pi}{2} + k_3 V_g \Delta t$$

静止している人から見て、

$$\omega_1 = \frac{\Delta\phi_1}{\Delta t} = k_1 v_1 = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\Delta t} + k_1 V_g$$

$$\omega_2 = \frac{\Delta\phi_2}{\Delta t} = k_2 v_2 = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\Delta t} + k_2 V_g$$

$$\omega_3 = \frac{\Delta\phi_3}{\Delta t} = k_3 v_3 = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\Delta t} + k_3 V_g$$

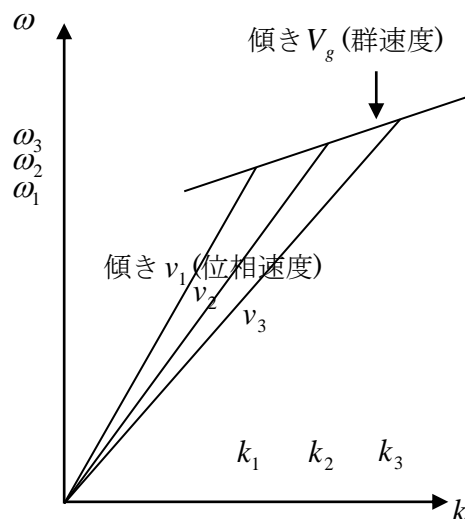
$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = (k_2 - k_1) V_g = \Delta k V_g$$

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta k} = V_g$$

右の図のように波束を構成する電磁波のすべての成分にわたって傾き $\frac{d\omega}{dk}$ が一定の場合、波束は包絡線の波形を維持したまま伝播する。

しかし一般の媒質では $\frac{d\omega}{dk}$ は一定ではない。これを群速度分散といい、媒質中で波束の形はくずれていく。

周波数帯域幅で決まる最小のパルス幅を持つパルス（フーリエ変換限界パルスという）は、透明媒質を伝搬するうちにパルス幅が広がっていく。



物質の光学応答の力学振動子モデル
より (比) 誘電率 (9.161)

これより n と α χ の実部と虚部から

ガラスの吸収は紫外

正常分散と異常分散 ($n < 1$ で位相速度 $v > c$ でも OK)

n の近似式

9.5.1 導波路に入る前に 縦電場、縦磁場が存在できる直観的理由 TE 波と TM 波 完全導体への斜め入射 pp. 10-11
 z 方向に伝播して z 方向の磁場、電場をもつ 波長が真空中より長くなる (位相速度が c より大)

9.5.1 導波路

(9.181)の導出まで手順を説明 境界条件(9.175) p.348 (7.64)式から

$$(9.177) \text{ (iii)} \quad \nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \text{ より (9.179)(i)(ii)(iii)}$$

$$(9.177) \text{ (iv)} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \text{ より (9.179)(iv)(v)(vi)}$$

(9.180)の導出

$$(9.179)(v) \text{ より } E_x = i \frac{c^2}{\omega} \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - ikB_y \right)$$

$$(9.179)(iii) \text{ より } = i \frac{c^2}{\omega} \left[\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{ik}{i\omega} (ikE_x - \frac{\partial E_z}{\partial x}) \right] = i \frac{c^2}{\omega} \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{k}{\omega} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \frac{c^2 k^2}{\omega^2} E_x$$

$$\left(1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \right) E_x = i \frac{c^2}{\omega^2} \left(\omega \frac{\partial B_z}{\partial y} + k \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \quad (9.180)(i)$$

(9.181)の導出

$$(9.180)(i) \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left(k \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial y} + \omega \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} \right)$$

$$(9.180)(ii) \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left(k \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial y} - \omega \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} \right)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left(-\omega \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} - \omega \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} \right) = i\omega B_z \quad \because (9.179)(i) \text{ より}$$

$$\frac{1}{(\omega/c)^2 - k^2} \left(-\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} \right) = B_z \quad (9.181)(ii)$$

Or

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + ikB_z = 0$$

$$(9.180)(iii) \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left(k \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} - \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial y} \right)$$

$$(9.180)(iv) \quad \frac{\partial B_y}{\partial y} = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left(k \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} + \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial y} \right)$$

$$-ikB_z = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left(k \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} \right)$$

$$-B_z = \frac{1}{(\omega/c)^2 - k^2} \left(\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} \right) \quad (9.181)(ii)$$

空洞導波路では TEM 波が存在しないことの証明 -----

xy 平面内の 2 次元ベクトル $\mathbf{E} = (E_x(x, y), E_y(x, y))$ について

$\nabla \times \mathbf{E} = 0$ より、 $\mathbf{E} = \nabla \phi(x, y)$ を満たす $\phi(x, y)$ が存在

$$\left(\begin{array}{l} \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y} \Leftrightarrow E_x dx + E_y dy \text{ がある関数 } \phi \text{ の全微分} \\ E_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, E_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \text{ と表せて、} d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = E_x dx + E_y dy \end{array} \right)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \text{なので} \quad \nabla \cdot \nabla \phi = \Delta \phi = 0$$

$$\text{境界条件 } E'' = 0 \text{ より } E'' = \nabla \phi \cdot \mathbf{t} = \nabla \phi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d}{ds} \phi = 0 \quad (\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} \text{ は境界線 } \mathbf{r}(s) \text{ の単位接線ベクトル})$$

$$\therefore \text{境界線上は等ポテンシャル} \quad \phi(\mathbf{r}(s)) = \text{const}$$

教科書 p.115 Sec.3.1.3 より、ラプラス方程式 $\Delta \phi = 0$ を満たす ϕ は極大も極小も持たないことから、境界線内すべてで

$$\phi(x, y) = \text{const} \quad \phi = \text{const} \quad \text{より} \quad E_x = E_y = 0 \quad \text{したがって} \quad B_x = B_y = 0$$

5/30 第 7 回

9.5.2 矩形導波路の TE 波

$$E_z = 0 \quad B_z(x, y) = X(x)Y(y) \text{ の形を仮定し、境界条件 } B^\perp = 0 \text{ のもとで}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\omega/c)^2 - k^2 \right) B_z = 0 \quad (9.181)(ii) \quad \text{を解く}$$

p.409 p.433 Fig.9.24

$$\text{境界条件} \quad B_x = 0 \quad \text{at } x=0, x=a$$

$$(9.180iii) \quad B_x = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left(k \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \quad \text{で}$$

$$E_z = 0 \quad B_x = 0 \quad \text{より} \quad B_x = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left(k \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) = 0 \quad \frac{\partial B_z}{\partial x} = 0 \quad \frac{dX(x)}{dx} = 0$$

$$\frac{dX(x)}{dx} = Ak_x \cos(k_x x) - Bk_x \sin(k_x x) = 0 \quad \text{at } x=0, x=a \quad \text{より} \quad A=0, \quad k_x = m\pi/a \quad (9.184)$$

$$\text{したがって、} \quad X(x) \propto \cos(m\pi x/a)$$

(9.182ii) の一般解は

$$Y(y) = C \sin(k_y y) + D \cos(k_y y)$$

$$\text{境界条件} \quad B_y = 0 \quad \text{at } y=0, y=b$$

$$(9.180iv) \quad B_y = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left(k \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \quad \text{で}$$

$$E_z = 0 \quad B_y = 0 \quad \text{より} \quad B_y = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left(k \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) = 0 \quad \frac{\partial B_z}{\partial y} = 0 \quad \frac{dY(y)}{dy} = 0$$

$$\frac{dY(y)}{dy} = Ck_y \cos(k_y y) - Dk_y \sin(k_y y) = 0 \quad \text{at } y=0, x=b \quad \text{より} \quad C=0, \quad k_y = n\pi/b \quad (9.185)$$

したがって、 $Y(y) \propto \cos(n\pi y/b)$

 $m=n=0$ のとき(9.186)より $B_z = B_0$ (const) $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int (d\mathbf{B}/dt) \cdot d\mathbf{a}$ 導波路の z 軸に垂直な断面 内壁に沿う線積

分路をとると $E_{//} = 0$ より $0 = -\int (d\mathbf{B}/dt) \cdot d\mathbf{a} = (dB_z/dt)ab = i\omega B_0 e^{i(kz-\omega t)} ab \quad \therefore B_z = B_0 = 0$

$E_z = 0$ (TE 波)だったので これは空洞導波路では存在できない TEM 波 よって m か n のどちらかは 0 でない

 遮断周波数 cutoff frequency ω_{mn}

TE₁₀ モードの電磁波の式、断面図、見取り図 導波管 TE₁₀ モード の詳しい図

$$m=1, n=0 \quad \text{より} \quad B_z = B_0 \cos(\pi x/a) \exp[i(kz - \omega t)]$$

$E_z = 0, B_z = B_z(x, z)$ なので

$$(9.180) \quad (i) \text{より } E_x = 0 \quad (iv) \text{より } B_y = 0 \quad (ii) \text{より } E_y \propto \frac{\partial B_z}{\partial x} \propto \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \quad (iii) \text{より } B_x \propto \frac{\partial B_z}{\partial x} \propto \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

もっと詳しく

$$m=1, n=0 \text{ より (9.187) } k^2 = (\omega/c)^2 - \pi^2/a^2$$

$$B_z = B_0 \cos(\pi x/a) \exp[i(kz - \omega t)]$$

実部をとって $B_z = B_0 \cos(\pi x/a) \cos(kz - \omega t)$

$$(9.180) \quad (i) \text{より } E_x = 0 \quad (iv) \text{より } B_y = 0$$

$$(ii) \text{より} \quad E_y = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left(-\omega \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \\ = \frac{i}{\pi^2/a^2} \left[\omega \frac{\pi}{a} B_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \right] \exp[i(kz - \omega t)] = i \left[\frac{a}{\pi} \omega B_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \right] [\cos(kz - \omega t) + i \sin(kz - \omega t)]$$

実部をとって $E_y = -\frac{a}{\pi} \omega B_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin(kz - \omega t)$

$$(iii) \text{より} \quad B_x = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left(k \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \\ = \frac{i}{\pi^2/a^2} \left[-k \frac{\pi}{a} B_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \right] \exp[i(kz - \omega t)] = i \left[-\frac{a}{\pi} k B_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \right] [\cos(kz - \omega t) + i \sin(kz - \omega t)]$$

実部をとって $B_x = \frac{a}{\pi} k B_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin(kz - \omega t)$

分散曲線 $k = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_{mn}^2}$ $\omega^2 = \omega_{mn}^2 + c^2 k^2$

遮断周波数のところで群速度 0, 位相速度 ∞

光子が静止質量を持つことに相当 相対論 $E^2 = m^2 c^4 + c^2 p^2$ 分散曲線と比較 (ガイダンススライド)

電磁波が特定の角度で斜めに入射して x,y 方向に定在波 z 方向に伝播

群速度 0, 位相速度 ∞ は $\theta = 90^\circ$ の場合に相当 位相速度 $> c$ は相対論と矛盾しないこと 群速度 $< c$

(遮断周波数の物理的意味 $\lambda = 2a$ ファインマンの直観的説明)

9.5.3 同軸ケーブル (同軸伝送線)

横波電磁波 (TEM 波) が伝搬できると仮定し

$E_z = 0, B_z = 0$ を(9.179)に代入

$$(ii) \quad -kE_y = \omega B_x$$

$$(iii) \quad kE_x = \omega B_y$$

$$(v) \quad kB_y = \frac{\omega}{c^2} E_x$$

$$(vi) \quad kB_x = -\frac{\omega}{c^2} E_y$$

$$(iii) \times (v) \text{より} \quad k^2 E_x B_y = \frac{\omega^2}{c^2} E_x B_y \quad k = \omega/c \quad (9.193) \quad \text{遮断周波数がない}$$

$$(iii) \text{より} \quad cB_y = E_x \quad (ii) \text{より} \quad cB_x = -E_y \quad (9.194) \quad \rightarrow \quad E_x B_x + E_y B_y = 0 \quad \therefore \mathbf{E} \perp \mathbf{B}$$

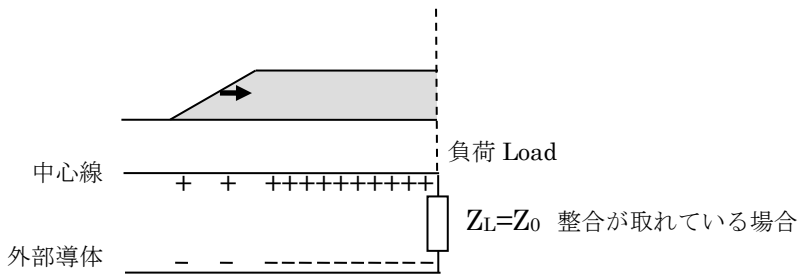
$$(9.179) (i) \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \quad (iv) \quad \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \text{より} \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \text{より} \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0 \\ (9.179) (i) \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \quad (iv) \quad \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = 0 \end{array} \right.$$

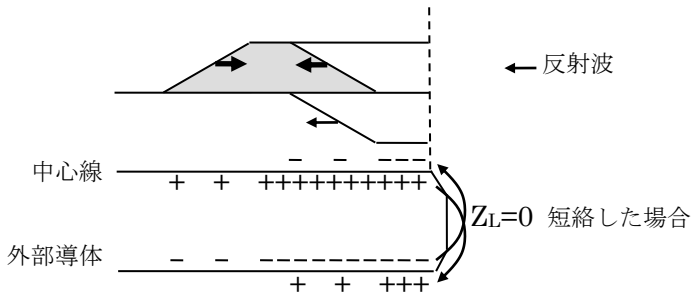
静電気、静磁気の方程式 解が存在する (9.196)

パルス伝搬波形 のときの空間分布 電場、磁場、電荷、電流

無限に長い同軸ケーブルを伝搬する場合の波形

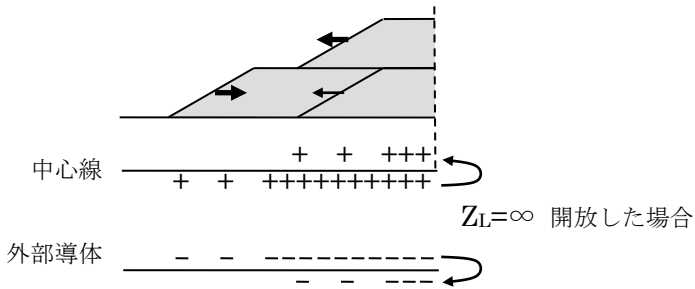


反射なし
電流と電圧は互いに見合って打ち消す



符号反転したパルスが反射
電流：無制限
電圧：ゼロ 境界条件

自由端, 完全導体への入射



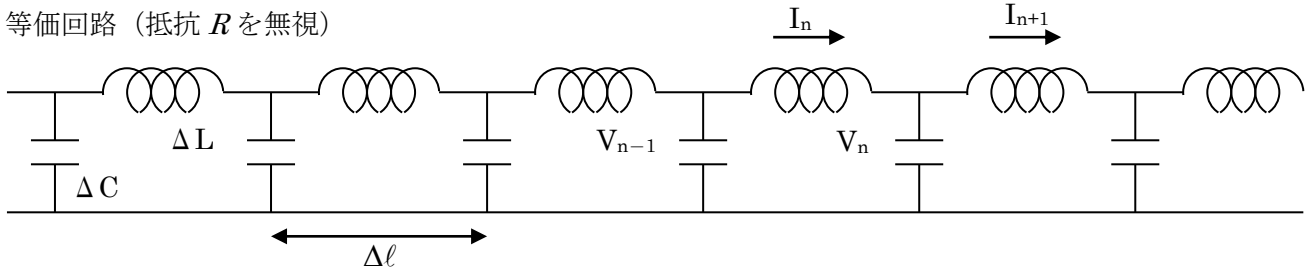
同符号のパルスが反射
電流：ゼロ
電圧：無制限 境界条件

固定端

Z_L がキャパシタ、インダクタの場合はどうなるだろうか？

同軸ケーブルでの電磁波の伝搬と反射

等価回路 (抵抗 R を無視)



$$V = V_0 e^{i\omega t} \quad I = I_0 e^{i\omega t}$$

$$V = L \frac{dI}{dt} \quad V_0 = i\omega L I_0$$

$$Q = CV \quad I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt} \quad I_0 = i\omega C V_0$$

$$i\omega \Delta C V_n = I_n - I_{n+1} \quad I_n - I_{n+1} = -\frac{dI}{dx} \Delta \ell$$

$$i\omega \Delta L I_n = V_{n-1} - V_n \quad V_{n-1} - V_n = -\frac{dV}{dx} \Delta \ell$$

$$-i\omega \Delta C V_0 = \frac{dI_0}{dx} \Delta \ell \quad -i\omega \Delta L I_0 = \frac{dV_0}{dx} \Delta \ell$$

$$\frac{\Delta L}{\Delta \ell} = L' \quad \frac{\Delta C}{\Delta \ell} = C' \quad \text{単位長さ当たりのインダクタンス、キャパシタンス}$$

$$-i\omega C' V_0 = \frac{dI_0}{dx} \quad -i\omega L' I_0 = \frac{dV_0}{dx}$$

$$\frac{d^2 I_0}{dx^2} = -i\omega C' \frac{dV_0}{dx} = -\omega^2 L' C' I_0$$

$$I_0 = A e^{\pm i\omega \sqrt{L' C'} x} \quad I = A e^{i\omega(t \pm \sqrt{L' C'} x)}$$

$$\text{伝搬速度 } v = \frac{1}{\sqrt{L' C'}}$$

$$+ \text{について } \frac{dI_0}{dx} = i\omega \sqrt{L' C'} I_0 = -i\omega C' V_0$$

$$\text{より } -\sqrt{\frac{L'}{C'}} I_0^- = V_0^-$$

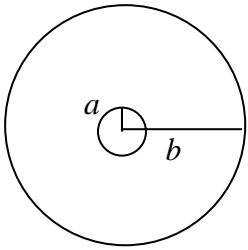
$$- \text{について } \frac{dI_0}{dx} = -i\omega \sqrt{L' C'} I_0 = -i\omega C' V_0$$

$$\text{より } \sqrt{\frac{L'}{C'}} I_0^+ = V_0^+$$

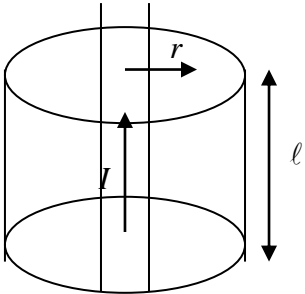
$$Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{特性インピーダンス}$$

$$I = I^+ + I^- = e^{i\omega t} (I_0^+ + I_0^-) = A^+ e^{i\omega(t - \sqrt{L' C'} x)} + A^- e^{i\omega(t + \sqrt{L' C'} x)}$$

$$V = V^+ + V^- = e^{i\omega t} (V_0^+ + V_0^-) = \sqrt{\frac{L'}{C'}} [A^+ e^{i\omega(t - \sqrt{L' C'} x)} - A^- e^{i\omega(t + \sqrt{L' C'} x)}]$$



