

群速度

$$E(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk E(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} + \text{C.C.}$$

$$k = k_0 + \Delta k \quad \omega(k) = \omega(k_0) + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} \Delta k + \dots$$

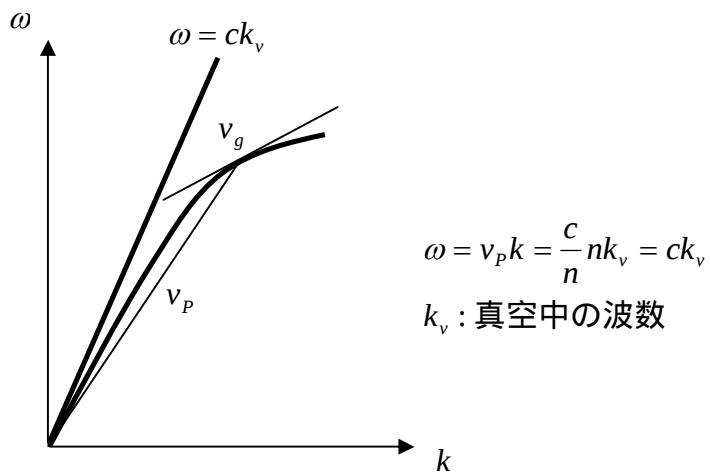
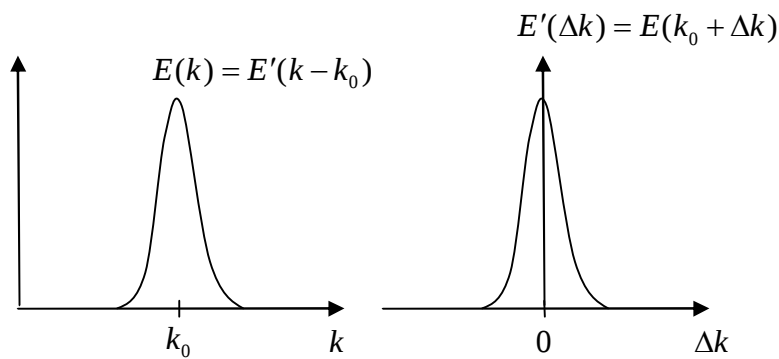
$$E(x, t) \cong \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta k E(k_0 + \Delta k) e^{i[(k_0 + \Delta k)x - \omega(k_0)t - \frac{d\omega}{dk}(k_0)\Delta kt]} + \text{C.C.}$$

$$= e^{i[k_0 x - \omega(k_0)t]} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta k E(k_0 + \Delta k) e^{i\Delta k [x - \frac{d\omega}{dk}(k_0)t]} + \text{C.C.}$$

$$= E'(x - v_g t) e^{i[k_0 x - \omega(k_0)t]} + \text{C.C.}$$

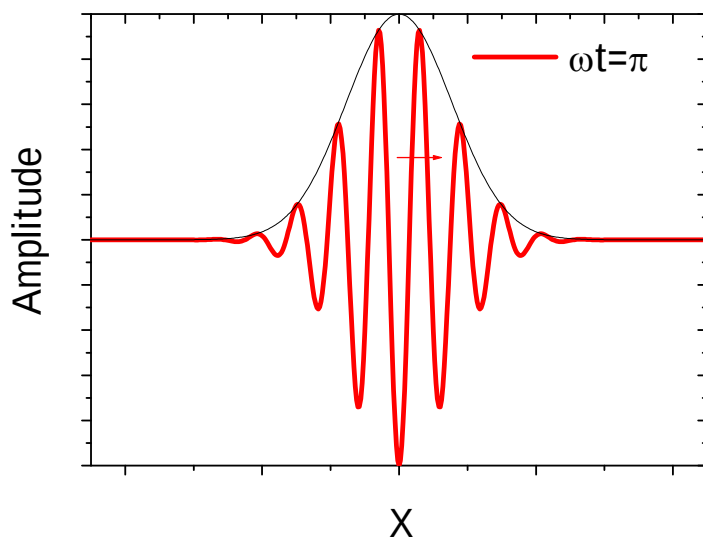
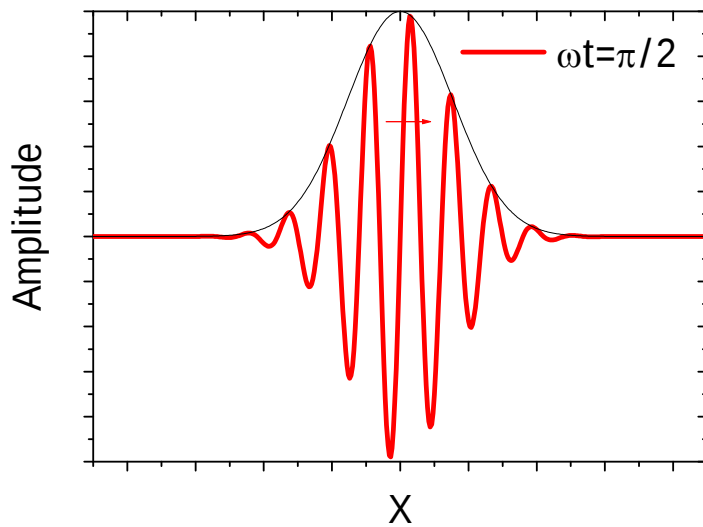
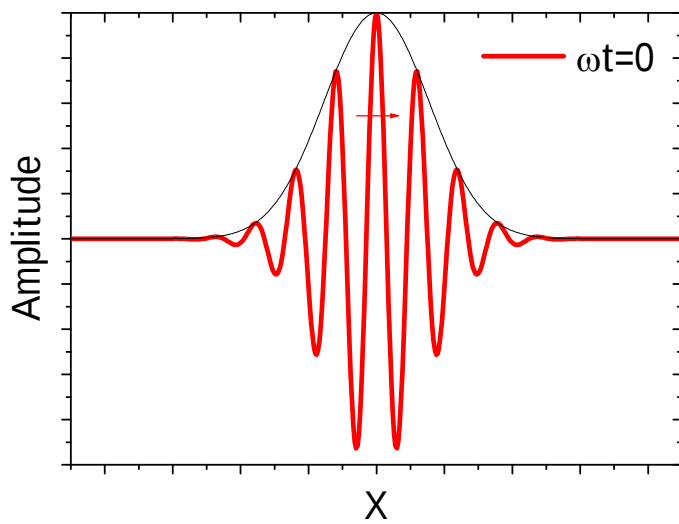
$$E(k_0 + \Delta k) = E'(\Delta k) \quad E'(k) \xrightarrow{FT} E'(x)$$

