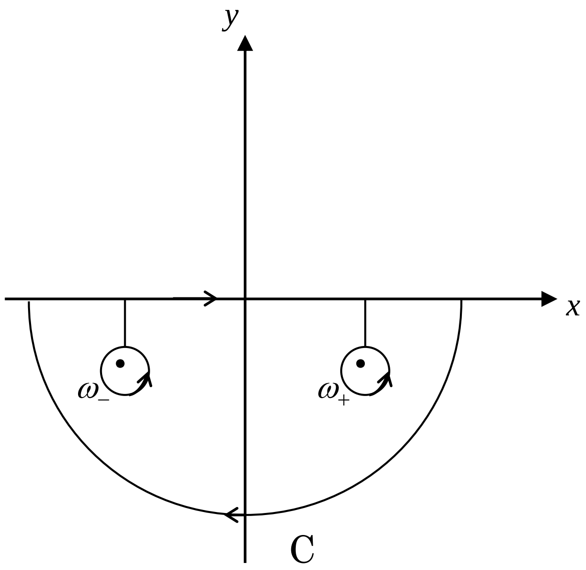
ローレンツモデルの時間応答関数



$$\chi(\omega)\propto\frac{1}{{\omega_0}^2-\omega^2-i\omega\Gamma_0}$$

$$\chi(t)=\frac{1}{2\pi}\int\chi(\omega)e^{-i\omega t}d\omega\propto\int\frac{e^{-i\omega t}}{{\omega_0}^2-\omega^2-i\omega\Gamma_0}d\omega$$

$${\omega_0}^2-\omega^2-i\omega\Gamma_0=0$$

$$\omega=\frac{-i\Gamma_0\pm\sqrt{-{\Gamma_0}^2+4{\omega_0}^2}}{2}=\omega_+,\omega_-$$

$$\frac{1}{{\omega_0}^2-\omega^2-i\omega\Gamma_0}=-\frac{1}{(\omega-\omega_+)(\omega-\omega_-)}$$

$\omega=z=x+iy$ とすると、

$t>0$ のとき下半平面で正則、図の積分路をとる

$$\oint_C\frac{e^{-izt}}{{\omega_0}^2-z^2-i\Gamma_0 z}dz=0$$

$$z=Re^{i\theta}\qquad dz=i\,Re^{i\theta}\,d\theta$$

$$\int_{-R}^{R}\frac{e^{-ixt}}{{\omega_0}^2-x^2-i\Gamma_0 x}dx+\int_0^{-\pi}i\,Re^{i\theta}d\theta\frac{e^{-i\,Re^{i\theta}t}}{{\omega_0}^2-R^2e^{i2\theta}-i\Gamma_0\,Re^{i\theta}}\longrightarrow\quad e^{-iR\cos\theta\,t+R\sin\theta\,t}\qquad\sin\theta<0,t>0$$

$$-\int_0^{2\pi}i\delta e^{i\theta}d\theta\frac{e^{-i(\omega_-+\delta e^{i\theta})t}}{(\omega_-+\delta e^{i\theta}-\omega_+)(\omega_-+\delta e^{i\theta}-\omega_-)}-\int_0^{2\pi}i\delta e^{i\theta}d\theta\frac{e^{-i(\omega_++\delta e^{i\theta})t}}{(\omega_++\delta e^{i\theta}-\omega_+)(\omega_++\delta e^{i\theta}-\omega_-)}=0$$

$z=\omega_-+\delta e^{i\theta}$ $\qquad\qquad$ $z=\omega_++\delta e^{i\theta}$

$R\to\infty,\delta\to0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ixt}}{{\omega_0}^2-x^2-i\Gamma_0 x}dx-\int_0^{2\pi}id\theta\frac{e^{-i\omega_-t}}{\omega_--\omega_+}-\int_0^{2\pi}id\theta\frac{e^{-i\omega_+t}}{\omega_+-\omega_-}=0$$

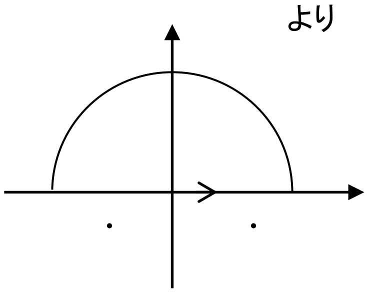
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega t}}{{\omega_0}^2-\omega^2-i\omega\Gamma_0}d\omega=2\pi i\frac{e^{-i\omega_-t}}{\omega_--\omega_+}+2\pi i\frac{e^{-i\omega_+t}}{\omega_+-\omega_-}\qquad\omega_+-\omega_-=\sqrt{4{\omega_0}^2-{\Gamma_0}^2}$$