断面 表皮効果で電流は表面のみを流れる ($r < a$ で磁場なし)



線電荷密度 λ $Q = \lambda \ell$

$$2\pi r \ell E = \lambda \ell / \epsilon$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r} \quad V = \int_a^b E dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{a}$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon\ell}{\ln(b/a)} \quad \text{単位長さ当たり } C' = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)}$$

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

$$\Phi_B = \int d\Phi_B = \int_a^b B \ell dr = \int_a^b \frac{\mu I}{2\pi r} \ell dr = \frac{\mu I}{2\pi} \ell \ln \frac{b}{a}$$

$$L = \frac{\Phi_B}{I} = \frac{\mu}{2\pi} \ell \ln \frac{b}{a} \quad \text{単位長さ当たり } L' = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$L'C' = \epsilon\mu \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \sqrt{\frac{\frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}}{\frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \frac{b}{a}$$

左から右への伝搬波 $I^+, V^+ \quad V^+ = Z_0 I^+$

右から左への反射波 $I^-, V^- \quad V^- = -Z_0 I^-$

負荷 Z_L では $V_L = V^+ + V^- \quad I_L = I^+ + I^-$

$$V^+ + V^- = V_L = Z_L I_L = Z_L (I^+ + I^-) = \frac{Z_L}{Z_0} (V^+ - V^-)$$

$$\frac{V^-}{V^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = r \quad \text{電圧反射率}$$

$Z_L = Z_0$ とすれば (インピーダンス整合)、反射波は生じない

教科書 9.5.3 は空洞の同軸ケーブルの場合 $v=c$ 通常は誘電体

なぜ空洞導波管や同軸ケーブルを使うのか? 電磁波を外部に漏らさない

教科書 11 章参照 電気双極子放射、磁気双極子放射の例

単線の導線による交流回路 電磁波を放射

2つの導線が(波長に比べて)近接していれば逆位相の電流による放射は打ち消しあう

32A

平行導線や平行平板では電磁場がもれて、電磁波の放射も無視できない

レッヘル線(平行導線)、平行平板の場合の電磁場分布

32B

導波管や同軸ケーブルでは導体に囲まれて放射損失はなし

32C

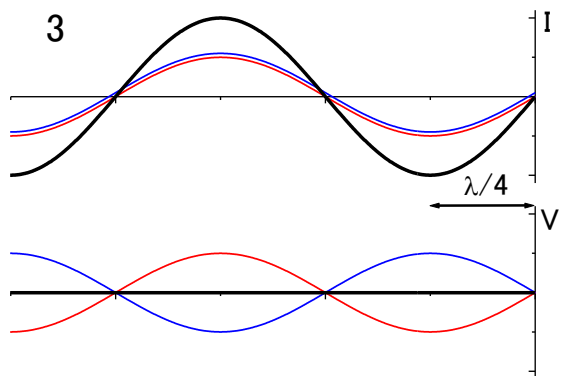
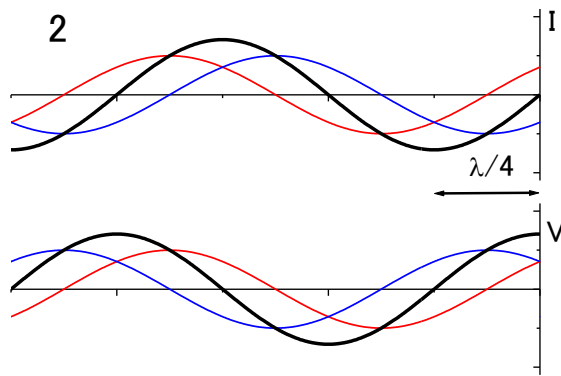
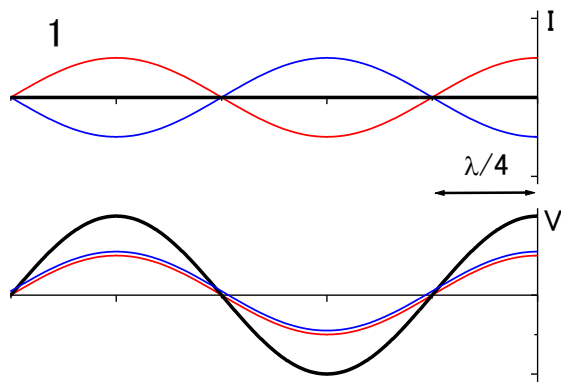
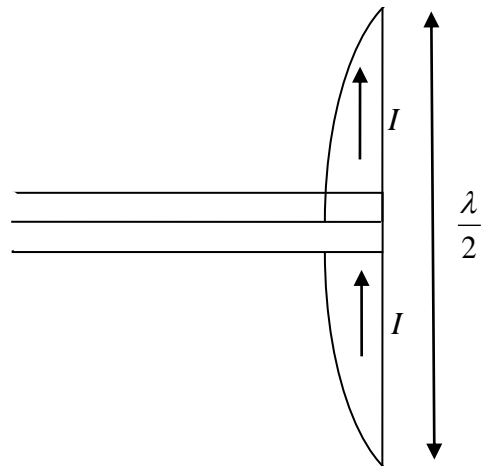
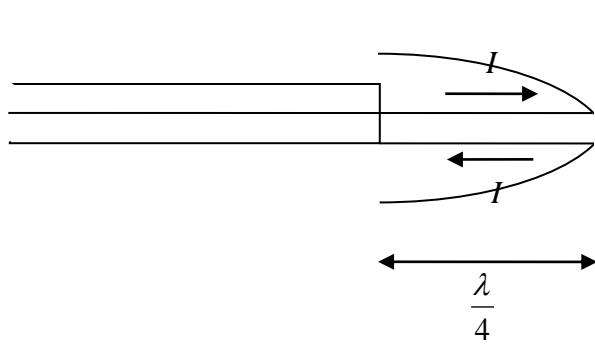
空洞導波管や同軸ケーブルを使うもう一つの理由 外来ノイズに強い

32D

電気双極子放射 半波長ダイポールアンテナ なぜ半波長？

同軸ケーブルで開放(電流 0 電圧 無制限 の境界条件)の場合

先端の導線を 1/4 波長まで折り曲げれば双極子モーメントになることを端の I と V の定在波 を書いて説明



6/6 第8回

10章 Potentials and Fields

スライド「時間に依存する電磁気学」でこれからの流れを説明

ρ 、 \mathbf{J} が既知とすると、Maxwell方程式 式8つ で未知数 \mathbf{E}, \mathbf{B} 6つ

条件過剰？

電場、磁場に関するガウスの法則は初期条件とみなせること（電荷保存則を基本的な法則とみなして、ファラデーの法則・アンペールマックスウェルの法則・電荷保存則を使うと、ガウスの法則は初期状態で満たされれば、以後電場・磁場が時間変動しても成り立つことがわかる。）

式6つ 未知数 \mathbf{E}, \mathbf{B} 6つ

Or 電場・磁場のガウスの法則が2つの自由度を減らして(6 - 2 = 4)自由度4

このあとの見通し 電磁ポテンシャル V, \mathbf{A} を導入して式4つ、未知数4つ

しかし V, \mathbf{A} の満たす方程式は複雑 ゲージ変換の自由度を使って見通しよく解く

ローレンツ条件 自由度が1つ減る 独立な変数 3つ

さらに自由空間では $V=0$ にできる（ローレンツ条件と組み合わせて $\nabla \cdot \mathbf{A}=0$ ） 自由度がさらに1つ減る 独立な変

数 2つ $\nabla \cdot \mathbf{A}=0, \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

真空中の電磁波 横波 電場の x, y 成分を与えればすべて決まる（直線偏光）

同じことだが、光子のスピンが+1と-1の2つに相当（右・左回り円偏光）

時間・空間依存する波源があるときの V, \mathbf{A} の満たす波動方程式の解（遅延ポテンシャル）

解の物理的意味 遅延時間の意味

34A

運動する点電荷の場合の遅延ポテンシャル リエナール・ヴィーヘルトポテンシャル

制動放射、シンクロトロン放射

電磁波の放射の理論 放射場（伝搬光）と近接場（非伝搬光）の違い

放射電磁波を求めるときの条件

電気双極子・磁気双極子放射、任意の分布のときの放射

放射の反作用

電磁気学と特殊相対性理論

p. 416 p.553 から教科書に沿って説明

\mathbf{B} が時間変動する場合、 \mathbf{E} は V と \mathbf{A} に依存

4つの未知関数 V と \mathbf{A} を決める4つの方程式が求まる

Ex.10.1の説明

問題 面に急に時間的に一定の一樣電流が流れ出したときは？

34B

10.1.2 V と \mathbf{A} にはゲージ変換の自由度がある

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla(V + \beta) - \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A} + \boldsymbol{\alpha}) = -\nabla V - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} - \nabla \beta - \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\alpha} \quad \therefore \nabla \beta + \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\alpha} = 0$$

$$\beta = -\frac{\partial \lambda}{\partial t} + k(t) \quad \text{で } k(t) \text{ を } \lambda \text{ に吸収できる理由}$$

$\lambda' = \lambda - \int_0^t k(t') dt'$ なる λ' を定義

$$\beta' = -\frac{\partial \lambda'}{\partial t} = -\frac{\partial \lambda}{\partial t} + k(t) = (\beta - k(t)) + k(t) = \beta$$

$$\boldsymbol{\alpha}' = \nabla \lambda' = \nabla \lambda = \boldsymbol{\alpha}$$

$$\begin{cases} \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \lambda' \\ V' = V - \frac{\partial \lambda'}{\partial t} \end{cases}$$

この λ' を改めて λ とおくと (10.7)

10.1.3 クーロンゲージとローレンツゲージ

ローレンツゲージ:

ゲージの自由度 ローレンツゲージ(10.12)をとれば(10.16)

(10.12)になるような λ を採れることは後に証明

(10.16)の解が遅延ポテンシャル(10.26)で表せる

遅延ポテンシャルが解であることも後に証明

遅延時刻での電荷・電流分布を用いた電磁場の表式 Jefimenko 方程式

クーロンゲージ:

p.234 p.245 でこのようにおけることはすでに扱う V は電荷分布の時間変動が瞬時に伝わる形で簡単に計算できる V は相対論的には非現実的だが、観測されるのは \mathbf{E} で、それは \mathbf{A} にも依存して矛盾はなくなる。 \mathbf{A} の方程式は複雑 時間変動しない場合は p.235 (5.62)式 p.246 (64)式

ローレンツゲージ (10.12)を満たすような V, \mathbf{A} 取れる理由 証明

Prob.10.6

ローレンツゲージが成り立たない $\nabla \cdot \mathbf{A} \neq -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}$ と仮定 $\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = \Phi$

$$\begin{cases} \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \lambda \\ V' = V - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \end{cases} \quad \text{で } \nabla \cdot \mathbf{A}' = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V'}{\partial t} \text{ となる } \lambda \text{ を見つけたい}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V'}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \lambda + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} = \Phi + \square^2 \lambda$$

$\square^2 \lambda = -\Phi$ となる λ を選べばよい $\square^2 \lambda = -\Phi$ は解くことができる

V と \mathbf{A} を決める方程式は同じ形で相対論的にも OK ダランベルシアン

$V=0$ とおけるか $\rho=0$ ならば $V=0$ とおける

$V'=0$ となるような gauge をとれるか

$$\begin{cases} \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\lambda \\ V' = V - \frac{\partial\lambda}{\partial t} \end{cases}$$

で $\lambda = \int_0^t V dt'$ とすれば $V'=0$ とできる このとき、 $\square^2 V'=0$ つまり $\rho=0$

$\mathbf{A}=0$ とおけるか $\mathbf{A}=0$ とすると $\mathbf{B}=0$ となってしまう

$\mathbf{A}'=0$ となるような gauge をとれるか

$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\lambda = 0$ $\mathbf{A} = -\nabla\lambda$ このとき $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = 0$ となってしまうので

$\mathbf{B} \neq 0$ で $\mathbf{A}'=0$ とはできない

($\mathbf{A}=0$ とはおけない理由 3つの拘束条件がつくので $\mathbf{A}=0$ とできないのは明らかではある)

以下は 「時間に依存する電磁気学」 にまとめてある

(10.16)を満たす V, \mathbf{A} のうち (4つの独立成分)、ローレンツゲージを満たす V, \mathbf{A} (3つの独立成分) が見つければ \mathbf{E}, \mathbf{B} を計算できる

(ローレンツ条件を満たすような λ は必ず見つかる)

さらに、 λ 'の自由度があり、これにより $V=0$ とおける

$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ \mathbf{A} は3つの自由度だが、ローレンツ条件があるため独立な変数2つ

教科書 p444-446 p561-563

10.2 時間変動する電荷・電流分布が与えられたとき

静的なポテンシャルの表式を利用して遅延時刻による遅延ポテンシャルを直観的に導入

電場、磁場では同様なことはできない Jefimenko 方程式が必要 (p.427 p.566 10.2.2)

遅延ポテンシャルが Eq.10.16 を満たす証明を次ページ p.37 で

遅延ポテンシャルがローレンツゲージを満たすことは Problem 10.10

p.39 別解 (10.26)の解がローレンツ条件を満たすのは 連続の方程式 (電荷保存則) から
つまり、 ρ と \mathbf{J} が独立でないことから一つ自由度が減る

先進ポテンシャルについて 物理的意味 球面の中心に波源 (過去 遅延時刻 の電荷分布) 中心から広がった電磁波が反射して中心に収束していく (未来 先進時刻 の電荷分布を決める)

36A

グリーン関数により遅延ポテンシャルを求める方法 pp.40-42

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{R} d\mathbf{r}'$$

$$t_r = t - \frac{R}{c}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = (x - x', y - y', z - z')$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} R = \frac{\partial}{\partial x} \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \cdot 2(x - x')$$

$$\text{よ} \searrow \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} R = \frac{\mathbf{R}}{R} = \hat{\mathbf{R}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} R^{-1} = \frac{\partial R}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial R} R^{-1} = -R^{-2} \hat{\mathbf{R}}$$

$$\nabla V(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}', t_r) \right) \frac{1}{R} + \rho \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{1}{R} \right) \right] d\mathbf{r}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[-\frac{1}{c} \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \right] d\mathbf{r}'$$

$$\nabla \rho = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}', t_r) = \frac{\partial t_r}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial t_r} \rho = -\frac{1}{c} \hat{\mathbf{R}} \frac{\partial}{\partial t} \rho$$

$$\therefore \frac{\partial t_r}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(t - \frac{R}{c} \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} R = -\frac{1}{c} \hat{\mathbf{R}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = \frac{\partial t_r}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t_r} \rho = \frac{\partial}{\partial t} \rho \quad \therefore \frac{\partial t_r}{\partial t} = 1$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 V(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \nabla \cdot \left[-\frac{1}{c} \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \right] d\mathbf{r}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[-\frac{1}{c} \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) - \nabla \cdot \left(\rho \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \right) \right] d\mathbf{r}' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[-\frac{1}{c} \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R} \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) - (\nabla \rho) \cdot \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} - \rho \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \right) \right] d\mathbf{r}' \end{aligned}$$

$$\nabla \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t_r)}{\partial t} = \frac{\partial t_r}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial t_r} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{c} \hat{\mathbf{R}} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R} \right) = \hat{\mathbf{R}} \cdot \nabla \left(\frac{1}{R} \right) + \frac{1}{R} \nabla \cdot (\hat{\mathbf{R}}) = \hat{\mathbf{R}} \cdot \left(-\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \right) + \frac{1}{R} \nabla \cdot (\mathbf{R}) = -\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R} \left[\frac{1}{R} \nabla \cdot \mathbf{R} + \mathbf{R} \cdot \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \right]$$

$$= -\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R} \left[\frac{3}{R} - \mathbf{R} \cdot \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \right] = -\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R} \left[\frac{3}{R} - \frac{1}{R} \right] = \frac{1}{R^2}$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \right) = 4\pi \delta^3(\mathbf{R})$$

$$\therefore \text{ガウスの積分} \iint_S \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \cdot n dS = \iint_S \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \cdot \hat{\mathbf{R}} R^2 d\Omega = \iint_S d\Omega = 4\pi \quad \iiint_V \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \right) d\mathbf{R} = \iint_S \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \cdot n dS \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 V(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[-\frac{1}{c} \left(\frac{1}{R^2} \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R} \cdot \left(-\frac{1}{c} \hat{\mathbf{R}} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \right) - \left(-\frac{1}{c} \hat{\mathbf{R}} \frac{\partial}{\partial t} \rho \right) \cdot \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} - \rho 4\pi \delta^3(\mathbf{R}) \right] d\mathbf{r}' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\frac{1}{c^2} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - 4\pi \rho \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{R} d\mathbf{r}' - \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} V - \frac{1}{\epsilon_0} \rho \end{aligned}$$

