理学部第一部物理学科

2001年度版　物理学実験(二) テキストより（一部修正加筆）

11．光の反射、屈折及び分散

1. 目 的

分光計の取扱に習熟し、光の反射、屈折の意味を理解し、屈折率とはいかなるものかを理解する。

2. 解 説

光の反射、屈折 (Reflection,Refraction) および分散 (Dispersion) 最小時間に関するフェルマーの原理 (Fermat's Principle of least time) を考えることによって反射および屈折の幾可光学的な説明はよく知っているところである。ここではその屈折率 (Index of refraction) すなわち、光が進む速さが見かけ上媒質の種類によって変わるということと物理的な仮定、あるいは法則がどのような関係にあるかを述べよう。

まず仮定として次のことがいえる。

(1) 任意の物理的状態下におけるある位置の電界は、常に宇宙に存在するすべての電荷による電界の和である。

(2) 個々の電荷による電界は、放射場に対しては常に速さ c で伝わるための遅れを含めた加速度によって決まる。

それはもし電荷が一直線上をきわめて小さな振幅で上下の加速運動をしているとき、じゅうぶん離れた P 点での電界は

$$E(t) = \frac{-q_e\,\alpha(t - r/c)\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} \qquad E_x(t) = \frac{-q\,\alpha(t-r/c)\sin^2\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} \tag{1}$$

と書ける。ここで

q_e　：振動している電気量

$\alpha(t - r/c)$ ：t-r/c における加速度で遅延加速度 (Retarded acceleration) とよばれる。また図1に示すように

θ　：加速度の方向と P 点のなす角、またその電界の方向は r（視線）の方向に垂直であり、また r と運動電荷の加速度 α を含む面内にある。

さて以上のことと屈折率 n、すなわち、その物質中を光が見かけ上 c/n という速さで進むということとの関係を考えよう。はるかに遠く離れた点 S に光源（外部光源）があり薄い透明な物質（例えばガラス）を隔てて反対側にまた遠く離れた点P を

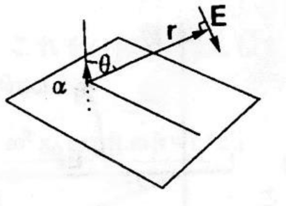


図1　電界

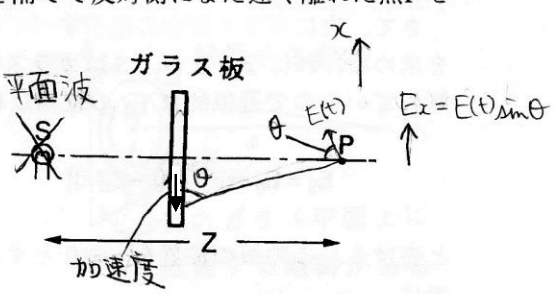


図2　光源と観測点の関係

考え、その点の電界を調べる（図2）。このとき上の二つの仮定から考えられるのは光源 S によって生ずる P 点の電界とガラス板内の各電荷が P点に作る電界の和を取らなければならないので

$$E = E_S + \overbrace{\sum_{\text{各電荷}} E}^{=E_a}$$

と書ける。もちろん宇宙の主電荷をとらなければならないが、ここでは近似として他の電荷（もし電界を P 点に作るならば）からの影響はないものと考えられている。またこの考え方によればガラス内の電荷は逆に光源の方向へも波を送り出す。これが反射波である。

そこでガラス板内のすべての振動する電荷が P 点に作る電界を Ea とする。もしガラス板がないとすると右のほうに（z 軸にそって）進む波の電界は

$$E_S = E_0 \cos \omega (t - Z/c) \quad \text{または}$$
$$E_S = E_0 \exp[i\,\omega (t - Z/c)] \tag{2}$$

これは(15)式のあと議論

である。この波がガラス板の中（厚さ Δz、屈折率 n）を通り抜けるためによけいにかかる時間は

$$\Delta t = \frac{\Delta Z}{c} - \frac{\Delta Z}{c/n} = \frac{(n-1)\,\Delta Z}{c} \tag{3}$$

