非線形光学効果の古典的導出

Lorentz モデル(力学振動子モデル)に非線形項を入れる

（注意：非線形のときは $E = E_0 e^{-i\omega t}$ とおいて解くことはできない）

$F = -m(\omega_0{}^2 x + Dx^2)$　$F = -\dfrac{d}{dx}\phi$　$\phi = \dfrac{1}{2}m\omega_0{}^2 x^2 + \dfrac{1}{3}mDx^3$　**このようなポテンシャルを持つためには物質が反転対称性なしであることが必要**

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \Gamma_0\frac{dx}{dt} + \omega_0{}^2 x + Dx^2\right) = qE_0\cos\omega t = qE_0\frac{e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}x_1 e^{-i\omega t} + \frac{1}{2}x_2 e^{-i2\omega t} + c.c. = \frac{1}{2}x_1 e^{-i\omega t} + \frac{1}{2}x_2 e^{-i2\omega t} + \frac{1}{2}x_1{}^* e^{+i\omega t} + \frac{1}{2}x_2{}^* e^{+i2\omega t}$$ **(実関数にする)**

$x_1 >> x_2$

$$-\frac{\omega^2}{2}x_1 e^{-i\omega t} - 2\omega^2 x_2 e^{-i2\omega t} - \frac{i\omega\Gamma_0}{2}x_1 e^{-i\omega t} - i\omega\Gamma_0 x_2 e^{-i2\omega t} + \frac{\omega_0{}^2}{2}x_1 e^{-i\omega t} + \frac{\omega_0{}^2}{2}x_2 e^{-i2\omega t}$$
$$+\frac{D}{4}(x_1{}^2 e^{-i2\omega t} + x_2{}^2 e^{-i4\omega t} + x_1 x_1{}^* + x_2 x_2{}^* + 2x_1 x_2 e^{-i3\omega t} + 2x_1{}^* x_2 e^{-i\omega t}) + c.c. = \frac{qE_0}{2m}(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t})$$

$e^{-i\omega t}$の項

$$(-\frac{\omega^2}{2} - \frac{i\omega\Gamma_0}{2} + \frac{\omega_0{}^2}{2})x_1 e^{-i\omega t} + \frac{D}{2}x_1{}^* x_2 e^{-i\omega t} = \frac{qE_0}{2m}e^{-i\omega t}$$

$$|-\omega^2 + \omega_0{}^2 - i\omega\Gamma_0| >> |Dx_2|$$

$$x_1 = \frac{(\frac{qE_0}{m})}{\omega_0{}^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_0}$$

$$P^{(\omega)}(t) = \frac{\varepsilon_0}{2}(\chi_L{}^{(\omega)} E_0 e^{-i\omega t} + c.c.) = \frac{Nq}{2}(x_1 e^{-i\omega t} + c.c.)$$

$$\chi_L{}^{(\omega)} = \frac{Nq^2}{m\varepsilon_0}\frac{1}{\omega_0{}^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_0}$$