V, \mathbf{A} を

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{R} d\mathbf{r}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', s)}{R} \delta(s - t + \frac{R}{c}) ds d\mathbf{r}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\mathbf{r}', s)}{R} \delta(s - t + \frac{R}{c}) ds \right] d\mathbf{r}'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{R} d\mathbf{r}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', s)}{R} \delta(s - t + \frac{R}{c}) ds d\mathbf{r}'$$

と書き直す。すると、 t_r は積分変数 s となり、 $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \nabla$ が直接作用しない

$$t_r = t - \frac{R}{c} \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = (x - x', y - y', z - z') \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', s)}{R} \frac{\partial \delta(s - t + \frac{R}{c})}{\partial t} ds d\mathbf{r}' \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', s)}{R} \frac{\partial \delta(s - t + \frac{R}{c})}{\partial s} ds d\mathbf{r}' \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', s)}{R} \left[\delta(s - t + \frac{R}{c}) \right]_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{R} \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', s)}{\partial s} \delta(s - t + \frac{R}{c}) ds d\mathbf{r}' \quad \text{部分積分} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', s)}{\partial s} \frac{\delta(s - t + \frac{R}{c})}{R} ds d\mathbf{r}' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}', s) \cdot \nabla \left(\frac{\delta(s - t + \frac{R}{c})}{R} \right) ds d\mathbf{r}' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}', s) \cdot \nabla_{r'} \left(\frac{\delta(s - t + \frac{R}{c})}{R} \right) ds d\mathbf{r}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int [\nabla_{r'} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}', s)] \frac{\delta(s - t + \frac{R}{c})}{R} ds d\mathbf{r}' \quad \text{部分積分} \end{aligned}$$

$$\text{ローレンツ条件} \nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int [\nabla_{r'} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}', s) + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', s)}{\partial s}] \frac{\delta(s - t + \frac{R}{c})}{R} ds d\mathbf{r}' = 0$$

$$\therefore \nabla_{r'} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}', s) + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', s)}{\partial s} = 0 \quad \text{電荷の連続方程式 (電荷保存則)}$$

$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ の計算で

$$\nabla \cdot (f\mathbf{w}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{w} + f(\nabla \cdot \mathbf{w})$$

$$\iint_S (f\mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V [\nabla \cdot (f\mathbf{w})] d\mathbf{r} = \iiint_V [(\nabla f) \cdot \mathbf{w}] d\mathbf{r} + \iiint_V [f(\nabla \cdot \mathbf{w})] d\mathbf{r}$$

$$\iiint_V [(\nabla f) \cdot \mathbf{w}] d\mathbf{r} = \iint_S (f\mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} dS - \iiint_V [f(\nabla \cdot \mathbf{w})] d\mathbf{r}$$

で、 $\mathbf{w} = \mathbf{J}, f = \frac{\delta}{R}, S$ として無限遠を使った。

$$\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g)$$

$$\iiint_V \nabla(fg) d\mathbf{r} = ?$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)V(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t) \quad \text{の解を求める}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G(\mathbf{r}, t) = -\delta(\mathbf{r})\delta(t) \quad \text{の解}G(\mathbf{r}, t)\text{が求まれば}$$

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \rho(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' dt' \quad \text{と表せる。なぜなら}$$

$$\begin{aligned} \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)V(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\epsilon_0} \int \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \rho(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' dt' \\ &= -\frac{1}{\epsilon_0} \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \rho(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' dt' = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t) \quad \text{だから。} \end{aligned}$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\omega t] d\omega \quad \delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] d\mathbf{k}$$

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int G(\mathbf{k}, \omega) \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] d\omega d\mathbf{k}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G(\mathbf{r}, t) = -\delta(\mathbf{r})\delta(t)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \int G(\mathbf{k}, \omega) \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] d\omega d\mathbf{k} = -\int \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] d\omega d\mathbf{k}$$

$$\int G(\mathbf{k}, \omega) \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] d\omega d\mathbf{k} = -\int \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] d\omega d\mathbf{k}$$

$$\int G(\mathbf{k}, \omega) \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] d\omega d\mathbf{k} = -\int \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] d\omega d\mathbf{k}$$

$$G(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int G(\mathbf{k}, \omega) \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] d\omega d\mathbf{k} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \exp[i(\omega t - kr \cos \theta)] k^2 \sin \theta dk d\theta d\phi d\omega$$

$$\cos \theta = u \quad -\sin \theta d\theta = du \quad = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{k^2}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \exp[i(\omega t - kru)] dk du d\phi d\omega$$

$$= -\frac{2\pi}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp[i\omega t] \int_0^{\infty} dk \frac{k^2}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \int_1^{-1} du \exp[-ikru] = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp[i\omega t] \int_0^{\infty} dk \frac{k^2}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \frac{\exp[ikr] - \exp[-ikr]}{ikr}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp[i\omega t] \int_0^{\infty} dk \frac{k^2}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \frac{2i \sin kr}{ikr} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp[i\omega t] \int_0^{\infty} dk \frac{2k}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \frac{\sin kr}{r}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp[i\omega t] \int_0^{\infty} dk \left(\frac{1}{k + \frac{\omega}{c}} + \frac{1}{k - \frac{\omega}{c}} \right) \sin kr$$

上半平面での積分路 $\oint_C dz \left(\frac{1}{z + \frac{\omega}{c}} + \frac{1}{z - \frac{\omega}{c}} \right) \exp[irz] = 0$

$$\text{P} \int_{-\infty}^0 dx \left(\frac{1}{x + \frac{\omega}{c}} + \frac{1}{x - \frac{\omega}{c}} \right) \exp[irx] + \text{P} \int_0^{\infty} dx \left(\frac{1}{x + \frac{\omega}{c}} + \frac{1}{x - \frac{\omega}{c}} \right) \exp[irx] +$$

$$+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 i\varepsilon e^{i\theta} d\theta \left(\frac{1}{-\frac{\omega}{c} + \varepsilon e^{i\theta} + \frac{\omega}{c}} + \frac{1}{-\frac{\omega}{c} + \varepsilon e^{i\theta} - \frac{\omega}{c}} \right) \exp\left[ir\left(-\frac{\omega}{c} + \varepsilon e^{i\theta}\right)\right]$$

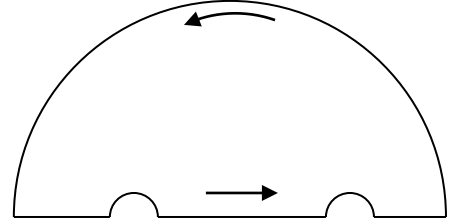
$$+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 i\varepsilon e^{i\theta} d\theta \left(\frac{1}{\frac{\omega}{c} + \varepsilon e^{i\theta} + \frac{\omega}{c}} + \frac{1}{\frac{\omega}{c} + \varepsilon e^{i\theta} - \frac{\omega}{c}} \right) \exp\left[ir\left(\frac{\omega}{c} + \varepsilon e^{i\theta}\right)\right]$$

$$+ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} iR e^{i\theta} d\theta \left(\frac{1}{R e^{i\theta} + \frac{\omega}{c}} + \frac{1}{R e^{i\theta} - \frac{\omega}{c}} \right) \exp[irR e^{i\theta}] = 0$$

$$\text{P} \int_{\infty}^0 (-dy) \left(\frac{1}{-y + \frac{\omega}{c}} + \frac{1}{-y - \frac{\omega}{c}} \right) \exp[-iry] + \text{P} \int_0^{\infty} dx \left(\frac{1}{x + \frac{\omega}{c}} + \frac{1}{x - \frac{\omega}{c}} \right) \exp[irx] - i\pi \left(\exp\left[-ir\frac{\omega}{c}\right] + \exp\left[ir\frac{\omega}{c}\right] \right) = 0$$

$$- \text{P} \int_0^{\infty} dy \left(\frac{1}{y - \frac{\omega}{c}} + \frac{1}{y + \frac{\omega}{c}} \right) \exp[-iry] + \text{P} \int_0^{\infty} dx \left(\frac{1}{x + \frac{\omega}{c}} + \frac{1}{x - \frac{\omega}{c}} \right) \exp[irx] = i2\pi \cos \frac{\omega}{c} r$$

$$\text{P} \int_0^{\infty} dx \left(\frac{1}{x + \frac{\omega}{c}} + \frac{1}{x - \frac{\omega}{c}} \right) (\exp[irx] - \exp[-irx]) = i2\pi \cos \frac{\omega}{c} r$$



$$P \int_0^\infty dk \left(\frac{1}{k + \frac{\omega}{c}} + \frac{1}{k - \frac{\omega}{c}} \right) 2i \sin rk = i2\pi \cos \frac{\omega}{c} r \quad P \int_0^\infty dk \left(\frac{1}{k + \frac{\omega}{c}} + \frac{1}{k - \frac{\omega}{c}} \right) \sin kr = \pi \cos \frac{\omega}{c} r$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{r} \int_{-\infty}^\infty d\omega \exp[i\omega t] \int_0^\infty dk \left(\frac{1}{k + \frac{\omega}{c}} + \frac{1}{k - \frac{\omega}{c}} \right) \sin kr$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{r} \int_{-\infty}^\infty d\omega \exp[i\omega t] (\pi \cos \frac{\omega}{c} r) \quad \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \exp[i\omega t] d\omega \text{ と し、 } \omega = 0 \text{ の と き } \frac{1}{4\pi r}$$

$$= \frac{\pi}{2(2\pi)^3} \frac{1}{r} \int_{-\infty}^\infty d\omega \exp[i\omega t] (\exp[i\frac{\omega}{c} r] + \exp[-i\frac{\omega}{c} r]) = \frac{1}{4(2\pi)^2} \frac{1}{r} \int_{-\infty}^\infty d\omega \left(\exp[i\omega(t + \frac{r}{c})] + \exp[i\omega(t - \frac{r}{c})] \right)$$

$$= \frac{1}{8\pi r} \left(\delta(t + \frac{r}{c}) + \delta(t - \frac{r}{c}) \right) = G(\mathbf{r}, t) \quad r = |\mathbf{r}|$$

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \rho(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' dt' = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \frac{1}{8\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left(\delta(t - t' + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}) + \delta(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}) \right) \rho(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' dt'$$

$$= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left(\rho(\mathbf{r}', t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}) + \rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}) \right) d\mathbf{r}' \quad c \rightarrow \infty \text{ の と き } \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\mathbf{r}, t) = -\delta(\mathbf{r}) \delta(t)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \int G(\mathbf{r}, \omega) \exp[i\omega t] d\omega = -\delta(\mathbf{r}) \int \exp[i\omega t] d\omega$$

$$\int \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\mathbf{r}, \omega) \exp[i\omega t] d\omega = \int [-\delta(\mathbf{r})] \exp[i\omega t] d\omega$$

$$\int \left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) G(\mathbf{r}, \omega) \exp[i\omega t] d\omega = \int [-\delta(\mathbf{r})] \exp[i\omega t] d\omega$$

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) G(\mathbf{r}, \omega) = -\delta(\mathbf{r})$$

$\delta(\mathbf{r})$ は球対称 r にのみ依存する。 $G(\mathbf{r}, \omega)$ も r にのみ依存する。

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rG) + \frac{\omega^2}{c^2} G = -\delta(\mathbf{r})$$

$$\frac{d^2}{dr^2} (rG) + \frac{\omega^2}{c^2} (rG) = -r\delta(\mathbf{r})$$

$$r \neq 0 \text{ では } \frac{d^2}{dr^2} (rG) + \frac{\omega^2}{c^2} (rG) = 0 \text{ より } rG = A \exp[i\frac{\omega}{c} r] + B \exp[-i\frac{\omega}{c} r] \quad G(\mathbf{r}, \omega) = \frac{A \exp[i\frac{\omega}{c} r] + B \exp[-i\frac{\omega}{c} r]}{r}$$

$$c \rightarrow \infty \text{ では } \left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) G(\mathbf{r}, \omega) \rightarrow \nabla^2 G(\mathbf{r}, \omega) = -\delta(\mathbf{r}) \text{ より } \lim_{c \rightarrow \infty} G(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi r}$$

$$\text{したがって、 } A + B = \frac{1}{4\pi}$$

$$A = \frac{1}{4\pi}, B = 0 \text{ も } A = 0, B = \frac{1}{4\pi} \text{ も } A = \frac{1}{8\pi}, B = \frac{1}{8\pi} \text{ も 解}$$

Example 10.2

$$R = \sqrt{z^2 + s^2}$$

$$I(t_r) \text{ は } t_r = t - \frac{R}{c} = t - \frac{\sqrt{z^2 + s^2}}{c} > 0 \text{ のみで } 0 \text{ でない} [I(t_r) = I_0].$$

$$ct > \sqrt{z^2 + s^2} \quad \sqrt{(ct)^2 - s^2} > |z| \quad (10.32)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(s, t) &= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \hat{\mathbf{z}} \int_{-\sqrt{(ct)^2 - s^2}}^{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \frac{dz}{R} = 2 \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \hat{\mathbf{z}} \int_0^{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \frac{dz}{\sqrt{z^2 + s^2}} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \hat{\mathbf{z}} \left[\ln(\sqrt{z^2 + s^2} + z) \right]_0^{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \\ &= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \ln \left(\frac{ct + \sqrt{(ct)^2 - s^2}}{s} \right) \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(s, t) &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial t} \ln \left(\frac{ct + \sqrt{(ct)^2 - s^2}}{s} \right) = -\frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \hat{\mathbf{z}} \frac{\frac{1}{s} (c + \frac{ct \cdot c}{\sqrt{(ct)^2 - s^2}})}{ct + \sqrt{(ct)^2 - s^2}} \\ &= -\frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \hat{\mathbf{z}} \frac{c(\sqrt{(ct)^2 - s^2} + ct)}{(ct + \sqrt{(ct)^2 - s^2})\sqrt{(ct)^2 - s^2}} = -\frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \hat{\mathbf{z}} \frac{c}{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}(s, t) = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial s} \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad \text{円柱座標 p.44(1.81)より}$$

6/13 第9回

10.2.2 Jefimenko 方程式とそれによる準定常電流の根拠 準定常電流の説明 資料

Jefimenko 方程式で c を無限大にすると、 $1/r^2$ に依存する電磁場 電磁波($1/r$ に依存)が発生しない この物理的意味は？

Prob.10.14 準静的、準定常電流 p.308 p.323 も参照 quasistatic

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{右辺第1項に対して第2項を無視できるという近似}$$

\mathbf{J} が時間変化するときも静磁場を求める式を使える ($\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{J}(t)$ の置き換えのみでよい)

その根拠

$$f(x) = f(x=a) + \frac{\partial f}{\partial x} (x-a)(x-a) + \dots$$

$$J(t_r) = J(t_r = t) + \frac{\partial J}{\partial t_r} (t_r = t)(t_r - t) + \dots \cong J(t) + \frac{\partial J(t)}{\partial t} (t_r - t) = J(t) + \dot{J}(t)(t_r - t) = J(t) - \dot{J}(t) \frac{R}{c} \quad \because t_r = t - \frac{R}{c}$$

$$\dot{J}(t_r) = \dot{J}(t) - \ddot{J}(t) \frac{R}{c} + \dots \cong \dot{J}(t) \quad (\text{第2項を無視})$$

$$(10.31) \quad \mathbf{B} \cong \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left\{ \frac{1}{R^2} \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}', t) - \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t) \frac{R}{c} \right] + \frac{\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t)}{cR} \right\} \times \hat{\mathbf{R}} d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t) \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2} d\tau'$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

導体内 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ 変位電流 $\mathbf{J}_d = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

$$\left| \frac{\mathbf{J}_d}{\mathbf{J}} \right| = \frac{\varepsilon \left| \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right|}{\sigma |\mathbf{E}|} = \frac{\varepsilon}{\sigma} \omega \quad \text{for } \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t}$$

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \approx 1-10 \quad \sigma \approx 10^8 / (\Omega \cdot \text{m}) = 10^8 \text{ C}^2 / (\text{J} \cdot \text{s} \cdot \text{m}) \quad \varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / (\text{N} \cdot \text{m}^2) \approx 10^{-11}$$

$$\frac{\varepsilon}{\sigma} \approx 10^{-18} - 10^{-19} \text{ s}$$

$\omega \ll 10^{18} \text{ s}^{-1}$ で成り立つ 波長100nmの紫外線 $\omega \approx 1.9 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$

交流回路では非常によい近似

↓
p.393脚注も参照

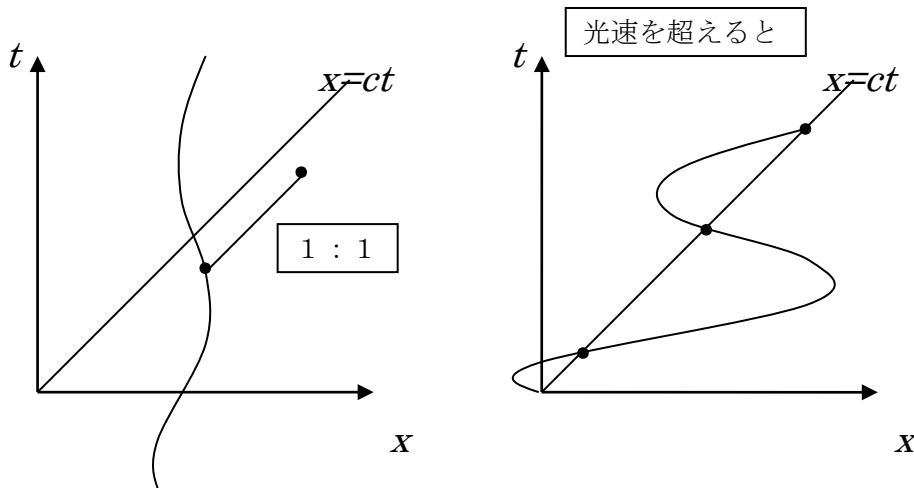
p.417

10.3 運動する点電荷が作る電磁ポテンシャル

10.3.1 リエナール・ヴィーヘルトポテンシャルの幾何学的因子の説明

電荷の運動の軌跡の1点（遅延時刻での）のみが現在のある1点でのポテンシャルの値に影響する

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{q\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{w}(t_r))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad (10.40)$$