$$\text{群速度} \quad v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} \quad \text{位相速度} \quad v_p = \frac{\omega(k_0)}{k_0}$$



群速度 $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ の理由

(1) 群速度 0, 位相速度 $\neq 0$ とは？

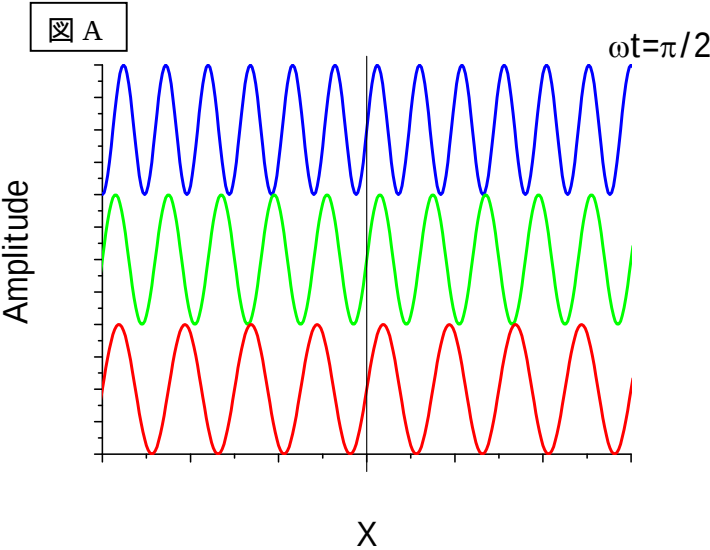
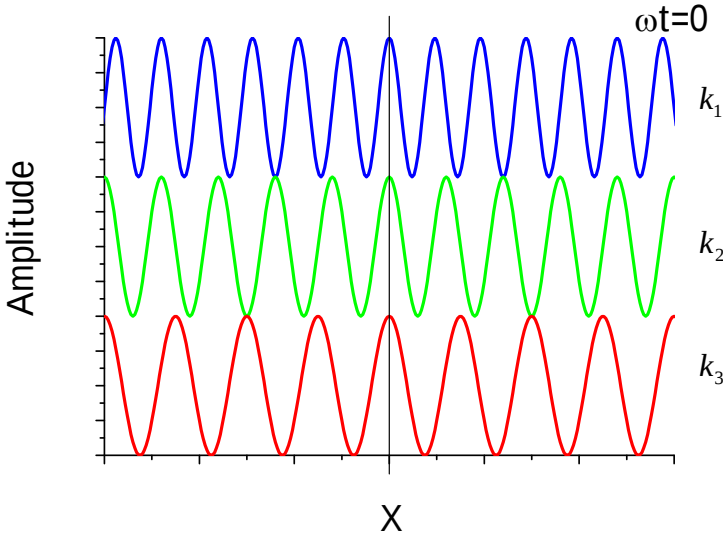
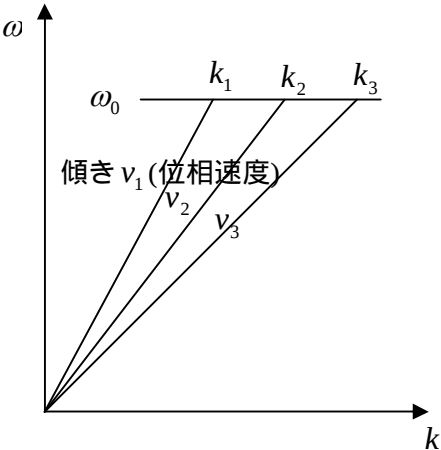


