ゲージ不変性と電荷保存則

最小作用の原理

作用$S=\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt$**が極小値をとるように運動**

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}=0 \qquad L=\frac{1}{2}mv^2-U \quad v=\dot{q}\to m\dot{v}=-\nabla U$$ **運動方程式**

ラグランジアンに座標と時間の任意の関数の時間についての完全導関数（全微分）を付け加えてもよい。なぜならば

$$L'(q,\dot{q},t)=L(q,\dot{q},t)+\frac{d}{dt}f(q,t)$$

$$S'=\int_{t_1}^{t_2} L'dt=\int_{t_1}^{t_2} Ldt+\int_{t_1}^{t_2}\frac{df}{dt}dt=S+f(q^{(2)},t_2)-f(q^{(1)},t_1)$$

変分をとる（始点と終点は固定）。

$$\delta S'=\delta S$$

電磁場の中の粒子

$$L=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+e\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}-eV$$

$$\downarrow$$

$$\frac{v}{c}<<1 \quad -mc^2+\frac{1}{2}mv^2$$

電荷保存$\frac{de}{dt}=0$**ならば**

$$\frac{d}{dt}(e\lambda)=\frac{de}{dt}\lambda+e\frac{d\lambda}{dt}=e\left(\frac{\partial\lambda}{\partial t}+\frac{dx}{dt}\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{dy}{dt}\frac{\partial\lambda}{\partial y}+\frac{dz}{dt}\frac{\partial\lambda}{dz}\right)=e\left(\frac{\partial\lambda}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\lambda\right)$$

電荷が保存すればゲージ変換$\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\nabla\lambda \quad V'=V-\frac{\partial\lambda}{\partial t}$**で**$\delta S$**が不変なことを示す**

$$\begin{aligned}
L'&=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+e\boldsymbol{A}'\cdot\boldsymbol{v}-eV'\\
&=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+e\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}+e(\nabla\lambda)\cdot\boldsymbol{v}-eV+e\frac{\partial\lambda}{\partial t}\\
&=L+e\boldsymbol{v}\cdot(\nabla\lambda)+e\frac{\partial\lambda}{\partial t}\\
&=L+\frac{d}{dt}(e\lambda)
\end{aligned}$$ **時間についての完全導関数**

電荷密度ρ

$$\frac{d\rho}{dt}=0$$

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{dx}{dt}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{dy}{dt}\frac{\partial\rho}{\partial y}+\frac{dz}{dt}\frac{\partial\rho}{dz}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0$$

$$\because \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho=\boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho \quad \because \nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$$

$$L=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+e\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}-eV$$

$$\downarrow$$

$$\frac{v}{c}<<1 \quad -mc^2+\frac{1}{2}mv^2$$

一般化運動量$\boldsymbol{p}=\frac{\partial L}{\partial\dot{\boldsymbol{q}}}=\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{v}}=\frac{\partial v^2}{\partial\boldsymbol{v}}\frac{\partial\left(-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)}{\partial v^2}+e\boldsymbol{A}=\frac{-mc^2(-\frac{1}{c^2})}{2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}2\boldsymbol{v}+e\boldsymbol{A}=\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+e\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}+e\boldsymbol{A}$

$\boldsymbol{P}$: 力学的運動量

$$\because\frac{\partial v^2}{\partial\boldsymbol{v}}=\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial v_x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial v_y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial v_z})(v_x{}^2+v_y{}^2+v_z{}^2)=2\boldsymbol{v}$$

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q},t)$　$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{q}}$に依存しない, $\nabla_v(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v})=\boldsymbol{A}\cdot\nabla_v(\boldsymbol{v})+\boldsymbol{A}\times(\nabla_v\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{A}\cdot\nabla_v(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{A}$

$$\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{q}}=e\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v})-e\nabla V=e\left[(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})\right]-e\nabla V=e(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+e\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})-e\nabla V$$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}=0$より$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{P}+e\boldsymbol{A})=e(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+e\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})-e\nabla V$

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}+\frac{de}{dt}\boldsymbol{A}+e\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=e(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+e\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})-e\nabla V$$