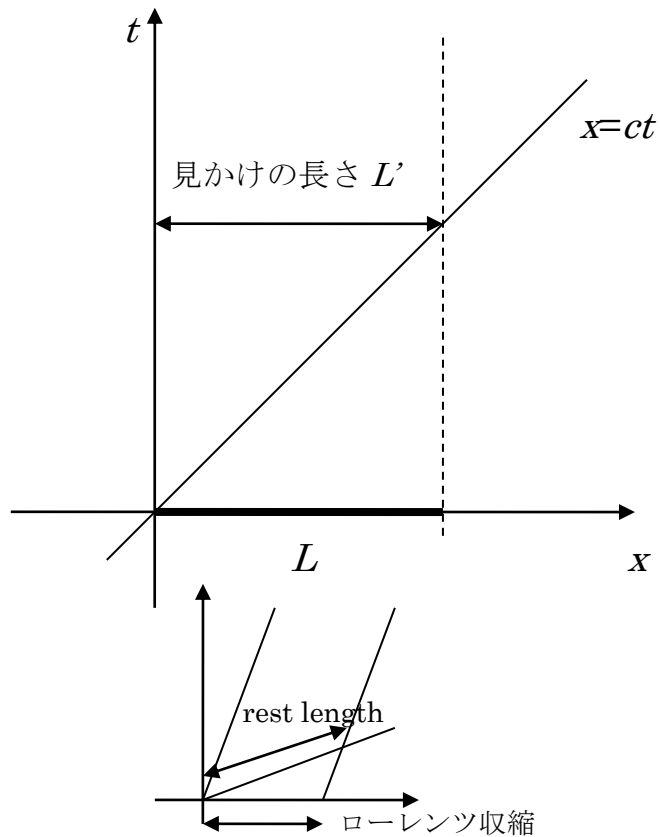
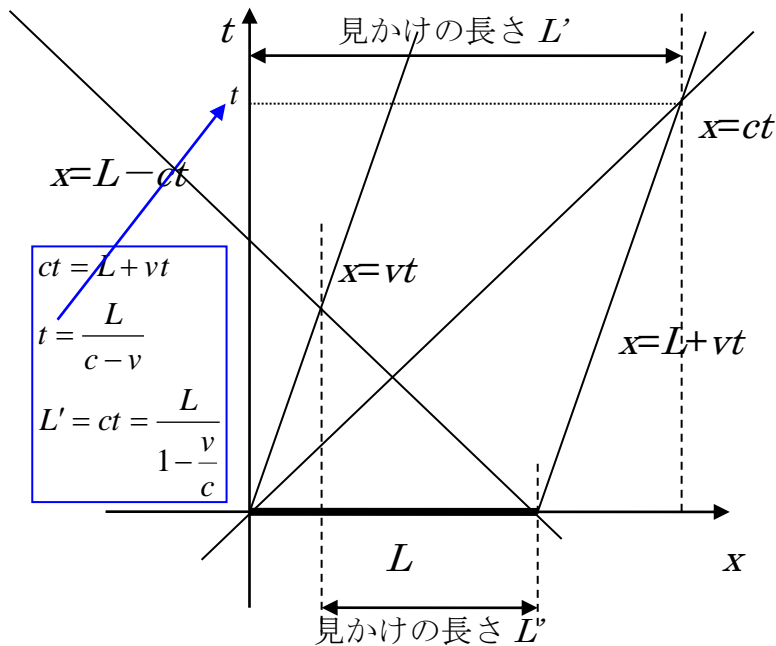
点電荷の場合の直観的式

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{q\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{w}(t_r))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r)|} \text{ 正しくない}$$

これが正しくない 電荷が空間的広がりを持っていると考えると 直観的説明

数学的には $t_r = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r)|}{c}$ $\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{w}(t_r)) = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{w}(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{w}|}{c}))$ 再帰的なのが問題

リエナール・ヴィーヘルトポテンシャルの幾何学的因子 p.431 p.569



$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$$

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = c(t - t_r)$$

$$t_r = t - \frac{R}{c}$$

$\rho(\mathbf{r}, t) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{w}(t))$ $\mathbf{w}(t)$: 点電荷の運動の軌跡

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{R} d\mathbf{r}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{q\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{w}(t_r))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{q\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{w}(t'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(t' - t_r) dt' d\mathbf{r}' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{q\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{w}(t'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(t' - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}) dt' d\mathbf{r}' \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{w}(t')|} \delta(t' - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{w}(t')|}{c}) dt' \end{aligned}$$

$$f(t') \equiv t' - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{w}(t')|}{c}$$

$$\begin{aligned} \frac{df(t')}{dt'} &= 1 + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} |\mathbf{r} - \mathbf{w}(t')| = 1 + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} [(\mathbf{r} - \mathbf{w}(t'))^2]^{1/2} = 1 + \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{w}}{dt'} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} [(\mathbf{r} - \mathbf{w}(t'))^2]^{1/2} \\ &= 1 + \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{w}}{dt'} \cdot \frac{\partial(\mathbf{r} - \mathbf{w})^2}{\partial \mathbf{w}} \frac{d[(\mathbf{r} - \mathbf{w})^2]^{1/2}}{d(\mathbf{r} - \mathbf{w})^2} = 1 + \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{w}}{dt'} \cdot [-2(\mathbf{r} - \mathbf{w})] \frac{1}{2} [(\mathbf{r} - \mathbf{w})^2]^{-1/2} \\ &= 1 - \frac{1}{c} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{w}) \cdot d\mathbf{w}}{|\mathbf{r} - \mathbf{w}| dt'} = 1 - \frac{1}{c} \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} \cdot \mathbf{v}(t') = 1 - \frac{1}{c} \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{v}(t') \end{aligned}$$

$$t' - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{w}(t')|}{c} = 0 \text{ の解は } t' = t_r \text{, このとき } \delta(f(t')) = \frac{\delta(t' - t_r)}{\left| \left(\frac{df(t')}{dt'} \right) \right|_{t'=t_r}} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{w}(t')|} \frac{\delta(t' - t_r)}{\left| \left(\frac{df(t')}{dt'} \right) \right|_{t'=t_r}} dt' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r)|} \frac{1}{1 - \frac{1}{c} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r)) \cdot \left(\frac{d\mathbf{w}(t')}{dt'} \right)_{t'=t_r}}{|\mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r)|}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r)| - \frac{1}{c} (\mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r)) \cdot \mathbf{v}(t_r)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{Rc - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}} \end{aligned}$$

ガイダンススライド

エネルギー・運動量保存により等速運動をする電荷が電磁波を放出できない理由

チェレンコフ放射の説明

リエナール・ヴィーヘルトポテンシャルからのチェレンコフ放射の導出

$t_r = 0$ のとき (10.41)より (10.48)より

$$c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = \sqrt{(c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2 t^2)}$$

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{ct - \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c}}$$

$c > v$ (真空中)のとき $ct - (\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{v}}) \frac{v}{c} = r - (\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{v}}) \frac{v}{c} > 0$

$\frac{c}{n} < v$ (媒質中) $V(\mathbf{r}, t)$ の分母が0 \rightarrow 遠方で減衰しない輻射場

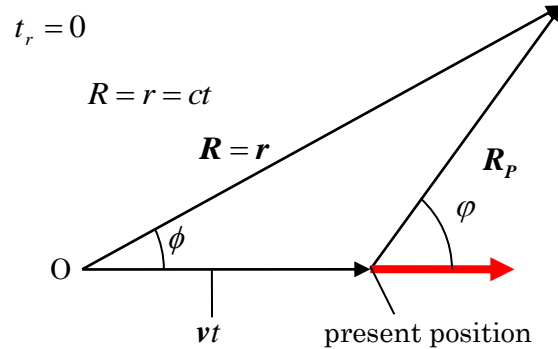
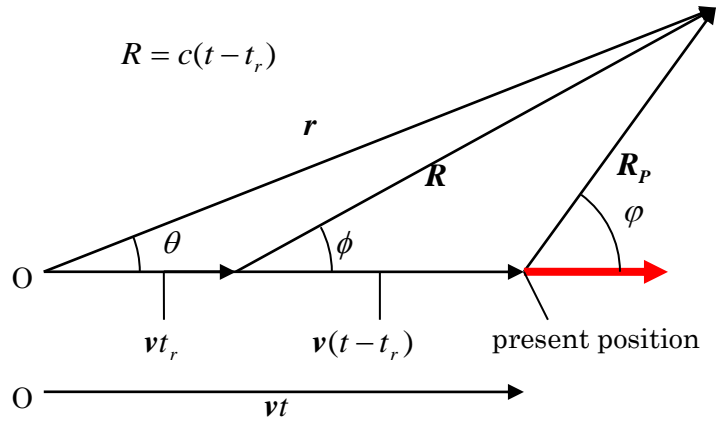
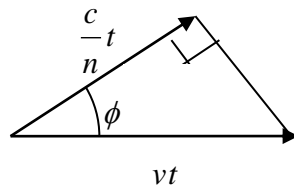
$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\frac{c}{n}t - \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c/n}}$$

$$\frac{c}{n}t - \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c/n} = 0$$

$$\left(\frac{c}{n}\right)^2 t = \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = rv \cos \phi$$

$$r = \frac{c}{n}t \text{より } \frac{c}{n} = v \cos \phi$$

Cherenkov 放射



Prob. 10.16 スカラーポテンシャルは、点電荷が等速度のときは電荷の現在の位置から見た距離に依存

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{(ct - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}/c)^2 + (1 - v^2/c^2)(r^2 - c^2 t^2)}} \quad R = c(t - t_r)$$

$$(ct - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}/c)^2 + (1 - v^2/c^2)(r^2 - c^2 t^2)$$

$$= c^2 t^2 - 2t\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 / c^2 + r^2 - c^2 t^2 - r^2 v^2 / c^2 + v^2 t^2$$

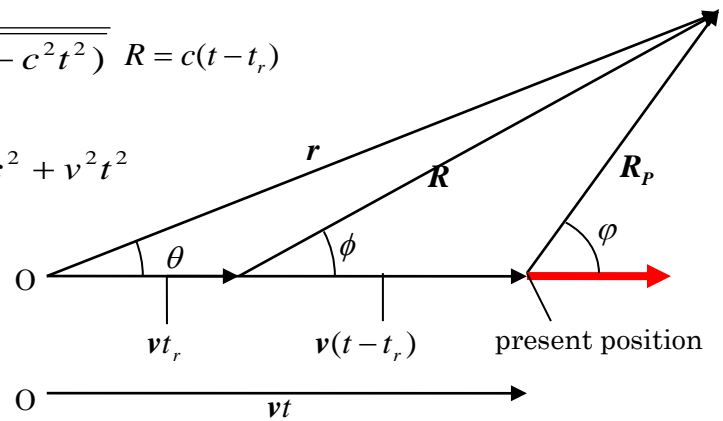
$$= -2t\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 / c^2 + r^2 - r^2 v^2 / c^2 + v^2 t^2$$

$$= r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}t + v^2 t^2 - [r^2 v^2 / c^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 / c^2]$$

$$= (\mathbf{r} - \mathbf{v}t)^2 - r^2 \frac{v^2}{c^2} (1 - \cos^2 \theta)$$

$$= R_p^2 - r^2 \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta$$

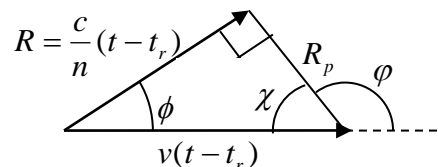
$$= R_p^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \phi\right) \quad \therefore V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R_p \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \phi}}$$



$$\phi = \pi - \chi \quad \phi = \pi/2 - \chi \quad \sin \phi = \sin(\pi/2 + \chi) = \cos \chi$$

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R_p \sqrt{1 - \frac{v^2}{(c/n)^2} \sin^2 \phi}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R_p \sqrt{1 - \frac{v^2}{(c/n)^2} \cos^2 \chi}}$$

Cherenkov 放射



Ex.10.4 等速度運動する電荷のつくる電場 電荷の現在の位置から放射状

遅延時刻の電荷の位置からの距離、に依存しない相対論的理由 p.528 p.533

一般的な場合の運動する点電荷による電磁場 (10.65,66) の導出 p.435-438 (10.72,73) p.573-577 のちほど
さきに結果を見せて

$\mathbf{u} \equiv c\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{v}$ の意味

$$|\hat{\mathbf{R}}|=1 \quad |\mathbf{R}|=c(t-t_r) \quad \mathbf{R} = c(t-t_r)\hat{\mathbf{R}} = (t-t_r)c\hat{\mathbf{R}}$$

$$(t-t_r)\mathbf{u} \equiv (t-t_r)(c\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{v}) = \mathbf{R} - (t-t_r)\mathbf{v} = \mathbf{R}_p \quad \mathbf{u} = \mathbf{R}_p / (t-t_r)$$

リエナール・ヴィーヘルトポテンシャルのスライド参照

\mathbf{u} は点電荷が遅延時刻の位置での速度を保って(等速度で)移動したときに現在時刻にいるであろう場所から観測点へ向かうベクトル

Ex.10.4 $R\mathbf{u} = c(t-t_r)\mathbf{u} = c\mathbf{R}_p$

$$\begin{aligned} E &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(c^2 - v^2)}{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{u})^3} R\mathbf{u} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(c^2 - v^2)}{(R_p c (1 - v^2 \sin^2 \varphi / c^2)^{1/2})^3} c\mathbf{R}_p \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(c^2 - v^2)}{(c(1 - v^2 \sin^2 \varphi / c^2)^{1/2})^3} c \frac{\hat{\mathbf{R}}_p}{R_p^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1 - v^2 / c^2)}{(1 - v^2 \sin^2 \varphi / c^2)^{3/2}} \frac{\hat{\mathbf{R}}_p}{R_p^2} \end{aligned}$$

運動する点電荷の電磁場の一般表式の導出 pp.435-438 p.573-577 -----

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{w} \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r)| = c(t - t_r) \quad t_r = t - \frac{R}{c}$$

$\mathbf{w}(t)$: 点電荷の運動の軌跡

$$\mathbf{v} = \left(\frac{d\mathbf{w}(t)}{dt} \right)_{t=t_r} = \mathbf{v}(t_r)$$

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{Rc - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}$$

$$\nabla V = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} V(\mathbf{r}, t) = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \frac{-1}{(Rc - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v})^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (Rc - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}) \quad (10.56)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} R = \frac{\partial t_r}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial R}{\partial t_r} = \frac{\partial t_r}{\partial \mathbf{r}} (-c) \quad (10.57)$$

$\therefore R = c(t - t_r(\mathbf{r}, t))$ 例えば、(10.48)

(10.58)はp.21公式(ii)より。

$$(\mathbf{R} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \left(\mathbf{R} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{v}(t_r) = \left(\mathbf{R} \cdot \frac{\partial t_r}{\partial \mathbf{r}} \right) \frac{\partial \mathbf{v}(t_r)}{\partial t_r} = \mathbf{a}(t_r) \left(\mathbf{R} \cdot \frac{\partial t_r}{\partial \mathbf{r}} \right) \quad (10.59)$$

$$\text{同様} \quad (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{w} = \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial t_r}{\partial \mathbf{r}} \right) \frac{\partial \mathbf{w}(t_r)}{\partial t_r} = \mathbf{v}(t_r) \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial t_r}{\partial \mathbf{r}} \right) \quad (\mathbf{R} \cdot \nabla) \mathbf{w} = \mathbf{v}(t_r) \left(\mathbf{R} \cdot \frac{\partial t_r}{\partial \mathbf{r}} \right)$$

$$\mathbf{a} \times \nabla t_r = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ \frac{\partial t_r}{\partial x} & \frac{\partial t_r}{\partial y} & \frac{\partial t_r}{\partial z} \end{vmatrix} \quad (10.62)$$

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}) &= \mathbf{a}(\mathbf{R} \cdot \nabla t_r) + \mathbf{v} - \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla t_r) - \mathbf{R} \times (\mathbf{a} \times \nabla t_r) + \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \nabla t_r) \\ &= \mathbf{a}(\mathbf{R} \cdot \nabla t_r) + \mathbf{v} - \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla t_r) - \mathbf{a}(\mathbf{R} \cdot \nabla t_r) + \nabla t_r (\mathbf{R} \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla t_r) - \nabla t_r (v^2) \\ &= \mathbf{v} + \nabla t_r (\mathbf{R} \cdot \mathbf{a} - v^2) \quad (10.65) \end{aligned}$$

(10.67)はp.21公式(ii)より。

$$(\mathbf{R} \cdot \nabla) \mathbf{R} = (\mathbf{R} \cdot \nabla) \mathbf{r} - (\mathbf{R} \cdot \nabla) \mathbf{w} = \mathbf{R} - \mathbf{v}(\mathbf{R} \cdot \nabla t_r)$$

$$\begin{aligned} -c \nabla t_r &= \frac{1}{R} [\mathbf{R} - \mathbf{v}(\mathbf{R} \cdot \nabla t_r) + \mathbf{R} \times (\mathbf{v} \times \nabla t_r)] = \frac{1}{R} [\mathbf{R} - \mathbf{v}(\mathbf{R} \cdot \nabla t_r) + \mathbf{v}(\mathbf{R} \cdot \nabla t_r) - \nabla t_r (\mathbf{R} \cdot \mathbf{v})] \\ &= \frac{1}{R} [\mathbf{R} - \nabla t_r (\mathbf{R} \cdot \mathbf{v})] \end{aligned}$$

$$-Rc \nabla t_r = \mathbf{R} - \nabla t_r (\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}) \quad -\mathbf{R} = Rc \nabla t_r - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}) \nabla t_r \rightarrow (10.68)$$

$$Rc - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{u} \quad \text{with } \mathbf{u} \equiv c\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{v}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{(Rc - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v})^3} [(Rc - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} - (c^2 - v^2 + \mathbf{R} \cdot \mathbf{a})\mathbf{R}] \quad (10.69)$$