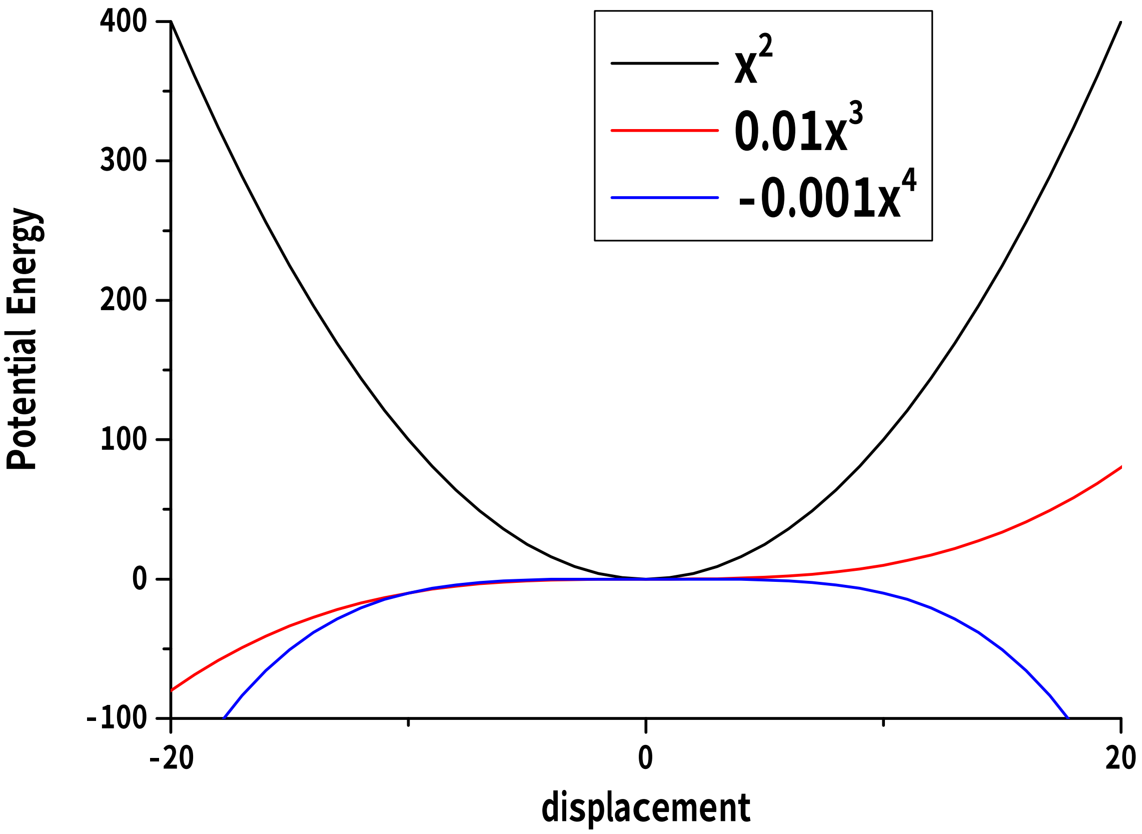
$e^{-i2\omega t}$の項　二倍波発生

$$(-2\omega^2 - i\omega\Gamma_0 + \frac{\omega_0{}^2}{2})x_2 e^{-i2\omega t} + \frac{D}{4}x_1{}^2 e^{-i2\omega t} = 0$$

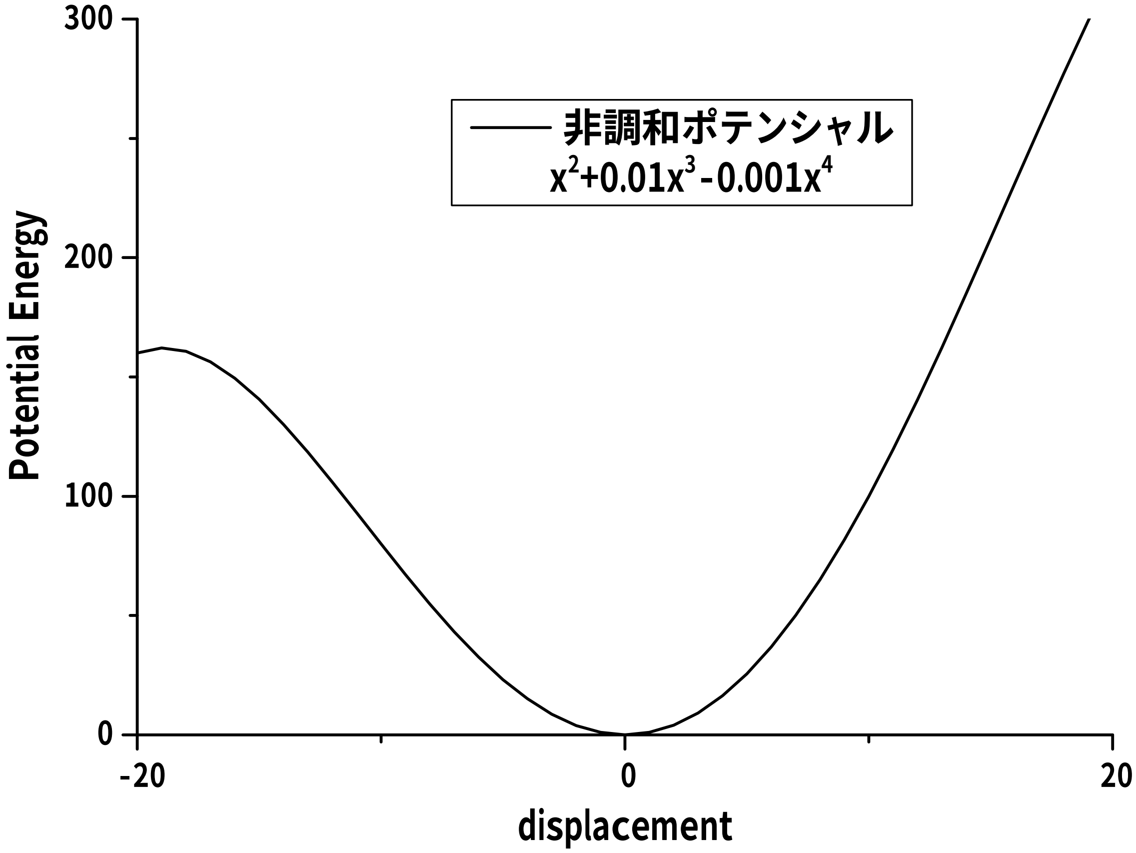
$$x_2 = \frac{-\frac{D}{4}x_1{}^2}{-2\omega^2 - i\omega\Gamma_0 + \frac{\omega_0{}^2}{2}} = \frac{-\frac{D}{4}(\frac{qE_0}{m})^2}{(-2\omega^2 + \frac{\omega_0{}^2}{2} - i\omega\Gamma_0)(\omega_0{}^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_0)^2}$$
$$= \frac{-Dq^2 E_0{}^2}{2m^2(\omega_0{}^2 - 4\omega^2 - 2i\omega\Gamma_0)(\omega_0{}^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_0)^2}$$