一般に$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{dx}{dt}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{dy}{dt}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{dz}{dt}\frac{\partial f}{dz}=\frac{\partial f}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla f$　$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$　と　電荷保存$\frac{de}{dt}=0$　より

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}+e\left[\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}\right]=e(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+e\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})-e\nabla V$$

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=-e\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}-e\nabla V+e\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$$

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=e\boldsymbol{E}+e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

$$H=\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{v}}-L=\boldsymbol{v}\cdot\left(\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+e\boldsymbol{A}\right)-\left(-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+e\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}-eV\right)$$

$$=\frac{mv^2+mc^2(1-\frac{v^2}{c^2})}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+eV=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+eV$$

自由粒子のエネルギー $E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$　　$(H-eV)^2=E^2=m^2c^4+P^2c^2=m^2c^4+(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})^2c^2$

$H=\sqrt{m^2c^4+c^2(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})^2}+eV$　相対論的

$=mc^2\sqrt{1+\frac{(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})^2}{m^2c^2}}+eV\approx mc^2\left[1+\frac{(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})^2}{2m^2c^2}\right]+eV=mc^2+\frac{1}{2m}(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})^2+eV$　非相対論的

$\boldsymbol{p}$: 一般化運動量

ゲージ変換とゲージ場（ゲージ変換について不変な場）

荷電粒子の波動関数　$\psi(\boldsymbol{q},t) \to e^{i\lambda Q}\psi(\boldsymbol{q},t)$　　第１種のゲージ変換（あらゆる場所、時間で同一の位相変化を

$\psi^*(\boldsymbol{q},t) \to e^{-i\lambda Q}\psi^*(\boldsymbol{q},t)$　　与える大局的、大域的(global)ゲージ変換

λ : 定数　Q : 電荷量

荷電粒子に関係した任意の物理量Aによる状態ψからψ'への遷移の確率振幅は

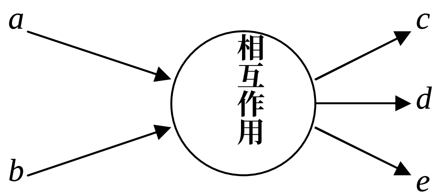
$\int d\boldsymbol{q}\,\psi'^*(\boldsymbol{q},t)A(\boldsymbol{q},t)\psi(\boldsymbol{q},t)$　ゲージ変換により変わらない＝ゲージ対称性（ゲージ変換に対し系は対称）

電荷の保存則

$Q = Q_a + Q_b = Q_c + Q_d + Q_e$

$\psi = \psi_a\psi_b \to e^{i\lambda(Q_a+Q_b)}\psi_a\psi_b = e^{i\lambda Q}\psi$

$\psi' = \psi_c\psi_d\psi_e \to e^{i\lambda(Q_c+Q_d+Q_e)}\psi_c\psi_d\psi_e = e^{i\lambda Q}\psi'$



粒子間の遷移

荷電粒子の異なる点における波動関数の位相を比較する物理的手段はない

$\to$ 位相を任意に各点で選ぶことができる　位相変化$\lambda(\boldsymbol{q},t)$: $\boldsymbol{q},t$の関数として１階微分可能

第２種のゲージ変換（局所的(local)ゲージ変換）

$\psi(\boldsymbol{q},t) \to e^{i\lambda(\boldsymbol{q},t)Q}\psi(\boldsymbol{q},t)$

$\psi^*(\boldsymbol{q},t) \to e^{-i\lambda(\boldsymbol{q},t)Q}\psi^*(\boldsymbol{q},t)$

$\int d\boldsymbol{q}\,\psi'^*(\boldsymbol{q},t)A(\boldsymbol{q})\psi(\boldsymbol{q},t)$ ならば局所的ゲージ変換に対して不変