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{(Rc - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v})^3} [(Rc - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v})(-\mathbf{v} + R\mathbf{a}/c) + \frac{R}{c}(c^2 - v^2 + \mathbf{R} \cdot \mathbf{a})\mathbf{v}] \quad (10.70)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{u})^3} \left\{ [(\mathbf{R} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v} - (c^2 - v^2 + \mathbf{R} \cdot \mathbf{a})\mathbf{R}] + [(\mathbf{R} \cdot \mathbf{u})(-\mathbf{v} + R\mathbf{a}/c) + \frac{R}{c}(c^2 - v^2 + \mathbf{R} \cdot \mathbf{a})\mathbf{v}] \right\}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{u})^3} \left\{ (\mathbf{R} \cdot \mathbf{u})R\mathbf{a}/c + (c^2 - v^2 + \mathbf{R} \cdot \mathbf{a})\left(\frac{R}{c}\mathbf{v} - \mathbf{R}\right) \right\}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{u})^3} [(\mathbf{R} \cdot \mathbf{u})R\mathbf{a} + (c^2 - v^2 + \mathbf{R} \cdot \mathbf{a})(R\mathbf{v} - R\mathbf{c})]$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{u})^3} [(\mathbf{R} \cdot \mathbf{u})R\mathbf{a} + (c^2 - v^2 + \mathbf{R} \cdot \mathbf{a})(-R\mathbf{u})]$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{u})^3} [(\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})\mathbf{u} - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{u})\mathbf{a} + (c^2 - v^2)\mathbf{u}] \quad (10.72)$$

$$(10.73) \quad \mathbf{u} \equiv c\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{v} \quad \text{より}$$

$$\mathbf{R} \times [(\dots)\mathbf{u} + \dots] = \mathbf{R} \times [(\dots)(c\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{v}) + \dots] = -\mathbf{R} \times [(\dots)\mathbf{v} + \dots] \text{と置き換え可能}$$

Ex.10.4 等速度運動する電荷のつくる電磁場の説明

現在の位置からのみに依存する相対論的理由

θ の意味 $\theta = 90^\circ$ で電場が強くなること

Prob. 10.19

$$\text{Eq.10.44} \quad c(t - t_r) = R$$

$$c^2(t - t_r)^2 = R^2 = \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}$$

$$t \text{ で微分} \quad 2c^2(t - t_r)\left(1 - \frac{\partial t_r}{\partial t}\right) = 2\mathbf{R} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t}$$

$$cR\left(1 - \frac{\partial t_r}{\partial t}\right) = \mathbf{R} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial t} = -\mathbf{v} \frac{\partial t_r}{\partial t}$$

$$cR\left(1 - \frac{\partial t_r}{\partial t}\right) = -\mathbf{R} \cdot \mathbf{v} \frac{\partial t_r}{\partial t}$$

$$cR = \frac{\partial t_r}{\partial t} (cR - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}) = \frac{\partial t_r}{\partial t} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}) \quad \text{Eq.10.71}$$

$$\therefore \frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{cR}{\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}}$$

ゲージ不変性と電荷保存則

最小作用の原理

作用 $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$ が極小値をとるように運動

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad L = \frac{1}{2} m v^2 - U \quad v = \dot{q} \rightarrow m \dot{v} = -\nabla U \quad \text{運動方程式}$$

ラグランジアンに座標と時間の任意の関数の時間についての完全導関数（全微分）を付け加えてもよい。なぜならば

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t)$$

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L' dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt} dt = S + f(q^{(2)}, t_2) - f(q^{(1)}, t_1)$$

変分をとる（始点と終点は固定）。

$$\delta S' = \delta S$$

電磁場の中の粒子

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - eV$$

↓

$$\frac{v}{c} \ll 1 \quad -mc^2 + \frac{1}{2} mv^2$$

電荷保存 $\frac{de}{dt} = 0$ ならば

$$\frac{d}{dt}(e\lambda) = \frac{de}{dt} \lambda + e \frac{d\lambda}{dt} = e \left(\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right) = e \left(\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \lambda \right)$$

電荷が保存すればゲージ変換 $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \lambda$ $V' = V - \frac{\partial \lambda}{\partial t}$ で δS が不変なことを示す

$$\begin{aligned} L' &= -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + e\mathbf{A}' \cdot \mathbf{v} - eV' \\ &= -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + e(\nabla \lambda) \cdot \mathbf{v} - eV + e \frac{\partial \lambda}{\partial t} \\ &= L + e\mathbf{v} \cdot (\nabla \lambda) + e \frac{\partial \lambda}{\partial t} \\ &= L + \frac{d}{dt}(e\lambda) \quad \text{時間についての完全導関数} \end{aligned}$$

電荷密度 ρ

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

$$\because \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \quad \because \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - eV$$

↓

$$\frac{v}{c} \ll 1 \quad -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\text{一般化運動量 } \mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial v^2} \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) + e\mathbf{A} = \frac{-mc^2 \left(-\frac{1}{c^2} \right)}{2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} 2\mathbf{v} + e\mathbf{A} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\mathbf{A} = \mathbf{P} + e\mathbf{A}$$

\mathbf{P} : 力学的運動量

$$\therefore \frac{\partial v^2}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial v_x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial v_y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial v_z} \right) (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = 2\mathbf{v}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{q}, t) \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}} \text{ に依存しない, } \nabla_{\mathbf{v}} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{A} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} (\mathbf{v}) + \mathbf{A} \times (\nabla_{\mathbf{v}} \times \mathbf{v}) = \mathbf{A} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} (\mathbf{v}) = \mathbf{A}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = e\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - e\nabla V = e[(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{v})] - e\nabla V = e(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} + e\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) - e\nabla V$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0 \text{ より } \frac{d}{dt} (\mathbf{P} + e\mathbf{A}) = e(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} + e\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) - e\nabla V$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} + \frac{de}{dt} \mathbf{A} + e \frac{d\mathbf{A}}{dt} = e(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} + e\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) - e\nabla V$$

$$\text{一般に } \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f \quad \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} \quad \text{と 電荷保存 } \frac{de}{dt} = 0 \text{ より}$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} + e \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} \right] = e(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} + e\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) - e\nabla V$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = -e \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - e\nabla V + e\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$$H = \mathbf{v} \cdot \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - L = \mathbf{v} \cdot \left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\mathbf{A} \right) - \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - eV \right)$$

$$= \frac{mv^2 + mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + eV = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + eV$$

$$\text{自由粒子のエネルギー } E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (H - eV)^2 = E^2 = m^2 c^4 + P^2 c^2 = m^2 c^4 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 c^2$$

$$H = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2} + eV \quad \text{相対論的}$$

$$= mc^2 \sqrt{1 + \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{m^2 c^2}} + eV \approx mc^2 \left[1 + \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2m^2 c^2} \right] + eV = mc^2 + \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + eV \quad \text{非相対論的}$$

\mathbf{p} : 一般化運動量

ゲージ変換とゲージ場 (ゲージ変換について不変な場)

荷電粒子の波動関数 $\psi(\mathbf{q},t) \rightarrow e^{i\lambda Q}\psi(\mathbf{q},t)$ 第1種のゲージ変換 (あらゆる場所、時間で同一の位相変化を与える大局的、大域的(global)ゲージ変換)

$\psi^*(\mathbf{q},t) \rightarrow e^{-i\lambda Q}\psi^*(\mathbf{q},t)$

λ : 定数 Q : 電荷量

荷電粒子に関係した任意の物理量Aによる状態 ψ から ψ' への遷移の確率振幅は

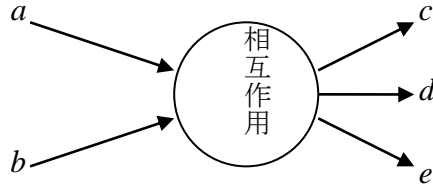
$$\int d\mathbf{q} \psi'^*(\mathbf{q},t) A(\mathbf{q},t) \psi(\mathbf{q},t) \quad \text{ゲージ変換により変わらない} = \text{ゲージ対称性 (ゲージ変換に対し系は対称)}$$

電荷の保存則

$$Q = Q_a + Q_b = Q_c + Q_d + Q_e$$

$$\psi = \psi_a \psi_b \rightarrow e^{i\lambda(Q_a+Q_b)} \psi_a \psi_b = e^{i\lambda Q} \psi$$

$$\psi' = \psi_c \psi_d \psi_e \rightarrow e^{i\lambda(Q_c+Q_d+Q_e)} \psi_c \psi_d \psi_e = e^{i\lambda Q} \psi'$$



粒子間の遷移

荷電粒子の異なる点における波動関数の位相を比較する物理的手段はない

→ 位相を任意に各点で選ぶことができる 位相変化 $\lambda(\mathbf{q},t)$: \mathbf{q},t の関数として1階微分可能

第2種のゲージ変換 (局所的(local)ゲージ変換)

$$\psi(\mathbf{q},t) \rightarrow e^{i\lambda(\mathbf{q},t)Q}\psi(\mathbf{q},t)$$

$$\psi^*(\mathbf{q},t) \rightarrow e^{-i\lambda(\mathbf{q},t)Q}\psi^*(\mathbf{q},t)$$

$$\int d\mathbf{q} \psi'^*(\mathbf{q},t) A(\mathbf{q}) \psi(\mathbf{q},t) \text{ならば局所的ゲージ変換に対して不変}$$

$A(\mathbf{q},\mathbf{p})$ ならば?

$A(\mathbf{q},\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ 運動量演算子

$$\mathbf{p} \psi(\mathbf{q},t) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \psi(\mathbf{q},t) \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} [e^{i\lambda(\mathbf{q},t)Q} \psi(\mathbf{q},t)] = e^{i\lambda(\mathbf{q},t)Q} (-i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} + \hbar Q \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{q}}) \psi(\mathbf{q},t) \text{より}$$

$$\int d\mathbf{q} \psi'^*(\mathbf{q},t) \mathbf{p} \psi(\mathbf{q},t) \rightarrow \int d\mathbf{q} \psi'^*(\mathbf{q},t) (\mathbf{p} + \hbar Q \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{q}}) \psi(\mathbf{q},t)$$

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + \hbar Q \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{q}}$$

$$\text{エネルギー} E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

$$E \rightarrow E - \hbar Q \frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

\mathbf{p}, E の変化が起こらないためには、荷電粒子の運動量、エネルギーの定義を変更して

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - QA$$

$$E \rightarrow E - QV$$

とおき、局所的ゲージ変換を波動関数 ψ に対して行うときに同時に A と V が次の変換を受ければよい

$$A \rightarrow A + \hbar \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{q}}$$

$$V \rightarrow V - \hbar \frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

このとき $\mathbf{p} - QA$ 、 $E - QV$ で定義された系の運動量、エネルギーは局所的ゲージ変換に対し不変

$$\therefore \text{局所的ゲージ変換で} \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + \hbar Q \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{q}} \text{となるので、} (\mathbf{p} - QA) \xrightarrow{\text{局所的ゲージ変換}} \mathbf{p} - Q(A + \hbar \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{q}}) + \hbar Q \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{p} - QA$$

$$E \rightarrow E - \hbar Q \frac{\partial \lambda}{\partial t} \text{となるので、} (E - QV) \xrightarrow{\text{局所的ゲージ変換}} E - Q(V - \hbar \frac{\partial \lambda}{\partial t}) - \hbar Q \frac{\partial \lambda}{\partial t} = E - QV$$

\mathbf{q}, \mathbf{p} の任意の関数である物理量は、 \mathbf{q}, \mathbf{p} のそれぞれが変化しないので局所的ゲージ変換に対して不変

まとめると

位相を任意に各点で選んでもあらゆる物理量が不変になる。この要請から \mathbf{A}, V が必然的に導入された = ゲージ場

\mathbf{A}, V は電荷の保存則から生まれた大局的ゲージ変換に対する物理量の不変性を局所的ゲージ変換に対する不変性に拡張するときに見える物理量

電磁ポテンシャルはゲージ場、すなわち電荷の大きさ（相互作用の強さ）を測るものさし（ゲージ）である。荷電粒子との相互作用のエネルギーの形も決定される。

質量 m , 電荷 Q を持つ粒子のエネルギー（非相対論的）

$$E = QV + \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - Q\mathbf{A})^2 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + QV - Q \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \mathbf{A} + \frac{Q^2}{2m} \mathbf{A}^2 \quad Q \frac{\mathbf{p}}{m}: \text{電流}$$

ゲージ粒子 gauge boson 4つの力の相互作用を引き起こすボーズ粒子

電荷	電磁気力-光子（フォトン）	$U(1)$ 対称性	次数1のユニタリ群（絶対値1の複素数）
弱荷	弱い相互作用-ウィークボソン（W粒子）	$SU(2)$ 対称性	2×2 のユニタリ行列
色荷	強い相互作用-グルーオン	$SU(3)$ 対称性	3×3 のユニタリ行列
質量	重力-重力子（グラビトン）		

歴史的背景

Weyl が1918年の論文でEinsteinの重力理論とMaxwellの電磁気学を統一しようと、今日Weyl変換あるいは共形変換と呼ばれている計量テンソルの局所的スケール変換を考え、これに対する不変性の要求が電磁ポテンシャルの存在を導くとしたが、これは誤りだった。1925年に量子力学が登場し、これをスケール変換ではなく、電子（荷電粒子）の波動関数の位相変換であるとSchrödingerとLondonが正しく指摘。そののち、Weyl は1929年のZeit. Physik の論文で最終的に正しい「ゲージ原理」の認識に到達した。つまり、局所 $U(1)$ 位相変換 $\phi(x) \rightarrow \exp(i e \lambda(x)) \phi(x)$ のもとで理論が不変であることを要求すれば、ゲージ場の存在が導かれる。

Chap.11 Radiation

一般的に時間変動する電荷・電流分布の作る輻射場

輻射場 Source から十分遠方で電磁場が $1/r$ の依存性を持つ
十分大きい半径 r の球面で有限のエネルギーの流れ

時間に依存する電磁気学 資料で 適用する3つの近似の意味

11.1.2 電気双極子輻射

スライドをまじえて説明 時間に依存する電磁気学 で \mathbf{R} の近似式の図解

結果：電場・磁場が互いに直交 $\mathbf{E}/B=c$ ポインティングベクトル \mathbf{r} 方向 (十分遠方の狭い領域で単色平面波とみなせることと整合)

輻射の θ 依存性

から青空の光が偏光していること ガイダンススライドで

11.1.2 Electric Dipole Radiation

$$R_{\pm} = \sqrt{r^2 \mp rd \cos \theta + (d/2)^2} = r \left[1 \mp \frac{d}{r} \cos \theta + \frac{1}{r^2} \left(\frac{d}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (11.6)$$

approx.1 $d \ll r$

perfect dipole vs. physical dipole p.154 Fig.3.37 p.159 Fig.37

$$R_{\pm} \cong r \left(1 \mp \frac{d}{2r} \cos \theta \right) = r \mp \frac{d}{2} \cos \theta \quad \frac{\omega}{c} R_{\pm} \cong \frac{\omega}{c} \left(r \mp \frac{d}{2} \cos \theta \right) = \frac{\omega}{c} r \mp \pi \frac{d}{\lambda} \cos \theta$$

$$\cos[\omega(t - R_{\pm}/c)] \cong \cos[\omega(t - r/c)] \cos\left(\pi \frac{d}{\lambda} \cos \theta\right) \mp \sin[\omega(t - r/c)] \sin\left(\pi \frac{d}{\lambda} \cos \theta\right)$$

approx.2 $d \ll \frac{c}{\omega} = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{1}{k} \quad \dots \quad \frac{d}{\lambda} \ll 1$

$$\cos[\omega(t - R_{\pm}/c)] \cong \cos[\omega(t - r/c)] \mp \pi \frac{d}{\lambda} \cos \theta \sin[\omega(t - r/c)] \quad (11.11)$$

(11.5)

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r} \left\{ \left(1 + \frac{d}{2r} \cos \theta \right) \cos[\omega(t - R_+/c)] - \left(1 - \frac{d}{2r} \cos \theta \right) \cos[\omega(t - R_-/c)] \right\} \quad \frac{d}{r} \ll 1$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r} \left\{ \begin{aligned} & \left(1 + \frac{d}{2r} \cos \theta \right) \left[\cos[\omega(t - r/c)] - \pi \frac{d}{\lambda} \cos \theta \sin[\omega(t - r/c)] \right] \\ & - \left(1 - \frac{d}{2r} \cos \theta \right) \left[\cos[\omega(t - r/c)] + \pi \frac{d}{\lambda} \cos \theta \sin[\omega(t - r/c)] \right] \end{aligned} \right\} \quad \frac{d}{\lambda} \ll 1$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r} \left\{ \frac{d}{r} \cos \theta \cos[\omega(t - r/c)] - 2\pi \frac{d}{\lambda} \cos \theta \sin[\omega(t - r/c)] \right\}$$

$$= \frac{q_0 d \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ \frac{1}{r} \cos[\omega(t - r/c)] - \frac{2\pi}{\lambda} \sin[\omega(t - r/c)] \right\} \quad (11.12)$$

approx.3 $r \gg \frac{c}{\omega} = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{1}{k} \quad \dots \quad \frac{2\pi}{\lambda} \gg \frac{1}{r}$

$$V(r, \theta, t) = \frac{q_0 d \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ -\frac{2\pi}{\lambda} \sin[\omega(t - r/c)] \right\} \quad (11.14)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-d/2}^{d/2} \frac{-q_0 \omega \sin[\omega(t - R/c)] \hat{\mathbf{z}}}{R} dz \quad (11.16) \quad \text{被積分関数は} z \text{に依存}$$

$$= \hat{\mathbf{z}} \frac{\mu_0}{4\pi} (-q_0 \omega) \int_{-d/2}^{d/2} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{d}{2r} \cos \theta\right) \sin\left[\omega t - \frac{\omega}{c} r \left(1 - \frac{d}{2r} \cos \theta\right)\right] dz$$

$$= \hat{\mathbf{z}} \frac{\mu_0}{4\pi} (-q_0 \omega) \int_{-d/2}^{d/2} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{d}{2r} \cos \theta\right) \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) + \pi \frac{d}{\lambda} \cos \theta\right] dz$$

