（1）縦波について　縦波の定義＝$\boldsymbol{k}$と$\boldsymbol{E}$が平行な波

$\omega = \omega_{\mathrm{L}}$が$\varepsilon(\omega)=0$を満たす$\leftrightarrow \omega = \omega_{\mathrm{L}}$が縦波　（必要十分条件）の証明

真電荷$\rho_{\mathrm{t}} = 0$,　真電流$\boldsymbol{j}=0$のとき、Maxwell方程式は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0 \qquad \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0 \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0 \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$\boldsymbol{E} \propto e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$　$\boldsymbol{B} \propto e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$　のとき

$$\varepsilon\, \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E} = \omega \boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{B} = -\omega \mu_0 \varepsilon \boldsymbol{E}$$

$\boldsymbol{E} \neq 0, \boldsymbol{k} \neq 0$とする

$\varepsilon(\omega) = 0$ならば、

$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{B} = -\omega \mu_0 \varepsilon \boldsymbol{E} = 0$より

$\boldsymbol{k}$と$\boldsymbol{B}$が平行　or　$\boldsymbol{B} = 0$

$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{B} = 0$より$\boldsymbol{B} = 0$

$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E} = \omega \boldsymbol{B} = 0$より

$\boldsymbol{k} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{E}$（縦波）

$\boldsymbol{k} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{E}$（縦波）ならば、

$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E} \neq 0$なので

$\varepsilon\, \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E} = 0$より

$\varepsilon(\omega) = 0$

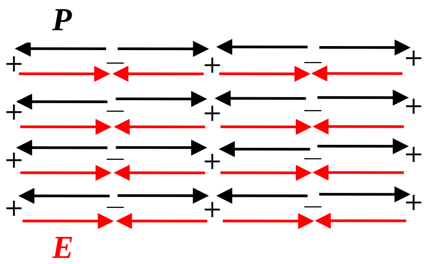
$\therefore \varepsilon(\omega) = 0 \leftrightarrow$ 縦波（必要十分条件）ただし真電荷$\rho_{\mathrm{t}} = 0$,　真電流$\boldsymbol{j} = 0$

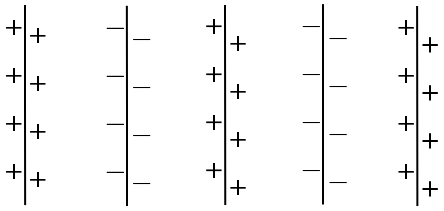
補足：

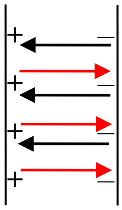
$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0 \varepsilon \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$において

$$\mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0 \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0 (\boldsymbol{j} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}) = \mu_0 (\sigma - i\omega\varepsilon)\ \boldsymbol{E} = -i\omega\mu_0 \tilde{\varepsilon} \boldsymbol{E}$$

$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon + i\dfrac{\sigma}{\omega}$　で$\tilde{\varepsilon}$を定義し、$\tilde{\varepsilon} = 0$とすれば、真電流$\boldsymbol{j} = 0$という条件はいらない。





面電荷密度$\sigma[\mathrm{C/m^2}]$

電極面積$S[\mathrm{m^2}]$

電極間距離$X[\mathrm{m}]$

Gaussの法則より

片側電極$2ES = \dfrac{\sigma S}{\varepsilon_0}$　$E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

電極間－両側電極の電場の和$E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

巨視的分極$P[\dfrac{\mathrm{C \cdot m}}{\mathrm{m^3}}] = \dfrac{-\sigma SX}{SX} = -\sigma$

$E - \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} = E + \dfrac{P}{\varepsilon_0} = 0$　$\varepsilon_0 E + P = 0$　$\varepsilon E = 0$　$\varepsilon = 0$

（2）K−Kの関係式を求めるのに複素積分を使ったが、因果律とフーリエ変換のみでも実部と虚部の間に関係があることを示せる。

時間応答関数$\chi(t)=g(t)+ih(t)$　因果律の要請より$g(t)=h(t)=0$ for $t<0$, $g(t)$と$h(t)$は実関数

$$\chi(\omega)=\mathrm{F}(\chi(t))=\int_0^\infty dt\{g(t)+ih(t)\}e^{-i\omega t}$$

$$=\int_0^\infty dt\{g(t)\cos\omega t+h(t)\sin\omega t\}+i\int_0^\infty dt\{h(t)\cos\omega t-g(t)\sin\omega t\}=\mathrm{Re}\chi(\omega)+i\mathrm{Im}\chi(\omega)$$

$$\mathrm{Re}\chi(\omega)=\int_0^\infty dt\{g(t)\cos\omega t+h(t)\sin\omega t\}\qquad \mathrm{Im}\chi(\omega)=\int_0^\infty dt\{h(t)\cos\omega t-g(t)\sin\omega t\}$$