となる。そのために板をそう入したあとでの波は t を t-Δt に置き換えて

$$E = E_0 \exp[i\,\omega\{t - (n-1)\,\Delta Z/c - Z/c\}]$$
$$= \exp[-i\,\omega (n-1)\,\Delta Z/c]\, E_0 \exp[i\,\omega (t - Z/c)] \tag{4}$$

ここでもし Δ z が小さいならば近似式
$e^x \cong 1 + x$ が使えるので(4)式は

$$E = E_0 \exp[i\,\omega (t - Z/c)] - \overbrace{\frac{i\,\omega (n-1)\,\Delta Z}{c} E_0 \exp[i\,\omega (t - Z/c)]}^{E_a} \tag{5}$$

この第二項が E_a の部分であり、図3にこれを示してある。

さて、次にガラス板中の電子すべてについて和を求めなければならない。S はガラス板より遠く離れているので近似的に E_s の位相は板上では

$$E_S = E_0 \exp[i\,\omega (t - Z/c)]$$

と書ける。この板の位置を z = 0 とすると、ここでは

$$E_S = E_0 \exp[i\,\omega t]$$

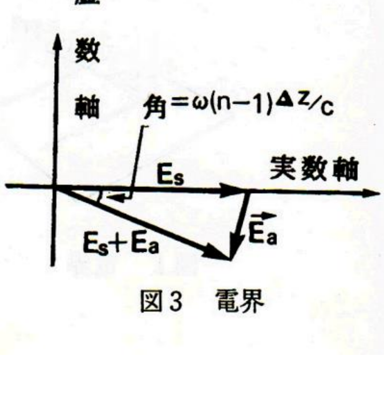


図3　電界

と書ける。またこの電界によってガラス板内すべての原子内の電子はこの影響を受け、電気力 q_eE（q_e : 電子の電荷）によって上下に動かされるのであろう（簡単のために E_0 の方向は鉛直と仮定する）。なお力が電子に加わるとその平行の位置からの変位がそれに比例し丁度バネで電子が支えられるように束縛力 (restraining force) が働くことは光に関するかぎり証明できているので、その運動方程式は

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2 x\right)=F \qquad (6)$$

と書ける。ここで　m　: 電子の質量、
ω_0 : 共鳴角振動数、
F　: 外から加わる力 = $q_e E_0 \exp[i\omega t]$ である。

そこで

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2 x\right)=q_e E_0 \exp[i\omega t] \qquad (7)$$

解は $x = x_0 \exp[i\omega t]$ を(7)式に代入すると

$$x_0=\frac{q_e E_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)} = \frac{qE_0}{m(\omega_0^2-\omega^2+i\omega\Gamma_0)} \qquad (8)$$

となって

$$x=\frac{q_e E_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\exp[i\omega t] = \frac{qE_0}{m}\frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2-\omega^2+i\omega\Gamma_0} = x_0 e^{i\omega t} \qquad (9)$$

となる。また簡単にするためにガラス板内の電子は零点が一平面上にあって (9) 式によって運動しているとしよう。すなわち、一つの平面内に波源がじゅうぶん多く分布し、すべてがその平面上で上下に振動し、その振幅と位相が同じであると考える。

図 4 に示すように電荷を含む面を xy 面、z 軸上に遠く離れた点を P とする。また平面上、単位面積あたり η 個の等電荷 q_e があって x 方向に式(9)にしたがって運動しているとする。輻射の電界は電荷の加速度 $-\omega^2 x_0 \exp[i\omega t]$ に比例するので、図 4 の Q 点の電荷による P 点の電界は、P と Q の距離 r を c の速度で波が進むと考えると加速度

$$-\omega^2 x_0 \exp[i\omega(t-r/c)]$$

に比例する。これを(1)式に代入して近似を行えば　$(\sin\theta \cong 1)$

$$\frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\cdot\frac{\omega^2 x_0 \exp[i\omega(t-r/c)]}{r} \qquad (10)$$