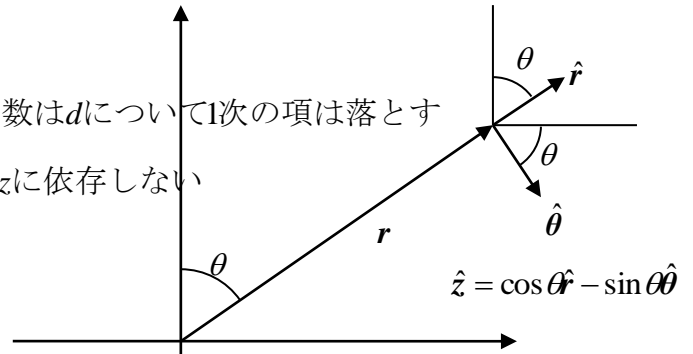
approx.1 $d \ll r$ approx.2 $d \ll \frac{c}{\omega} = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{1}{k}$

積分によって d の1次のオーダーになるので、被積分関数は d について1次の項は落とす

$$= \hat{\mathbf{z}} \frac{\mu_0}{4\pi} (-q_0 \omega) \int_{-d/2}^{d/2} \frac{1}{r} \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] dz \quad \text{被積分関数は} z \text{に依存しない}$$

$$= -\frac{\mu_0 q_0 d \omega}{4\pi r} \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \hat{\mathbf{z}} \quad (11.17)$$

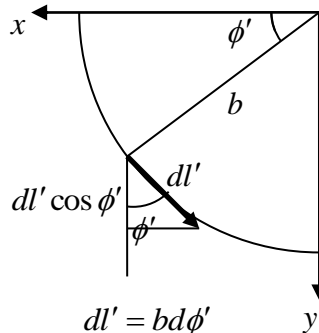
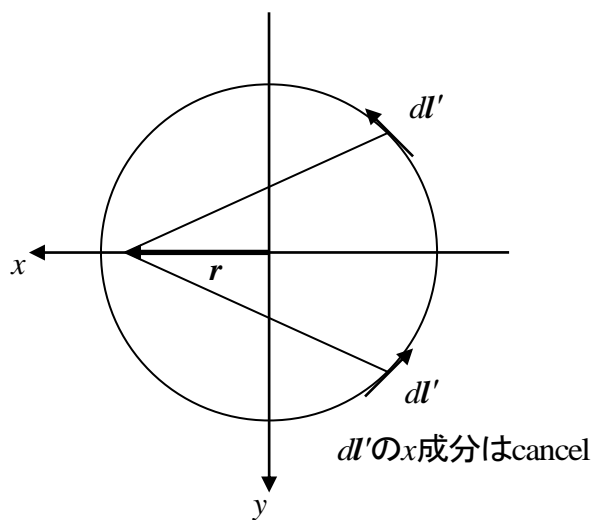
$$= -\frac{\mu_0 q_0 d \omega}{4\pi r} \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] (\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}})$$



$$A_r(r, \theta, t) = -\frac{\mu_0 q_0 d \omega}{4\pi r} \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \cos \theta \quad A_\theta(r, \theta, t) = \frac{\mu_0 q_0 d \omega}{4\pi r} \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \sin \theta \quad A_\phi = 0$$

$$(11.19) \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

11.1.3 Magnetic Dipole Radiation



(11.27)に(11.30)(11.32)を代入

perfect dipole vs. physical dipole p.246 Fig.5.55 p.257 Fig.55

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 I_0 b}{4\pi} \hat{\mathbf{y}} \int_0^{2\pi} \frac{\cos[\omega(t - R/c)]}{R} \cos \phi' d\phi'$$

$$= \frac{\mu_0 I_0 b}{4\pi} \hat{\mathbf{y}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{b}{r} \sin \theta \cos \phi'\right) \left\{ \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\omega b}{c} \sin \theta \cos \phi'\right] \right\} \cos \phi' d\phi'$$

$$= \frac{\mu_0 I_0 b}{4\pi} \hat{\mathbf{y}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{b}{r} \sin \theta \cos \phi'\right) \left\{ \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \cos\left(\frac{\omega b}{c} \sin \theta \cos \phi'\right) - \sin\left(\frac{\omega b}{c} \sin \theta \cos \phi'\right) \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \right\} \cos \phi' d\phi'$$

approx.2 $\omega b / c \ll 1$

$$= \frac{\mu_0 I_0 b}{4\pi r} \hat{\mathbf{y}} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{b}{r} \sin \theta \cos \phi'\right) \left\{ \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] - \frac{\omega b}{c} \sin \theta \cos \phi' \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \right\} \cos \phi' d\phi'$$

2nd - order term $\frac{b}{r} \cdot \frac{\omega b}{c}$ の項を無視

(11.35) → (11.37)

$$\mathbf{A}(r, \theta, t) = A_\phi(r, \theta, t) \hat{\phi}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) \hat{r} + \frac{1}{r} \left\{ -\frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right\} \hat{\theta}$$

$$\text{第1項} \propto \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{\sin^2 \theta}{r} \sin[\omega(t - r/c)] \right\} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \sin[\omega(t - r/c)] = \frac{1}{r} \frac{2 \cos \theta}{r} \sin[\omega(t - r/c)]$$

$$\text{第2項} \propto \frac{1}{r} \left\{ -\frac{\partial}{\partial r} (\sin \theta \sin[\omega(t - r/c)]) \right\} = \frac{1}{r} \frac{\omega}{c} \sin \theta \cos[\omega(t - r/c)]$$

approx.3 $\frac{1}{r} \ll \frac{\omega}{c}$ 第1項を無視 第2項が(11.37)

p.454 p.452 磁気双極子輻射が電気双極子輻射より桁違いに弱い理由

$$\frac{P_{mag}}{P_{ele}} = \left(\frac{m_0}{p_0 c} \right)^2 = \left(\frac{\pi b^2 I_0}{q_0 d c} \right)^2 = \left(\frac{\pi b^2 q_0 \omega}{q_0 \pi b c} \right)^2 = \left(\frac{\omega b}{c} \right)^2$$

54A

54A の議論は以下にも通じる (ガイダンススライドから)

$$\text{点電荷 } q[\text{C}] \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

$$F = qE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2}$$

$$\text{点磁荷 } q_m[\text{A} \cdot \text{m}] \quad \text{があれば} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_m}{r^2} \hat{r}$$

(EB対応)

$$\text{点磁荷 } q_m[\text{A} \cdot \text{m}] \quad [\text{C} \cdot \text{m/s}]$$

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_m}{r^2} \left[\frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}} \right] \left[\frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \right]$$

$$F = q_m B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_m^2}{r^2} \quad \text{if } q_m = cq \text{ ならば}$$
$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{c^2 q^2}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{q^2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2}$$

以下も参考：

$$\text{電流要素 } Id\vec{l}[\text{A} \cdot \text{m}] \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

$$v \ll c \text{ のときの近似式 } \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E} \quad \epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

$$\left(q\vec{v} \times \vec{B} = q\vec{v} \times \left(\frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E} \right) = \frac{q}{c^2} [\vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{E}) - \vec{E}(\vec{v} \cdot \vec{v})] = -\frac{v^2}{c^2} q\vec{E} \right)?$$

11.1.4 任意の放射源からの輻射

$r' \ll \lambda$ の条件が電気双極子近似である理由 (11.51)式とその直前の式 r' の1次までを残せば、任意の電荷分布から電気双極子が残る r' の2乗が残ると 磁気双極子、電磁四重極子 p.458p.457 最後の paragraph

11.1.4 Radiation from an Arbitrary Source

$$(11.50) \quad \dot{\rho}\left(\frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c}\right) \gg \frac{1}{2} \ddot{\rho}\left(\frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c}\right)^2 \quad \dot{\rho} \gg \ddot{\rho}\left(\frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c}\right) \quad \frac{c}{\dot{\rho}} \gg \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' \quad \left(\frac{c}{\omega} \gg r' \quad \lambda \gg r'\right)$$

$$V(\mathbf{r}, t) \cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{r}\right) [\rho(\mathbf{r}', t_0) + \dot{\rho}(\mathbf{r}', t_0) \left(\frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c}\right)] d\tau' \quad r' \text{ について1次まで残す}$$

p.214 Prob.5.7 $\mathbf{p} = \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', t) d\tau' \quad \nabla \cdot (\mathbf{x}\mathbf{J}) = (\nabla \mathbf{x}) \cdot \mathbf{J} + \mathbf{x} \nabla \cdot \mathbf{J} = \mathbf{J}_x + \mathbf{x} \left(-\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)$
p.225

$$\dot{p}_x = \int \mathbf{x}' \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau' = \int J_x d\tau' - \int \nabla \cdot (\mathbf{x}'\mathbf{J}) d\tau' = \int J_x d\tau' - \int (\mathbf{x}'\mathbf{J}) \cdot d\mathbf{S}' = \int J_x d\tau' \quad \therefore \dot{\mathbf{p}} = \int \mathbf{J} d\tau'$$

$$\nabla \left[\frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{p}}(t_0)}{r} \right] = \nabla \left[\frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{p}}(t_0)}{r^2} \right] = \nabla \left[\frac{x\dot{p}_x + y\dot{p}_y + z\dot{p}_z}{x^2 + y^2 + z^2} \right]$$

$$= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left[\frac{x\dot{p}_x + y\dot{p}_y + z\dot{p}_z}{x^2 + y^2 + z^2} \right]$$

$$= \mathbf{i} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \right) (x\dot{p}_x + y\dot{p}_y + z\dot{p}_z) + \left(\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} (x\dot{p}_x + y\dot{p}_y + z\dot{p}_z) \right] + \mathbf{j}[\] + \mathbf{k}[\]$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \right) = -\frac{2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = -\frac{2x}{r^4} \quad \text{この項は無視できる}$$

残るのは

$$\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \left[\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} (x\dot{p}_x + y\dot{p}_y + z\dot{p}_z) + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} (x\dot{p}_x + y\dot{p}_y + z\dot{p}_z) + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} (x\dot{p}_x + y\dot{p}_y + z\dot{p}_z) \right]$$

$$\nabla \left[\frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{p}}(t_0)}{r} \right] = \nabla \left[\frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{p}}(t_0)}{r^2} \right] \cong \frac{1}{r^2} \nabla (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{p}}(t_0))$$

$$= \frac{1}{r^2} \left[\mathbf{i} \left(\dot{p}_x + x \frac{\partial}{\partial x} \dot{p}_x + y \frac{\partial}{\partial x} \dot{p}_y + z \frac{\partial}{\partial x} \dot{p}_z \right) + \mathbf{j} \left(\dot{p}_y + x \frac{\partial}{\partial y} \dot{p}_x + y \frac{\partial}{\partial y} \dot{p}_y + z \frac{\partial}{\partial y} \dot{p}_z \right) + \mathbf{k} \left(\dot{p}_z + x \frac{\partial}{\partial z} \dot{p}_x + y \frac{\partial}{\partial z} \dot{p}_y + z \frac{\partial}{\partial z} \dot{p}_z \right) \right]$$

$\frac{\dot{p}_x}{r^2}, \frac{\dot{p}_y}{r^2}, \frac{\dot{p}_z}{r^2}$ を無視

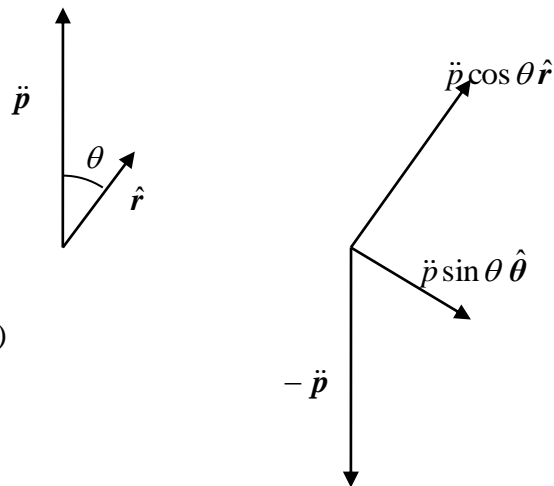
$$\cong \frac{1}{r^2} \left[\mathbf{i} \left(x \frac{\partial t_0}{\partial x} \frac{\partial \dot{p}_x}{\partial t_0} + y \frac{\partial t_0}{\partial x} \frac{\partial \dot{p}_y}{\partial t_0} + z \frac{\partial t_0}{\partial x} \frac{\partial \dot{p}_z}{\partial t_0} \right) + \mathbf{j}(\) + \mathbf{k}(\) \right]$$

$$= \frac{1}{r^2} \left[\mathbf{i} \left(x \frac{\partial \dot{p}_x}{\partial t_0} + y \frac{\partial \dot{p}_y}{\partial t_0} + z \frac{\partial \dot{p}_z}{\partial t_0} \right) \frac{\partial t_0}{\partial x} + \mathbf{j}(\) + \mathbf{k}(\) \right]$$

$$= \frac{1}{r^2} (\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{p}}) \nabla t_0$$

$$\nabla \times \mathbf{A} \propto \nabla \times \left(\frac{\dot{\mathbf{p}}(t_0)}{r} \right) = \frac{1}{r} (\nabla \times \dot{\mathbf{p}}(t_0)) - \dot{\mathbf{p}}(t_0) \times \nabla \frac{1}{r} \cong \frac{1}{r} (\nabla \times \dot{\mathbf{p}}(t_0))$$

$$\nabla \times \dot{\mathbf{p}}(t_0) \quad x \text{成分} \frac{\partial \dot{p}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{p}_y}{\partial z} = \frac{\partial t_0}{\partial y} \frac{\partial \dot{p}_z}{\partial t_0} - \frac{\partial t_0}{\partial z} \frac{\partial \dot{p}_y}{\partial t_0} = [(\nabla t_0) \times \ddot{\mathbf{p}}]_x$$



Ex.11.2 Larmor の公式

p.458 p.457 電気単極子輻射はないこと (電荷保存則より)

電荷がふくらんだり縮んだりしても放射しないこと (ガウスの法則より)

$$\begin{aligned}\nabla \frac{Q(t-r/c)}{r} &= \frac{1}{r} \nabla Q + Q \nabla \frac{1}{r} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial t_0}{\partial r} \frac{dQ}{dt_0} - \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \\ &= -\frac{1}{cr} \frac{\dot{Q}}{r} - \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \\ &= -\frac{\dot{Q}}{cr} \hat{\mathbf{r}} - \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}\end{aligned}$$

*重力波 最低次は四重極輻射

参考:電荷と質量の比がすべての粒子について等しい粒子系は電気双極子放射をしない

$$\mathbf{p} = \sum_i q_i \mathbf{r}_i = \sum_i \frac{q_i}{m_i} m_i \mathbf{r}_i = \frac{q}{m} \sum_i m_i \mathbf{r}_i = \frac{q}{m} \mathbf{R} \sum_i m_i \quad \mathbf{R} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} : \text{質量中心}$$

$$\dot{\mathbf{R}} = \text{const (運動量保存)} \text{より } \dot{\mathbf{p}} = \text{const} \quad \therefore \ddot{\mathbf{p}} = 0$$

11.2 Point Charges

$$(11.66) \quad \mathbf{E}_{\text{rad}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{u})^3} [\mathbf{R} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})]$$

$$(11.66) \rightarrow (11.68)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\text{rad}} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{u})^3} [\mathbf{R} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{(cR)^3} [\mathbf{R} \times (c\hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{a})] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} [\hat{\mathbf{R}} \times (\hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{a})] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} [(\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{a})\hat{\mathbf{R}} - (\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{R}})\mathbf{a}]\end{aligned}$$

$$\because \mathbf{u} = c\hat{\mathbf{R}} \quad \mathbf{R} \cdot \mathbf{u} = cR$$

$$(11.68) \rightarrow (11.69)$$

$$[(\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{a})\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{a}] \cdot [(\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{a})\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{a}] = (\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{a})^2 + a^2 - 2(\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{a})^2 = a^2 - (\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{a})^2$$

$$(11.70) \quad \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$$

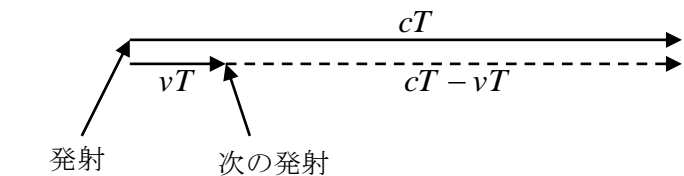
$$\begin{aligned}(11.72) \quad \frac{dP}{d\Omega} &= \left(\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}}{Rc} \right) \frac{1}{\mu_0 c} E_{\text{rad}}^2 R^2 = \left(\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}}{Rc} \right) \frac{1}{\mu_0 c} \left\{ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{u})^3} [\mathbf{R} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})] \right\}^2 R^2 \\ &= \left(\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}}{Rc} \right) \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{R^4}{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{u})^6} |\mathbf{R} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})|^2 \\ &= \frac{1}{\mu_0 c^2} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{R^3}{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{u})^5} |\mathbf{R} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})|^2 \\ &= \epsilon_0 \left(\frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2} \right) \frac{1}{(\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{u})^5} |\hat{\mathbf{R}} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})|^2 = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{|\hat{\mathbf{R}} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})|^2}{(\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{u})^5}\end{aligned}$$