波束を構成するすべての波長成分について、 Δt の間の位相の変化 $\Delta\phi$ が等しい

$$\Delta\phi_1 = 2\pi \frac{v_1\Delta t}{\lambda_1} = k_1v_1\Delta t \quad \Delta\phi_2 = 2\pi \frac{v_2\Delta t}{\lambda_2} = k_2v_2\Delta t \quad \Delta\phi_3 = 2\pi \frac{v_3\Delta t}{\lambda_3} = k_3v_3\Delta t \quad \Delta\phi_1 = \Delta\phi_2 = \Delta\phi_3$$

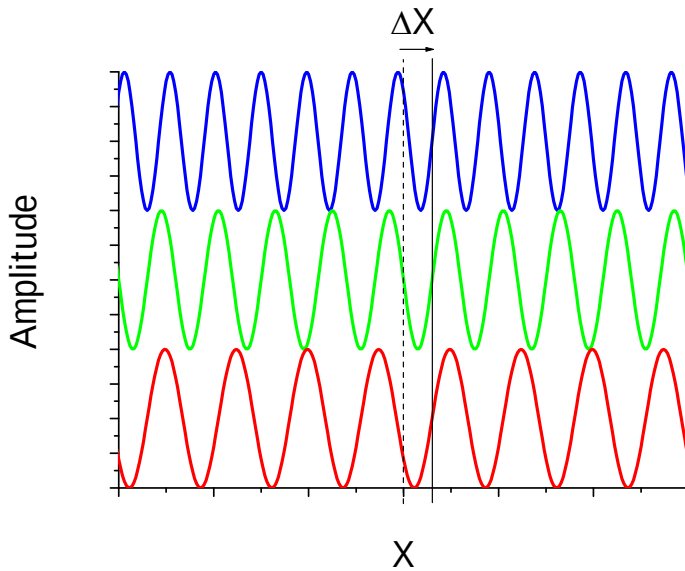
$$\frac{\Delta\phi_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\phi_2}{\Delta t} = \frac{\Delta\phi_3}{\Delta t} = \omega_0 = k_1v_1 = k_2v_2 = k_3v_3$$

このとき、確かに $\frac{d\omega}{dk} = 0$



(2) 群速度 $\neq 0$ のとき

静止している人から見て、 Δt で波束(包絡線)のピークが ΔX 進む このとき群速度 $V_g = \frac{\Delta X}{\Delta t}$



V_g で動いている人から見ると、波束のピークは動かない。図Aのように見える。したがって

$$\Delta\phi_1' = 2\pi \frac{v_1' \Delta t}{\lambda_1} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Delta\phi_2' = 2\pi \frac{v_2' \Delta t}{\lambda_2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Delta\phi_3' = 2\pi \frac{v_3' \Delta t}{\lambda_3} = \frac{\pi}{2}$$

v_1', v_2', v_3' : V_g で動いている人から見た位相速度、つまり

$$\Delta\phi_1' = 2\pi \frac{(v_1 - V_g) \Delta t}{\lambda_1} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Delta\phi_2' = 2\pi \frac{(v_2 - V_g) \Delta t}{\lambda_2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Delta\phi_3' = 2\pi \frac{(v_3 - V_g) \Delta t}{\lambda_3} = \frac{\pi}{2}$$

静止している人から見て、

$$\Delta\phi_1 = 2\pi \frac{v_1 \Delta t}{\lambda_1} = \frac{\pi}{2} + 2\pi \frac{V_g \Delta t}{\lambda_1} = \frac{\pi}{2} + k_1 V_g \Delta t$$

$$\Delta\phi_2 = 2\pi \frac{v_2 \Delta t}{\lambda_2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi \frac{V_g \Delta t}{\lambda_2} = \frac{\pi}{2} + k_2 V_g \Delta t$$

$$\Delta\phi_3 = 2\pi \frac{v_3 \Delta t}{\lambda_3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi \frac{V_g \Delta t}{\lambda_3} = \frac{\pi}{2} + k_3 V_g \Delta t$$

静止している人から見て、

$$\omega_1 = \frac{\Delta\phi_1}{\Delta t} = k_1 v_1 = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\Delta t} + k_1 V_g$$

$$\omega_2 = \frac{\Delta\phi_2}{\Delta t} = k_2 v_2 = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\Delta t} + k_2 V_g$$

$$\omega_3 = \frac{\Delta\phi_3}{\Delta t} = k_3 v_3 = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\Delta t} + k_3 V_g$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = (k_2 - k_1)V_g = \Delta k V_g$$

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta k} = V_g$$

右の図のように波束を構成する電磁波のすべての成分に

わたって傾き $\frac{d\omega}{dk}$ が一定の場合、波束は包絡線の波形を

維持したまま伝播する。

しかし一般の媒質では $\frac{d\omega}{dk}$ は一定ではない。これを群速度分散といい、媒質中で波束の形はくずれていく。

周波数帯域幅で決まる最小のパルス幅を持つパルス（フーリエ変換限界パルスという）は、透明媒質を伝搬するうちにパルス幅が広がっていく。