となる。ここで和を求めるとき、もちろん

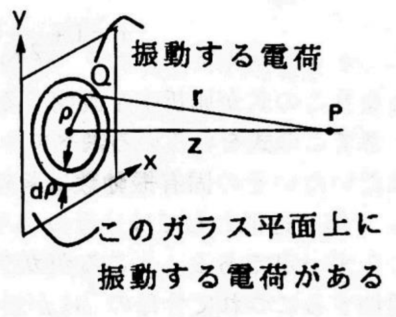


図　4

ベクトル和とすべきであるが近似では r のみに関係するとみなせるので図 4 に示すように原点からの半径 ρ、幅 $d\rho$ の中にあるものを求めて ρ について積分すればよい。

$$\cancel{X}\,\text{P における全電界} = \int \frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\cdot\frac{\omega^2 x_0 \exp[i\omega(t-r/c)]}{r}\cdot\eta\, 2\pi\rho\, d\rho \tag{11}$$

定数項を積分の外に出すと積分は

$$\int_0^\infty \frac{\exp[-i\omega r/c]}{r}\rho\, d\rho \tag{12}$$

$-\frac{\omega\Delta r}{c} = \Delta\theta$

また $2rdr = 2\rho\, d\rho\ (r^2 = \rho^2 + z^2)$ なので

$$\int_{r=Z}^{r=\infty} \exp[-i\omega r/c]\,dr = -\frac{c}{i\omega}\{\exp[-i\omega r_\infty/c] - \exp[-i\omega Z/c]\} \tag{13}$$

$\int_Z^\infty \Delta r\, e^{-i\omega r/c}$

[注 1 参照]

したがって(11)式は　$= \Delta r\, e^{-i\omega Z/c} + \Delta r\, e^{-i\omega(Z+\Delta r)/c} + \Delta r\, e^{-i\omega(Z+2\Delta r)/c} + \cdots$

次第に小さくなる

$$\text{P 点における全電界} = -\frac{\eta q_e}{2\varepsilon_0 c} i\omega x_0 \exp[i\omega(t-Z/c)] \tag{14}$$

となる。(8)式を代入すると

$$E_a = \cancel{E_0} = -\frac{\eta q_e}{2\varepsilon_0 c}\left\{i\omega\frac{q_e E_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\exp[i\omega(t-Z/c)]\right\} \tag{15}$$

$e^{-\alpha r}$ 媒質の吸収

$\sin^2\theta$ の項

$$E_a = -\frac{i\omega(n-1)\Delta Z}{c} E_0\, e^{i\omega(t-Z/c)}$$

この式によると波は $\exp[i\omega(t-z/c)]$ により明らかに二次波として z 方向に進み波の振幅は η に比例し、また光源の電界の強さに比例する。またガラスの原子の性質に(q_e、m、ω_0)依存する因子を含む。

なおこの式と(5)式を比較すると

$$(n-1)\Delta Z = \frac{\eta q_e^2}{2\varepsilon_0 m(\omega_0^2-\omega^2)} \tag{16}$$

が得られる。さらに平面上に原子が並んだと考えたのを板の厚さを考えて、N が板の単位~~面~~体積あたりの原子の数とすれば、$\eta = N\Delta Z$ となり結果として

$\left[\frac{1}{m^2}\right] = \left[\frac{1}{m^3}\right][m]$

$$n = 1 + \frac{N q_e^2}{2\varepsilon_0 m(\omega_0^2-\omega^2)} \tag{17}$$

となりこの式が屈折率を説明するものである。

さてこの式をいろいろ調べてみよう。たとえば気体（空気、水素、ヘリウム等）ではだいたいその固有振動数は紫外領域の光に対応する。これは可視光に対して $\omega_0 > \omega$ で第一近似としては分母の ω^2 を無視できる。すなわち、屈折率は入射波の波長によらず一定である。ところがガラスなどのようなものになると、気体に比べて ω の増加するにつれて分母の ω^2 が無視できなくなり、屈折率が振動数に依存する現象が現れてくる。