11.2 Point charges Larmor の公式 $v=0$ の場合

$v \neq 0$ の場合

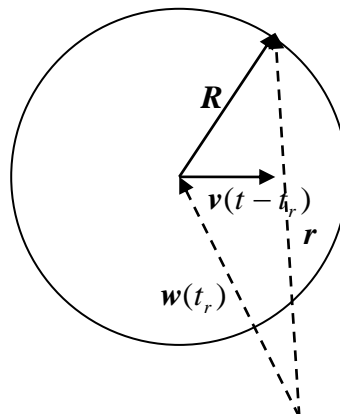
幾何学的因子の定性的説明 (ドップラー効果と同じ議論)

T : 発射周期 $N_g = \frac{1}{T}$



$$N_t = \frac{1}{\frac{cT - vT}{c}} = \frac{c}{c - v} N_g$$

$$N_g = \frac{c - v}{c} N_t = \left(1 - \frac{v}{c}\right) N_t = \left(1 - \frac{\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{v}}{c}\right) N_t$$



$$R = c(t - t_r)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r)$$

制動輻射、シンクロトロン輻射 (サイクロトロン放射) 角度依存性

板書 $v \ll c$ の場合と $v \sim c$ の場合 の角度依存性

57A

制動輻射 \mathbf{v} と \mathbf{a} が同一直線上 放射のパターンは \mathbf{a} の向きによらない \mathbf{v} と同じ向きに偏る
 相対論から理解できる

57B

ガイダンス資料で 直観的説明

同じように直観的に 縦電場は $1/r^2$ で減衰するが、横電場は $1/r$ になることを説明できるか

HP で Spring 8 などの説明 軌道放射光 X線自由電子レーザー SACLA 発振 世界最短

時間に依存する電磁気学スライドで全体の見直し

輻射の反作用力

電磁氣的質量 荷電粒子の電荷分布の広がりを見ると、自分自身とのクーロン相互作用がキャンセルせず、あたかも力を加えたときの抵抗力のように（慣性）働く その直観的説明

エネルギー保存から輻射の反作用力を求めるが、各瞬間で Larmor の公式の輻射パワーと釣り合うわけではない field reaction が正しい 各瞬間には acceleration field(輻射場)だけでなく、velocity field ともエネルギーをやり取りするので 周期運動(v, dv/dt が同じ値を繰り返す) または 無限遠方 (dv/dt=0) から荷電粒子が飛んできて、電荷分布と相互作用して無限遠 (dv/dt=0) に飛び去っていく条件ならば、差し引き輻射場の損失 (Larmor の公式) とのエネルギー保存を考えればよい これから輻射の反作用力を求めると da/dt に比例

輻射の反作用 (11.80)

速度が増大する奇妙な解を持つ

しかし式を導出したときの周期的という条件と $v \ll c$ という条件と整合しない (11.2.3 の導出では周期的という条件なし)

$$(11.80) \quad F_{\text{rad}} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \dot{a} = \tau m \dot{a} = \tau \dot{F} \quad \tau = 6 \times 10^{-24} \text{s} \quad \text{for electron} \quad (11.82)$$

$$a = a_0 \sin \omega t \quad \dot{a} = \omega a_0 \cos \omega t$$

ただし、 $v \ll c$

$$F_{\text{rad}} = \tau \omega m a_0 \cos \omega t \quad \omega = 2\pi f \ll \frac{1}{\tau} \quad f \ll \frac{1}{2\pi\tau} = 3 \times 10^{22} \text{Hz}$$

加速度の変化率が $3 \times 10^{22} \text{Hz}$ より十分小さければ F_{rad} は無視できる

問題提起

輻射の反作用はなぜ加速度の1回微分? その意味と Larmor の公式との整合性?
等加速度運動なら輻射しない?

考え方1

$$ma = F + m\tau \frac{da}{dt} \quad \text{の解}(F = \text{const}) \quad \frac{da}{dt} = \frac{1}{\tau} \left(a - \frac{F}{m} \right) \quad a - \frac{F}{m} = C e^{t/\tau} \quad a(t=0) = 0 \text{ とすると } C = -\frac{F}{m}$$

$$a = \frac{F}{m} (1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{輻射の反作用のために一定の力を印加しても}$$

$$\text{等加速度にならない} \rightarrow m\tau \frac{da}{dt} \neq 0 \quad \text{より輻射する(しかし、} a = \frac{F}{m} = \text{constなる特解もある)}$$

考え方2

$$\text{パワー} P = F_{\text{rad}} v = m\tau \frac{d^2 v}{dt^2} v = m\tau \frac{d}{dt} \left(\frac{dv}{dt} v \right) - m\tau \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \quad \text{ここで第2項} = \text{Larmorの公式}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P dt = m\tau \left[\frac{dv}{dt} v \right]_{-\infty}^{\infty} - m\tau \int \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 dt$$

$t = \pm\infty$ で相互作用しない孤立した粒子で、有限の時間内のみ力を受ける場合、

$$\frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{at } t = \pm\infty \text{ より第1項} = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} P dt = -m\tau \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 dt = -m\tau a^2 (t_2 - t_1) \quad P_{\text{average}} = -m\tau a^2 : \text{Larmorの公式}$$

粒子が周期運動している場合も、その周期 t_1 から t_2 の間で積分すれば $m\tau \left[\frac{dv}{dt} v \right]_{t_1}^{t_2} = 0$ で同じ結果

無限の過去から無限の未来にわたって等加速度運動している荷電粒子の場合(双曲線運動 pp.542-543 519-520, Ex.12.10) 輻射するだろうか? 輻射しないだろうか?

パウリが著書の「相対性理論」で双曲線運動をする荷電粒子は輻射しない、と論じている

出版社の文庫版の内容説明より: アインシュタインの一般相対性理論が1916年に発表され、人々が競ってその解説を求めたとき、パウリは『数理学百科事典』の一項目でそれに応えた。理論から5年、パウリは当時まだ21歳で、先行する論文を簡潔に引用紹介しながら、的確な批評を加え、むだなく淡々と特殊相対性理論から一般相対性理論までを解説しきった。アインシュタイン本人も絶賛し、本書訳者の物理学者内山龍雄をして「研究をさし置いてでも訳したい」と言わしめた。

以来100年、いまだにこの問題に関する論文が出ている。

結論: パウリは間違っていて、「双曲線運動をする荷電粒子は輻射する」

無限の過去から無限の未来にわたる双曲線(等加速度)運動の場合、 $m\tau \int \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 dt \neq 0$ 、 $\left[\frac{dv}{dt}v\right]_{t_1}^{t_2} \neq 0$?

$\frac{dv}{dt} = \text{const}$ でvは増加し続ける vがcに近づくとvはほとんど変化しない? (ここは相対論的表式必要)

p.542 p.519
$$u = \frac{(F/m)t}{\sqrt{1+(Ft/mc)^2}} \quad (12.60)$$

もう一つの大問題: 等価原理との整合性

一様重力場で自由落下する観測者は、無重力空間にいるのと区別がつかない。電荷が一様重力場で自由落下するとき、輻射するだろうか? (何らかの方法で電荷を静止させて、観測者が自由落下すると、電荷が等加速度運動しているように見えるが、このとき電荷は輻射しないはずである。あるいは、電荷とともに自由落下している人からは電子は等速度運動しているように見える。これらのことと矛盾しないか)

等加速度運動で輻射しないならば等価原理に反しない(重力による効果と加速度運動による効果を区別できない)が、輻射するならば区別できるので等価原理に反する(一様重力場のエレベータの中で床の垂直抗力で静止している電子と1gの定加速度で加速されているエレベータの中の電子が区別できる 後者のみが輻射するならば)

Ex.11.4 力学振動子の輻射減衰

$$m\ddot{x} = F_{spring} + F_{rad} + F_{driving} \quad F_{spring} = -m\omega_0^2 x \quad F_{rad} = m\tau \frac{da}{dt} = m\tau \ddot{x} \quad x = x_0 \cos(\omega t + \delta)$$

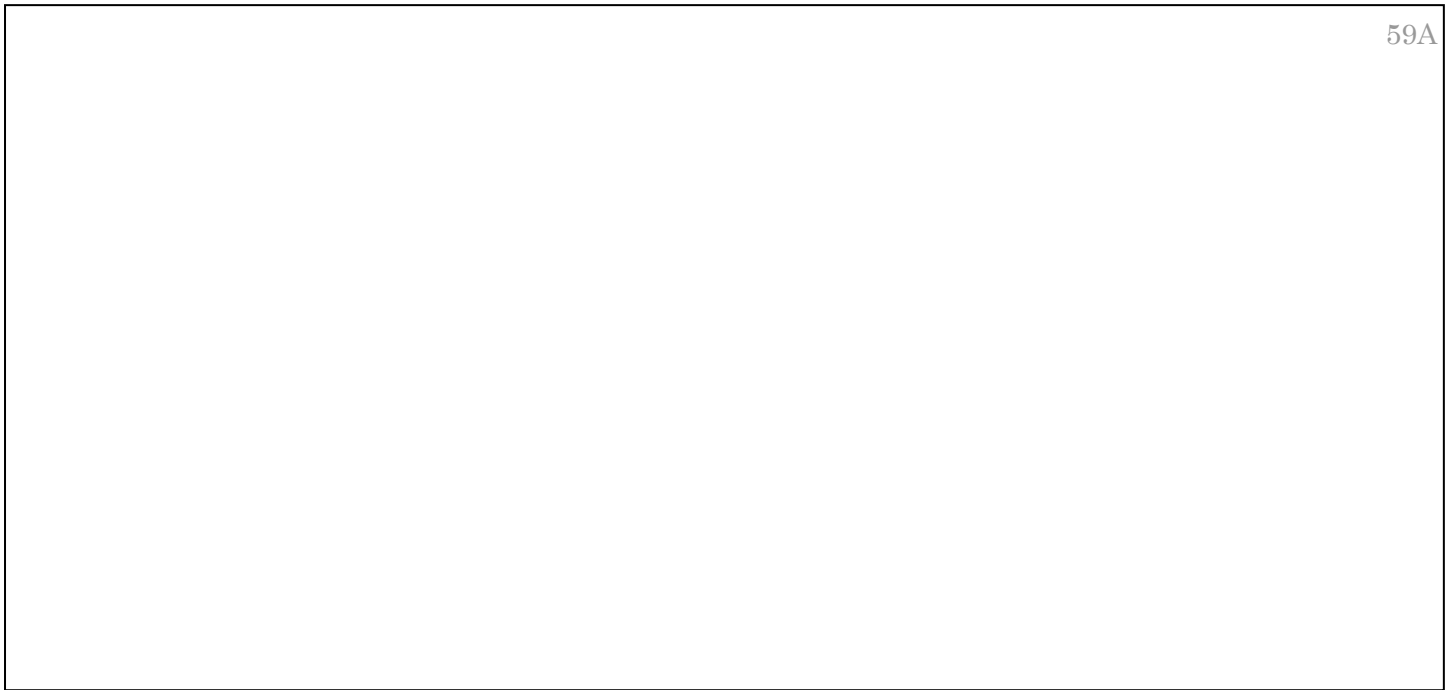
$$\ddot{x} = -\omega^2 \dot{x} \quad F_{rad} = -m\tau\omega^2 \dot{x} = -m\gamma \dot{x} \quad \gamma = \tau\omega^2$$

11.2.3 Radiation reaction の物理的メカニズム pp.492-495 pp.468-471

リエナール・ヴィーヘルトポテンシャルから導出 (自己力)

自己場の衣を着た質量 $d \rightarrow 0$ で無限大 観測されるのは $-\infty$ の m_0 と相殺して有限の質量

図 11.17 で力の向きは? 加速する向きに働くように見えるが... $ct-x$ のダイアグラムを描き、ダンベル型の荷電粒子が 静止している場合、加速運動している場合の自己力 を示し、抵抗になる (質量が増える方向) ことを示す



Radiation reaction の効果は $v \ll c$ では小さいが相対論的粒子の場合はその限りでないこと

$$Rc - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{u} \quad \text{with } \mathbf{u} \equiv c\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{v}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{u})^3} [(c^2 - v^2)\mathbf{u} + \mathbf{R} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{u})^3} [(c^2 - v^2)\mathbf{u} + (\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})\mathbf{u} - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{u})\mathbf{a}] \quad (10.72) \quad v=0 \rightarrow (11.85) \end{aligned}$$

\mathbf{a} : x 軸方向加速度

$$(11.88) \quad \mathbf{u} = c\hat{\mathbf{R}} \quad |\mathbf{u}| = c \quad u_x = c \frac{l}{R}$$

$$\begin{aligned} (11.89) \quad E_{1x} &= \frac{q/2}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{(cR)^3} [(c^2 + (l\hat{x} + d\hat{y}) \cdot \mathbf{a})u_x - (cR)a] \\ &= \frac{q/2}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{(cR)^3} [(c^2 + la)c \frac{l}{R} - (cR)a] = \frac{q/2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2 R^3} [(c^2 + la)l - (R^2)a] \\ &= \frac{q/2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2 (l^2 + d^2)^{3/2}} [(c^2 + la)l - (l^2 + d^2)a] \\ &= \frac{q}{8\pi\epsilon_0 c^2} \frac{lc^2 - ad^2}{(l^2 + d^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

$$\dot{x}(t_r) = 0 \quad \text{instantaneously at rest} \rightarrow (11.91)$$

$$d = \sqrt{(cT)^2 - l^2} = \sqrt{(cT)^2 - \left(\frac{1}{2}aT^2 + \frac{1}{6}\dot{a}T^3 + \dots\right)^2} = cT \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2c}aT + \frac{1}{6c}\dot{a}T^2 + \dots\right)^2}$$

$$\begin{aligned} (11.94) \quad l &= \frac{1}{2}aT^2 + \frac{1}{6}\dot{a}T^3 + \dots = \frac{1}{2}a \left(\frac{1}{c}d + \frac{a^2}{8c^5}d^3 + ()d^4 + \dots \right)^2 + \frac{1}{6}\dot{a} \left(\frac{1}{c}d + \frac{a^2}{8c^5}d^3 + ()d^4 + \dots \right)^3 + \dots \\ &= \frac{1}{2}a \left(\frac{1}{c^2}d^2 + 2\frac{1}{c}d \frac{a^2}{8c^5}d^3 + \dots \right) + \frac{1}{6}\dot{a} \left(\frac{1}{c^3}d^3 + 3\left(\frac{1}{c}d\right)^2 \frac{a^2}{8c^5}d^3 + \dots \right) + \dots \\ &= \frac{1}{2}a \left(\frac{1}{c^2}d^2 \right) + \frac{1}{6}\dot{a} \left(\frac{1}{c^3}d^3 \right) + ()d^4 + \dots \end{aligned}$$

$$(11.95) \quad lc^2 - ad^2 = -\frac{a}{2}d^2 + \frac{\dot{a}}{6c}d^3 + ()d^4 + \dots$$

$$l^2 + d^2 = \left(\frac{a^2}{4c^4}d^4 + \dots\right) + d^2 = d^2 + ()d^4 + \dots$$

$$\frac{lc^2 - ad^2}{(l^2 + d^2)^{3/2}} = \frac{-\frac{a}{2}d^2 + \frac{\dot{a}}{6c}d^3 + ()d^4 + \dots}{d^3} = -\frac{a}{2d} + \frac{\dot{a}}{6c} + ()d + \dots$$

$$\begin{aligned} (11.96) \quad \mathbf{F}_{\text{self}} &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{a(t_r)}{4c^2d} + \frac{\dot{a}(t_r)}{12c^3} + ()d + \dots \right] \hat{\mathbf{x}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{a(t) - \dot{a}(t)d/c}{4c^2d} + \frac{\dot{a}(t)}{12c^3} + ()d + \dots \right] \hat{\mathbf{x}} \\ &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{a(t)}{4c^2d} + \frac{\dot{a}(t)}{4c^3} + \frac{\dot{a}(t)}{12c^3} + ()d + \dots \right] \hat{\mathbf{x}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{a(t)}{4c^2d} + \frac{\dot{a}(t)}{3c^3} + ()d + \dots \right] \hat{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

$$(11.97) \quad \mathbf{F}_{\text{self}} = 2m_0 a \quad \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{a(t)}{4c^2d} + \frac{\dot{a}(t)}{3c^3} + ()d + \dots \right] = 2m_0 a$$

$$\left(2m_0 + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4c^2d} \right) a = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\dot{a}(t)}{3c^3} + ()d + \dots \right] \quad m = 2m_0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4dc^2} = 2m_0 + m' \quad \text{自己場の衣を着た質量}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(q/2)^2}{d} = m'c^2$$

繰り込まれた質量

12.1 特殊相対論

12.1.1 任意の等速度運動する慣性系で物理法則は等しい

スライド 一様磁場下に静止した荷電粒子 の矛盾

p.503 p.480 の2つの立場は偶然の一致か? 必然であると考えたのがアインシュタイン

電磁気学の式に出てくる速度はエーテルに対する速度と考えられていた しかしエーテルの存在は検出できず

アインシュタインの2つの要請

任意の慣性系から真空中の光速速度 不変

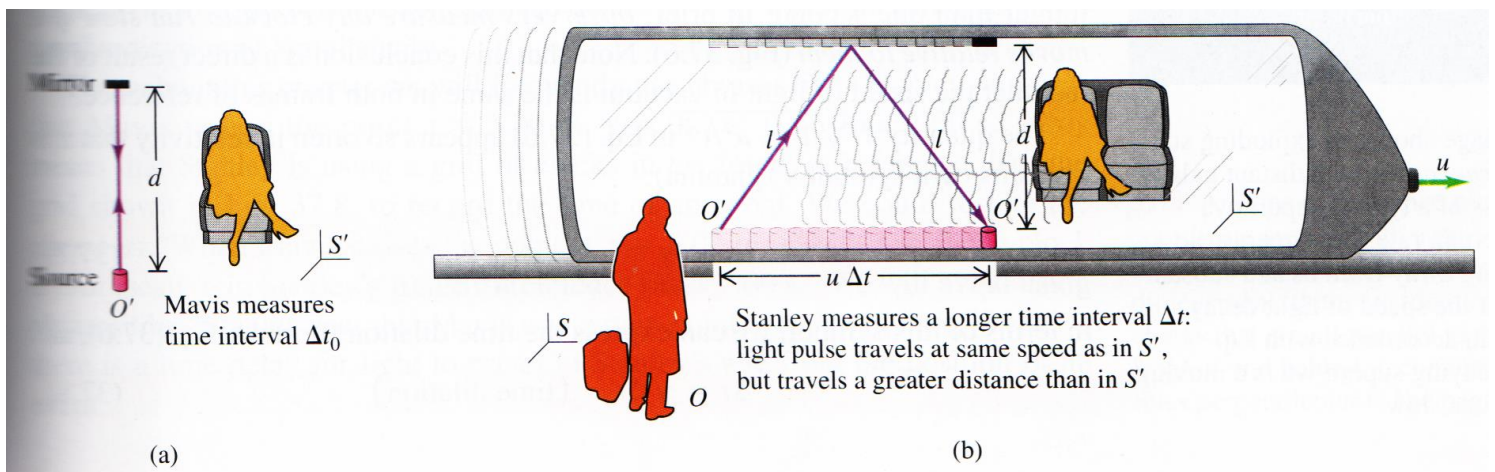
驚くべきこと 空気を媒質とする音波との比較 媒質自身が動いたり、観測者が動くと、音速度にその速度が加算される のと対照

p.507 p.484 速度の加法則 相対性理論では光速速度を超えない 宇宙の制限速度

7/11 第13回

37.5 (a) Mavis, in frame of reference S' , observes a light pulse emitted from a source at O' and reflected back along the same line. (b) Stanley, in frame of reference S , sees the same light pulse follow a diagonal path. The positions of O' at the times of departure and return of the pulse are shown.