問題：$\mathrm{Re}\chi(\omega)$から$\mathrm{Im}\chi(\omega)$を計算できるか？

$G(t),H(t)$を$-\infty<t<\infty$で以下のように定義

$G(t)=G(-t)=g(t)\qquad H(t)=-H(-t)=h(t)\qquad$ for $t>0\qquad G(t)$：偶関数，　$H(t)$：奇関数

すると

$$\mathrm{Re}\chi(\omega)+\mathrm{Re}\chi(-\omega)=2\int_0^\infty dt g(t)\cos\omega t=\int_{-\infty}^0 dt g(-t)\cos\omega t+\int_0^\infty dt g(t)\cos\omega t=\int_{-\infty}^\infty dt G(t)\cos\omega t=\mathrm{F}(G(t))$$

したがって$G(t)=\mathrm{F}^{-1}(\mathrm{Re}\chi(\omega)+\mathrm{Re}\chi(-\omega))$ これより$g(t)$が求まる。$g(t)=G(t)$ for $t>0$　$g(t)=0$ for $t<0$

同様に$H(t)=-i\mathrm{F}^{-1}(\mathrm{Re}\chi(\omega)-\mathrm{Re}\chi(-\omega))$　　これより$h(t)$が求まる。$h(t)=H(t)$ for $t>0$　$h(t)=0$ for $t<0$

$$\mathrm{Im}\,\chi(\omega)=\int_0^\infty dt\{h(t)\cos\omega t-g(t)\sin\omega t\}=\int_0^\infty dt\{H(t)\cos\omega t-G(t)\sin\omega t\}$$

$$=\int_0^\infty dt\{-i\mathrm{F}^{-1}(\mathrm{Re}\chi(\omega)-\mathrm{Re}\chi(-\omega))\cos\omega t-\mathrm{F}^{-1}(\mathrm{Re}\chi(\omega)+\mathrm{Re}\chi(-\omega))\sin\omega t\}$$

もし、　因果律が成り立たず$\chi(t)=g(t)+ih(t)$が$-\infty<t<\infty$で定義された任意の関数だとすると、

$$\chi(\omega)=\mathrm{F}(\chi(t))=\int_{-\infty}^\infty dt\{g(t)+ih(t)\}e^{-i\omega t}$$

$$=\int_{-\infty}^\infty dt\{g(t)\cos\omega t+h(t)\sin\omega t\}+i\int_{-\infty}^\infty dt\{h(t)\cos\omega t-g(t)\sin\omega t\}=\mathrm{Re}\chi(\omega)+i\mathrm{Im}\chi(\omega)$$

$$\mathrm{Re}\chi(\omega)+\mathrm{Re}\chi(-\omega)=2\int_{-\infty}^\infty dt\,g(t)\cos\omega t=2\mathrm{Re}\int_{-\infty}^\infty dt\,g(t)\,e^{-i\omega t}=2\mathrm{Re}[\mathrm{F}(g(t))]$$

この場合は$\mathrm{Im}[\mathrm{F}(g(t))]$が未知なので、$g(t)$を逆フーリエ変換で決定できない。

実用的な式

物理的過程のため実際は$\chi(t)$は実関数。このとき$h(t)=0$

$$\chi(\omega)=\mathrm{F}(\chi(t))=\int_0^\infty dt\,g(t)\,e^{-i\omega t}=\int_0^\infty dt\,g(t)\cos\omega t-i\int_0^\infty dt\,g(t)\sin\omega t=\mathrm{Re}\chi(\omega)+i\mathrm{Im}\chi(\omega)$$

$$\mathrm{Re}\chi(\omega)=\mathrm{Re}\chi(-\omega)$$

$$G(t)=\mathrm{F}^{-1}(\mathrm{Re}\chi(\omega)+\mathrm{Re}\chi(-\omega))=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty d\omega(\mathrm{Re}\chi(\omega)+\mathrm{Re}\chi(-\omega))e^{i\omega t}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty d\omega\{\mathrm{Re}\chi(\omega)\}e^{i\omega t}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty d\omega\{\mathrm{Re}\chi(\omega)\}\cos\omega t=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\omega\{\mathrm{Re}\chi(\omega)\}\cos\omega t$$

$$\mathrm{Im}\chi(\omega)=\int_0^\infty dt\{-G(t)\sin\omega t\}=-\int_0^\infty dt\left[\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\omega'\{\mathrm{Re}\chi(\omega')\}\cos\omega' t\right]\sin\omega t$$