$$=2\pi i\frac{e^{-\frac{\Gamma_0}{2}t}}{\sqrt{4{\omega_0}^2-{\Gamma_0}^2}}\left(e^{-i\frac{\sqrt{4{\omega_0}^2-{\Gamma_0}^2}}{2}t}-e^{+i\frac{\sqrt{4{\omega_0}^2-{\Gamma_0}^2}}{2}t}\right)$$

$$=2\pi\frac{e^{-\frac{\Gamma_0}{2}t}}{\sqrt{{\omega_0}^2-\frac{{\Gamma_0}^2}{4}}}\sin\left(\sqrt{{\omega_0}^2-\frac{{\Gamma_0}^2}{4}}\ t\right)$$

$$\chi(t)=\frac{1}{2\pi}\int\chi(\omega)e^{-i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{N_0}{V}\frac{q^2}{m}\int\frac{e^{-i\omega t}}{{\omega_0}^2-\omega^2-i\omega\Gamma_0}d\omega=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{N_0}{V}\frac{q^2}{m}\frac{e^{-\frac{\Gamma_0}{2}t}}{\sqrt{{\omega_0}^2-\frac{{\Gamma_0}^2}{4}}}\sin\left(\sqrt{{\omega_0}^2-\frac{{\Gamma_0}^2}{4}}\ t\right)$$

$t<0$ のときは $\qquad$ より $\quad\chi(t)=0$



補足：ローレンツモデルの近似式

$\omega \approx \omega_0$付近　$\chi(\omega) \propto \dfrac{1}{\omega_0{}^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_0} = \dfrac{1}{(\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) - i\omega\Gamma_0}$

$$\approx \frac{1}{(\omega_0 - \omega)2\omega_0 - i\omega_0\Gamma_0} \propto \frac{1}{(\omega_0 - \omega) - i\Gamma_0/2} = \frac{1}{(\omega_0 - \omega) - i/T_2} \quad (\Gamma_0/2 = 1/T_2)$$

これは　$i\theta(t)e^{-i\omega_0 t - t/T_2}$　のフーリエ変換　$\theta(t)$: ステップ関数

時間応答関数が実関数でないのはOKか？

以下に説明

$$\chi(t) = \frac{1}{2\pi}\int \chi(\omega)e^{-i\omega t}d\omega = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{N_0}{V}\frac{q^2}{m}\frac{e^{-\frac{\Gamma_0}{2}t}}{\sqrt{\omega_0{}^2 - \frac{\Gamma_0{}^2}{4}}}\sin\left(\sqrt{\omega_0{}^2 - \frac{\Gamma_0{}^2}{4}}\ t\right) \quad \text{for t > 0} \qquad \chi(t) = 0 \text{ for t < 0}$$

の近似式 $\chi(t) \propto \theta(t)e^{-t/T_2}\sin(\omega_0\ t) = -\dfrac{i}{2}\theta(t)e^{-t/T_2}(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t})$

第1項のフーリエ変換$\propto \int[-i\theta(t)e^{-t/T_2}e^{i\omega_0 t}]e^{i\omega t}dt = \dfrac{1}{(\omega_0 + \omega) + i/T_2}$非共鳴項(第1項に比べ$\omega \approx \omega_0$のとき無視できる

$\omega \approx \omega_0$のときは第2項のみ考えればよい（第2項が優勢な項として残る）

補足：

$$\chi(t) = \frac{1}{2\pi}\int \chi(\omega)e^{-i\omega t}d\omega = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{N_0}{V}\frac{q^2}{m}\frac{e^{-\frac{\Gamma_0}{2}t}}{\sqrt{\omega_0{}^2 - \frac{\Gamma_0{}^2}{4}}}\sin\left(\sqrt{\omega_0{}^2 - \frac{\Gamma_0{}^2}{4}}\ t\right) \quad \text{for t > 0} \qquad \chi(t) = 0 \text{ for t < 0}$$

のとき

$$\chi(\omega) \propto \frac{1}{\omega_0{}^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_0}$$

$$\chi(t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{N_0}{V}\frac{q^2}{m}\frac{e^{-\frac{\Gamma_0}{2}t}}{\omega_1}\sin(\omega_1\ t) \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0{}^2 - \frac{\Gamma_0{}^2}{4}} \quad \omega_1{}^2 = \omega_0{}^2 - \frac{\Gamma_0{}^2}{4} \quad \omega_0{}^2 = \omega_1{}^2 + \frac{\Gamma_0{}^2}{4}$$

のとき

$$\chi(\omega) \propto \frac{1}{\omega_0{}^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_0} = \frac{1}{\omega_1{}^2 + \frac{\Gamma_0{}^2}{4} - \omega^2 - i\omega\Gamma_0}$$