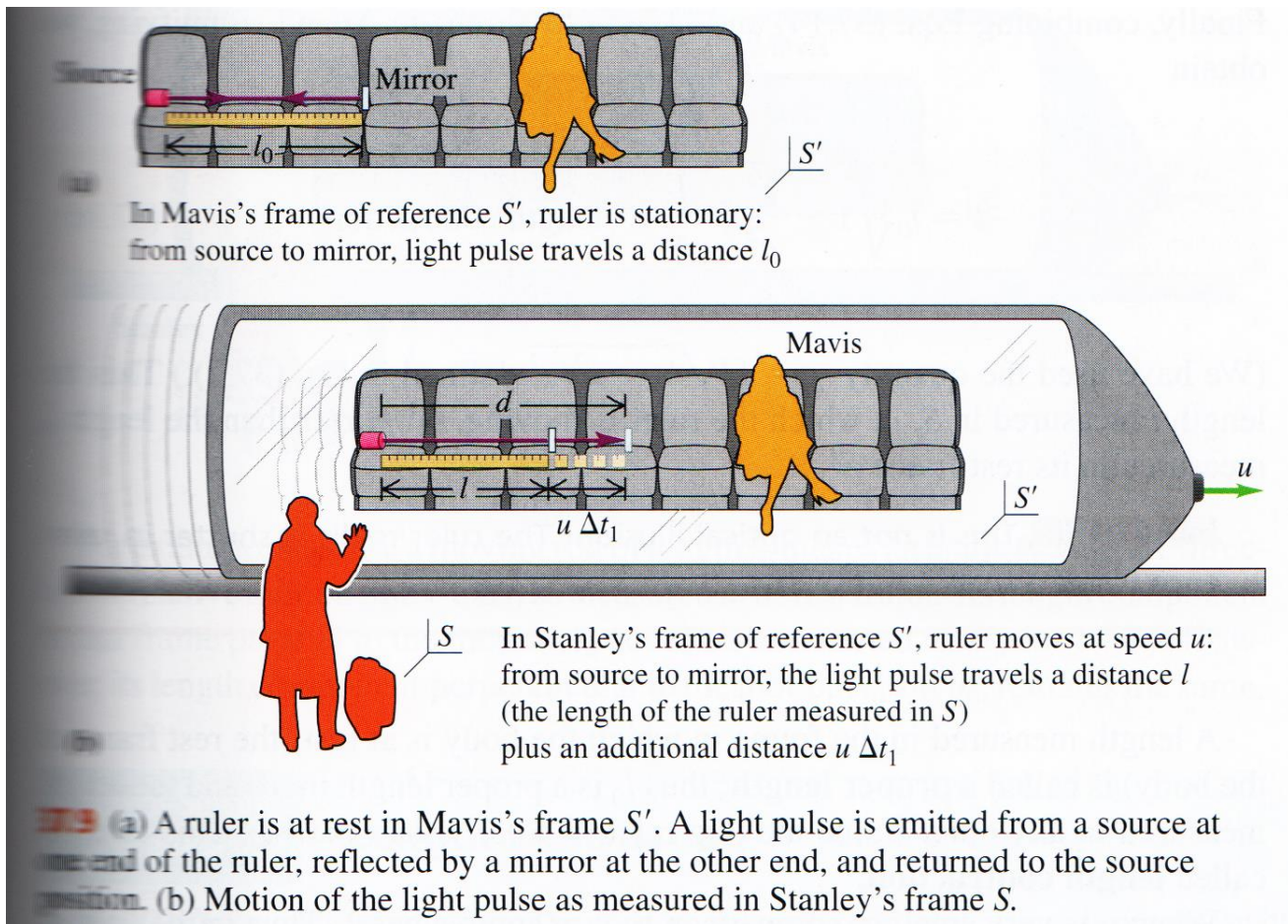
University Physics 11th edition



We may generalize this important result. In a particular frame of reference, suppose that two events occur at the same point in space. The time interval between these events, as measured by an observer at rest in this same frame (which we call the *rest frame* of this observer), is Δt_0 . Then an observer in a second frame moving with constant speed u relative to the rest frame will measure the time interval to be Δt , where

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (\text{time dilation}) \quad (37.6)$$

We recall that no inertial observer can travel at $u = c$ and note that $\sqrt{1 - u^2/c^2}$ is imaginary for $u > c$. Thus Eq. (37.6) gives sensible results only when $u < c$. The denominator of Eq. (37.6) is always smaller than 1, so Δt is always *larger* than Δt_0 . Thus we call this effect **time dilation**.



$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{l_0}{\gamma} \quad (\text{length contraction}) \quad (37.16)$$

(We have used the quantity $\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ defined in Eq. (37.7).) Thus the length l measured in S , in which the ruler is moving, is *shorter* than the length l_0 measured in its rest frame S' .

CAUTION This is *not* an optical illusion! The ruler really is shorter in reference frame S than it is in S' .

A length measured in the frame in which the body is at rest (the rest frame of the body) is called a **proper length**; thus l_0 is a proper length in S' , and the length measured in any other frame moving relative to S' is *less than* l_0 . This effect is called **length contraction**.

12.1.2 相対論の幾何学

同時性の相対性

時間の遅れと長さの収縮 time dilation (時間の膨張) length contraction (長さの収縮)

導出の説明 式を書いて、非対称性の原因は？

Ex. 12.2 双子のパラドックス

Ex. 12.3 小屋とはしごのパラドックス pp.516-517 pp.493-494

時間の遅れと対照的に、ローレンツ収縮の直接実験的観測はない

時間の遅れと長さの収縮の非対称性はどこから来るか？

12.1.3 ローレンツ変換

12.1.4 時空の構造

不変量 事象間の間隔 計量テンソルか、共変、反変ベクトルで定義 スライドで説明

ミンコフスキ時空 時間的、空間的、光的間隔 の意味 因果律

時間的間隔にある2点間のローレンツ変換不変量 固有時間

空間的間隔にある2点間のローレンツ変換不変量 固有長さ

12.2 相対論的力学 p.532 p.509

12.2.1 固有時間、固有速度

固有時間 τ 与えられた対象と一緒に動いている時計の示す時間

動いている物体の固有時間はつねに静止系における対応する時間間隔よりも短い

動いている時計は静止している時計よりもゆっくり進む

(自分が身につけている時計が刻む時間) 以下 () 内はスライド参照 (

事象を表す4元ベクトル座標 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき、 $x^0 = c\tau$ τ :固有時間

観測者に対して相対的に移動する物体の4元ベクトル座標 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$ のとき、

簡単のため空間次元を1次元として $\begin{pmatrix} ct \\ vt \end{pmatrix}$ と書くと (vt :移動距離 ct :観測者の経過時間)

ローレンツ変換不変量 $\sqrt{S} = \sqrt{c^2t^2 - v^2t^2} = ct\sqrt{1 - v^2/c^2}$: $\tau = t\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 固有時間が求まる

事象を表す4元座標と同じ変換をするベクトルを4元ベクトル

通常 $\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ は4元ベクトルではない ($d\mathbf{x}$ も dt も変換するため)

固有速度 $\boldsymbol{\eta} = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau}$ は4元ベクトル ($d\tau$ は不変量のため、 $d\mathbf{x}$ と同じ変換)

スライド 異なる慣性系で見たとき ある座標点はどう変換するか その不変量が固有時間・固有距離
時間の遅れと長さの収縮非対称の理由

時間の遅れの解釈 すべての物体は時空間を光速で移動 (固有速度=光速)

12.2.2 相対論的エネルギーと運動量

速度の4元ベクトルに \mathbf{m} をかけて相対論的運動量 その不変量 質量 その時間成分=エネルギー

任意の慣性系で 運動量・エネルギーが保存

$\mathbf{m}=0$ のとき、 $\mathbf{E}=\mathbf{p}c$

p.536 p.513 (ローレンツ変換)不変量 invariant と保存量 conserved quantity の区別

12.2.3 12.2.4 相対論的運動学 p.542-543 p.519-520 相対論的運動量 \mathbf{p} を用いれば $\mathbf{F}=\mathbf{dp}/dt$ が成り立つ

ミンコフスキ力

hyperbolic motion 双曲線運動

$$\alpha = mc^2 / F$$

$$x = \alpha \left[\sqrt{1 + \frac{(ct)^2}{\alpha^2}} - 1 \right] \quad (x + \alpha)^2 = \alpha^2 \left[1 + \frac{(ct)^2}{\alpha^2} \right] \quad (x + \alpha)^2 - (ct)^2 = \alpha^2 \quad (x + \alpha + ct)(x + \alpha - ct) = \alpha^2$$

$$x \cong \alpha \left[1 + \frac{1}{2} \frac{(ct)^2}{\alpha^2} - 1 \right] = \alpha \frac{1}{2} \frac{(ct)^2}{\alpha^2} = \frac{(ct)^2}{2\alpha} = \frac{c^2 t^2}{2mc^2} F = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2$$

$$\begin{aligned} (12.63) \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{u} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right) \cdot \mathbf{u} \\ &= \frac{m}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{u} + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right) m\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \\ &= \frac{m}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{u} - \frac{1}{2} \frac{1}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} \frac{d}{dt} (-u^2/c^2) m\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \\ &= \frac{m}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{2} \frac{1/c^2}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} \frac{d}{dt} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) m\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \\ &= \frac{m}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{u} + \frac{m\mathbf{u}^2/c^2}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} \\ &= m \left[\frac{1}{(1-u^2/c^2)^{1/2}} + \frac{u^2/c^2}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} \right] \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} \\ &= m \left[\frac{1-u^2/c^2 + u^2/c^2}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} \right] \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{m\mathbf{u}}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right) &= mc^2 \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} \frac{d}{dt} \left(-\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{c^2} \right) \right] = \frac{m\mathbf{u}}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} \end{aligned}$$

参考：固有時間(τ)で表した等加速度運動(双曲線運動)

$$u(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$p = \frac{mu}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = Ft \quad a = F/m$$

$$u(t) = \frac{(F/m)t}{\sqrt{1+(Ft/mc)^2}} = \frac{at}{\sqrt{1+(at/c)^2}} \quad (12.61)$$

$$x(t) = \frac{mc^2}{F}[\sqrt{1+(Ft/mc)^2} - 1] = \frac{c^2}{a}[\sqrt{1+(at/c)^2} - 1] \quad (12.62)$$

$$d\tau = \sqrt{1-u(t)^2/c^2} dt \quad (12.37)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{at}{\sqrt{1+(at/c)^2}}$$

$$d\tau = \sqrt{1-u(t)^2/c^2} dt = \sqrt{1-\frac{(at/c)^2}{1+(at/c)^2}} dt = \frac{dt}{\sqrt{1+(at/c)^2}}$$

$$at/c = T \quad adt/c = dT \quad dt = cdT/a$$

$$ad\tau = \frac{cdT}{\sqrt{1+T^2}} \quad a\tau = c \operatorname{arcsinh}(T) \quad T = \sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right) \quad at/c = \sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right)$$

$$x(t) = \frac{c^2}{a}[\sqrt{1+(\sinh(\frac{a\tau}{c}))^2} - 1] = \frac{c^2}{a}[\cosh(\frac{a\tau}{c}) - 1]$$

$$u(t) = \frac{at}{\sqrt{1+(at/c)^2}} = \frac{c \sinh(\frac{a\tau}{c})}{\sqrt{1+(\sinh(\frac{a\tau}{c}))^2}} = c \tanh\left(\frac{a\tau}{c}\right)$$

光速 $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s} = 1 \text{ 光年/年} = 3 \times 10^8 \text{ m/s} \times 3600 \times 24 \times 365 = 94608000 \times 10^8 \text{ m/year}$

重力加速度 $g = 9.8 \text{ m/s}^2 = 9.8 \times (3600 \times 24 \times 365)^2 \text{ m/year}^2 = 97462891 \times 10^8 \text{ m/year}^2 \cong 1 \text{ 光年/年}^2$

$a = g$ のとき

$$x(t) = \frac{c^2}{g}[\cosh(\frac{g\tau}{c}) - 1] \cong \frac{(1 \text{ 光年/年})^2}{1 \text{ 光年/年}^2} [\cosh(\frac{1 \text{ 光年/年}}{1 \text{ 光年/年}} \tau) - 1] = (1 \text{ 光年})[\cosh(\tau/\text{年}) - 1]$$

$$u(t) \cong c \tanh(\tau/\text{年}) \quad t = \frac{c}{a} \sinh(\frac{a\tau}{c}) = \frac{c}{g} \sinh(\frac{g\tau}{c}) \cong (1 \text{ 年}) \sinh(\tau/\text{年})$$

航路の半分の距離(半分の期間)で加速し、残り半分で減速するとき、

宇宙船中の旅行者にとっての時間 τ 、到達距離 x 、中間地点での速さ u 、地球上での時間 t

τ (年)	x (光年)	u/c	t (年)
0.5	0.063	0.24	0.505
2	1.09	0.76	2.35
5	10.26	0.987	12.1
10	146	0.9999	148
20	22024	0.999999996	22026
30	3.27×10^6		3.27×10^6
40	4.85×10^8		4.85×10^8
50	7.2×10^{10}		7.2×10^{10}

アルファケンタウリ 4.39 光年
 銀河系直径 10 万光年
 大マゼラン雲まで 16 万 3000 光年
 アンドロメダ銀河まで 250 万光年
 宇宙の年齢 138 億年

12.3 相対論的電磁気学

12.3.1 磁気の法則は静電気の法則と相対論のみから導ける

異なる慣性系から見ると 電気的中性だった導線が帯電 静電気力が生じる
これと矛盾しないように電流と運動する荷電粒子の間の磁気力が必要
スライドの例で説明

導線が帯電しても全体の電荷保存則は問題ないこと

12.3.2 電場のローレンツ変換

2つの無限に大きい極板間の電場で、電荷密度が異なる慣性系で変化することから説明(教科書)
遅延ポテンシャルで導いた等速運動する荷電粒子の電場が、現在の位置から観測点に向かう向きになっている理由

p.555 p.532 Ex. 12.14

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= 1/\sqrt{1-v_0^2/c^2} \quad R_x = R \cos \theta \quad \sqrt{R_y^2 + R_z^2} = R \sin \theta \\ E_x &= E_{x0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\gamma_0 R_x}{(\gamma_0^2 R_x^2 + R_y^2 + R_z^2)^{3/2}} \\ E_y &= \gamma_0 E_{y0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma_0 q y_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma_0 q R_x}{(\gamma_0^2 R_x^2 + R_y^2 + R_z^2)^{3/2}} \\ E_z &= \gamma_0 E_{z0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma_0 q z_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma_0 q R_z}{(\gamma_0^2 R_x^2 + R_y^2 + R_z^2)^{3/2}} \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma_0 q \mathbf{R}}{(\gamma_0^2 R^2 \cos^2 \theta + R^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{q}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}}{\left(\frac{R^2 \cos^2 \theta}{1-v_0^2/c^2} + R^2 \sin^2 \theta\right)^{3/2}} \mathbf{R} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1-v_0^2/c^2)^{3/2} \frac{q}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}}{[R^2 \cos^2 \theta + (1-v_0^2/c^2)R^2 \sin^2 \theta]^{3/2}} \mathbf{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1-v_0^2/c^2)q}{[1-(v_0^2/c^2)\sin^2 \theta]^{3/2}} \frac{\mathbf{R}}{R^3}\end{aligned}$$

磁場は相対論を満たすための補助的なもの? $\mathbf{B}=\mathbf{E}/c$?

\mathbf{E} と \mathbf{B} を同じスケールで扱う単位系もある

点磁荷 $\mathbf{Q}_m=\mathbf{Q}c$ c 光速で定義 があれば磁場と電場に関わる式は完全に対称的になり得る

12.3.3 電磁場テンソル

12.3.4 テンソル表記の電磁気学

12.3.5 相対論的ポテンシャル