補足:
$h(t)=0$の場合(物理的過程の場合)、もう少しわかりやすくなる。
時間応答関数$\chi(t)=g(t)$　因果律の要請より$g(t)=0 \text{ for } t<0,\ g(t)$は実関数

$$\chi(\omega)=\mathrm{F}(\chi(t))=\int_0^\infty dt\, g(t)e^{-i\omega t}=\int_0^\infty dt\ g(t)\cos\omega t+i\int_0^\infty dt\{-g(t)\sin\omega t\}=\mathrm{Re}\chi(\omega)+i\mathrm{Im}\chi(\omega)$$

問題:$\mathrm{Re}\chi(\omega)$から$\mathrm{Im}\chi(\omega)$を計算できるか?
$G(t)$を$-\infty<t<\infty$で以下のように定義
$G(t)=G(-t)=g(t) \quad \text{for } t>0 \qquad G(t)$:偶関数

$$\mathrm{Re}\chi(\omega)=\int_0^\infty dt\ g(t)\cos\omega t=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty dt\ G(t)\cos\omega t=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty dt\ G(t)e^{-i\omega t}=\frac{1}{2}\mathrm{F}\{G(t)\}$$

$G(t)=\mathrm{F}^{-1}\{2\mathrm{Re}\chi(\omega)\}$により、以下のように$g(t)$を$\mathrm{Re}\chi(\omega)$から復元できる
$g(t)=G(t) \text{ for } t>0 \quad g(t)=0 \text{ for } t<0$
これより$\mathrm{Im}\chi(\omega)=\int_0^\infty dt\{-g(t)\sin\omega t\}$が計算できる。

ほとんど同じことだが、以下のようにしてもよい。
$G(t),H(t)$を$-\infty<t<\infty$で以下のように定義
$G(t)=G(-t)=g(t) \quad \text{for } t>0 \qquad G(t)$:偶関数
$H(t)=-H(-t)=g(t) \quad \text{for } t>0 \qquad H(t)$:奇関数

$$\chi(\omega)=\mathrm{F}(\chi(t))=\int_0^\infty dt\, g(t)e^{-i\omega t}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty dt\{G(t)+H(t)\}\{\cos\omega t-i\sin\omega t\}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty dt\{G(t)\cos\omega t-iH(t)\sin\omega t\}=\mathrm{Re}\chi(\omega)+i\mathrm{Im}\chi(\omega)$$

問題:$\mathrm{Re}\chi(\omega)$から$\mathrm{Im}\chi(\omega)$を計算できるか?

$$\mathrm{Re}\chi(\omega)=\int_0^\infty dt\ g(t)\cos\omega t=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty dt\ G(t)\cos\omega t=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty dt\ G(t)e^{-i\omega t}=\frac{1}{2}\mathrm{F}\{G(t)\}$$

$G(t)=\mathrm{F}^{-1}\{2\mathrm{Re}\chi(\omega)\}$により、以下のように$H(t)$を$\mathrm{Re}\chi(\omega)$から復元できる
$g(t)=G(t) \text{ for } t>0 \quad g(t)=0 \text{ for } t<0$
$H(t)=-H(-t)=g(t)$
これより$\mathrm{Im}\chi(\omega)=-\frac{i}{2}\int_{-\infty}^\infty dt\, H(t)e^{-i\omega t}$

フーリエ変換による方法は、被積分関数に特異点がないのはよいが、注目している範囲の$\omega$以外の成分が小さくならないこと、二重積分であること、が実用的には欠点。
KK変換は、$x-\omega$で割り算しているので、$x=\omega$で特異点になるのは積分を実行する上で欠点だが、注目している$\omega$から離れた被積分関数の寄与は小さいので測定範囲外の関数形を適当に仮定しても影響が少ないこと、一重積分であること、という点で実用的。