$e^{-i\omega t} \times e^{i\omega t} = 1$の項　光整流

$F = -m(\omega_0{}^2 x - Gx^3)$　$\phi = \dfrac{1}{2}m\omega_0{}^2 x^2 - \dfrac{1}{4}mGx^4$　**ならば吸収飽和　反転対称性の有無によらない**

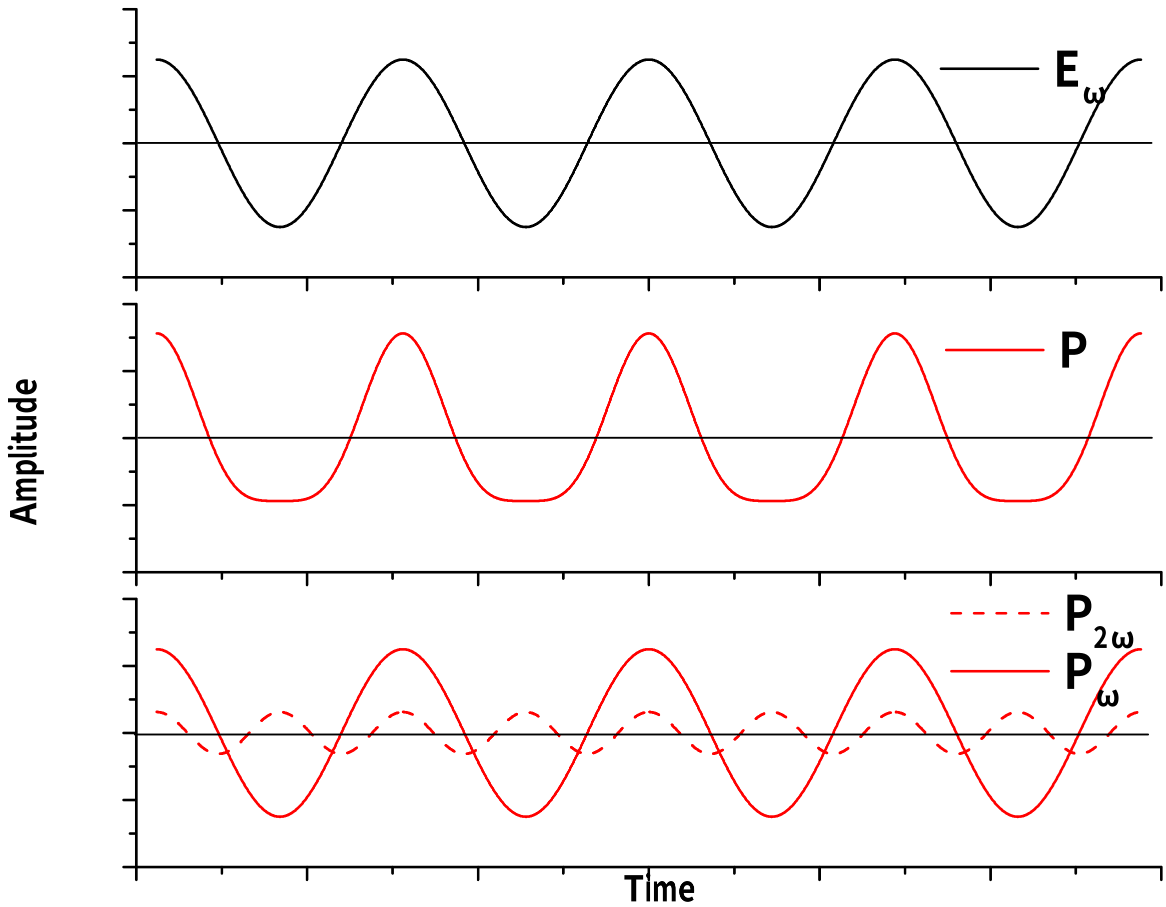


Potential Energy
displacement
400
300
200
100
0
-100
-20
0
20
x²
0.01x³
-0.001x⁴



Potential Energy
displacement
300
200
100
0
-20
0
20
非調和ポテンシャル
x²+0.01x³-0.001x⁴

二倍波発生



$P_{2\omega}$の分極が$E_{2\omega}$の電磁波を発生

効率よい発生のためには、入射電磁波E_{ω}と発生電磁波$E_{2\omega}$が同じ位相速度で進むことが必要（位相整合条件）

しかし、通常$n_{\omega} < n_{2\omega}$(正常分散)

どのようにすれば位相整合条件を満たせるのか？