$A(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ならば？

$A(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}$　運動量演算子

$\boldsymbol{p}\psi(\boldsymbol{q},t) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}}\psi(\boldsymbol{q},t) \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}}[e^{i\lambda(\boldsymbol{q},t)Q}\psi(\boldsymbol{q},t)] = e^{i\lambda(\boldsymbol{q},t)Q}(-i\hbar\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}} + \hbar Q\frac{\partial\lambda}{\partial \boldsymbol{q}})\psi(\boldsymbol{q},t)$ より

$$\int d\boldsymbol{q}\,\psi'^*(\boldsymbol{q},t)\boldsymbol{p}\psi(\boldsymbol{q},t) \to \int d\boldsymbol{q}\,\psi'^*(\boldsymbol{q},t)(\boldsymbol{p} + \hbar Q\frac{\partial\lambda}{\partial \boldsymbol{q}})\psi(\boldsymbol{q},t)$$

$$\boldsymbol{p} \quad\to\quad \boldsymbol{p} + \hbar Q\frac{\partial\lambda}{\partial \boldsymbol{q}}$$

エネルギー$E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$

$$E \quad\to\quad E - \hbar Q\frac{\partial\lambda}{\partial t}$$

$\boldsymbol{p},E$の変化が起こらないためには、荷電粒子の運動量、エネルギーの定義を変更して

$$\boldsymbol{p} \quad\to\quad \boldsymbol{p} - Q\boldsymbol{A}$$

$$E \quad\to\quad E - QV$$

とおき、局所的ゲージ変換を波動関数ψに対して行うときに同時に$\boldsymbol{A}$とVが次の変換を受ければよい

$$\boldsymbol{A} \quad\to\quad \boldsymbol{A} + \hbar\frac{\partial\lambda}{\partial \boldsymbol{q}}$$

$$V \quad\to\quad V - \hbar\frac{\partial\lambda}{\partial t}$$

このとき$\boldsymbol{p} - Q\boldsymbol{A}$、$E - QV$で定義された系の運動量、エネルギーは局所的ゲージ変換に対し不変

$\because$ 局所的ゲージ変換で$\boldsymbol{p} \quad\to\quad \boldsymbol{p} + \hbar Q\frac{\partial\lambda}{\partial \boldsymbol{q}}$となるので、$(\boldsymbol{p} - Q\boldsymbol{A}) \xrightarrow{\text{局所的ゲージ変換}} \boldsymbol{p} - Q(\boldsymbol{A} + \hbar\frac{\partial\lambda}{\partial \boldsymbol{q}}) + \hbar Q\frac{\partial\lambda}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{p} - Q\boldsymbol{A}$

$E \quad\to\quad E - \hbar Q\frac{\partial\lambda}{\partial t}$となるので、$(E - QV) \xrightarrow{\text{局所的ゲージ変換}} E - Q(V - \hbar\frac{\partial\lambda}{\partial t}) - \hbar Q\frac{\partial\lambda}{\partial t} = E - QV$

$\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}$の任意の関数である物理量は、$\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}$のそれぞれが変化しないので局所的ゲージ変換に対して不変

まとめると

位相を任意に各点で選んでもあらゆる物理量が不変になる。この要請からA, Vが必然的に導入された$=$ゲージ場

A, Vは電荷の保存則から生まれた大局的ゲージ変換に対する物理量の不変性を局所的ゲージ変換に対する不変性に拡張するときに現れる物理量

電磁ポテンシャルはゲージ場、すなわち電荷の大きさ（相互作用の強さ）を測るものさし（ゲージ）である。

荷電粒子との相互作用のエネルギーの形も決定される。

質量m,電荷Qを持つ粒子のエネルギー（非相対論的）

$$E = QV + \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - Q\boldsymbol{A})^2 = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + QV - Q\frac{\boldsymbol{p}}{m}\cdot\boldsymbol{A} + \frac{Q^2}{2m}\boldsymbol{A}^2 \qquad Q\frac{\boldsymbol{p}}{m}:\text{電流}$$

ゲージ粒子　gauge boson　４つの力の相互作用を引き起こすボーズ粒子

電荷	電磁気力$-$光子（フォトン）	$U(1)$対称性	次数１のユニタリ群（絶対値１の複素数）
弱荷	弱い相互作用$-$ウィークボソン（W粒子）	$SU(2)$対称性	2×2のユニタリ行列
色荷	強い相互作用$-$グルーオン	$SU(3)$対称性	3×3のユニタリ行列
質量	重力$-$重力子（グラビトン）		