これを分散といい、屈折率を振動数の関係として表す式を分散式 (Dispersion equation) という。また、ω と ω_0 が近いとき、たとえば固有振動数が可視の領域内にあるときとか、紫外線の領域でガラスのようなものの屈折率を測定する時は屈折率が非常に大きくなる。なお $\omega > \omega_0$ のようなとき（例、ガラスのような物質にX線をあてたとき）は逆に $\omega_0 = 0$ とおくことによって近似式が得られる。またこの場合は $\omega_0^2 - \omega^2$ が負になり結果として n が 1 より小さくなる。これはその物質中で光が c より速く進むと考えられやすいが、これは誤りでその位相が光源の波に対して進むということで信号の伝わる速さは c より大きくなることはないということを注意しておく。

さらに(17)式についていえることは、原子振動体のこのモデルでは原子は永久に振動し続けることになる。これは明らかにおかしく、何か減衰させる他の力が加わっていなければならない。

そこで一般の減衰する振動体の運動のように、分母を $\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega$ とする必要がある。ただし、γ：減衰係数 (Damping coefficient) とする。もう一つある特定の原子では数個の共鳴振動数 (Resonant frequencies) があるのでこれを考慮に入れると(17)式は

$$n = 1 + \frac{q_e^2}{2\varepsilon_0 m}\sum_k \frac{N_k}{\omega_k^2 - \omega^2 + i\gamma_k\omega} \tag{18}$$

ただし、ω_k：固有振動数、
γ_k：その減衰係数、
N_k：その原子が単位体積に含まれる数とする。

注１　この左辺は複素平面での複素数の大きさ Δr の位相角 $\theta = -\omega r/c$ のものの｛図１２に示す｝和と考えることができこの曲線の各弦は Δr の長さをもち、となりの弦となす角は $\Delta\theta = -\omega\Delta r/c$ である。これを加えてゆけば近似的に出発点に戻り、これをくりかえす。そのときできる円の半径は c/ω となる。しかし、電荷を含む面が無限に広がることは有り得ないで限定された値をもつ。このことは円周上にあった和が図４の半径のあるところまで行くとその積分の中の η が減少して０に近くなる。これは図１３で示したように、より小さな部分を同じ角度だけ回しながら加えることになり、円の中心Cで終わることになるであろう。これは出発点と中心Cを結んだベクトルで表される複素数Aに等しくなる。

一様電荷密度で無限に広がっていてもよい

媒質中の吸収 $e^{-\alpha r}$

これが $\frac{c}{i\omega}\exp\left[-\frac{i\omega z}{c}\right]$ で、
式(13)の $\exp[-i\omega r_\infty/c]$ を0としたものに等しい

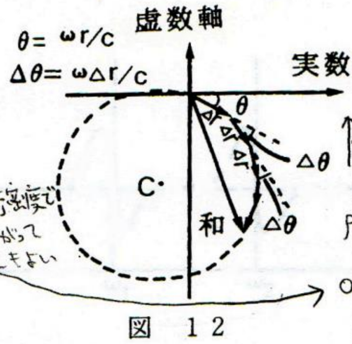
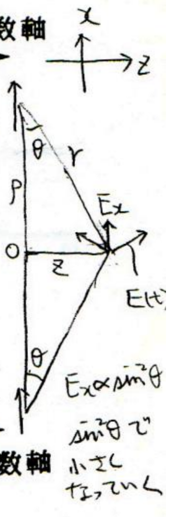


図　１２



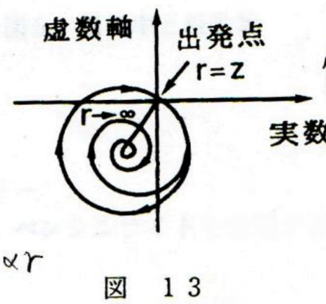


図　１３