

# 2010物理学序論

2010.6.25, 7.2  
(2011.5.25改訂)  
(2018.5.18改訂)

## 6. 波のふるまい

教科書: アドバンスング物理

担当: 徳永英司

# 質問

光はどのように伝搬するか？

なぜ反射、屈折、回折が起こるのか？

レーザー光とは？普通の発光と何が違う？

顕微鏡、目の空間分解能とは？  
光の波長で制限されるのはなぜ？

光子とは何か？

光が粒子である証拠？光子1個の明るさとは？

# 光

現代物理 光は 波 と 粒子 の二重性を持つ  
電磁波 光子

光のエネルギーの最小単位  
(1個の光子のエネルギー)

$$E = hf$$

$h$  :  $6.626 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$  プランク定数

$f$  : 振動数

$$f = 6 \times 10^{14} \text{Hz} @ 500 \text{nm}$$

光子のエネルギー  $4 \times 10^{-19} \text{J} @ 500 \text{nm}$

光が波である証拠？

光が粒子である証拠？

# 光を理解するために

光はどのように空間を伝わっていくのか？

光はどのように生まれて、消えるのか？

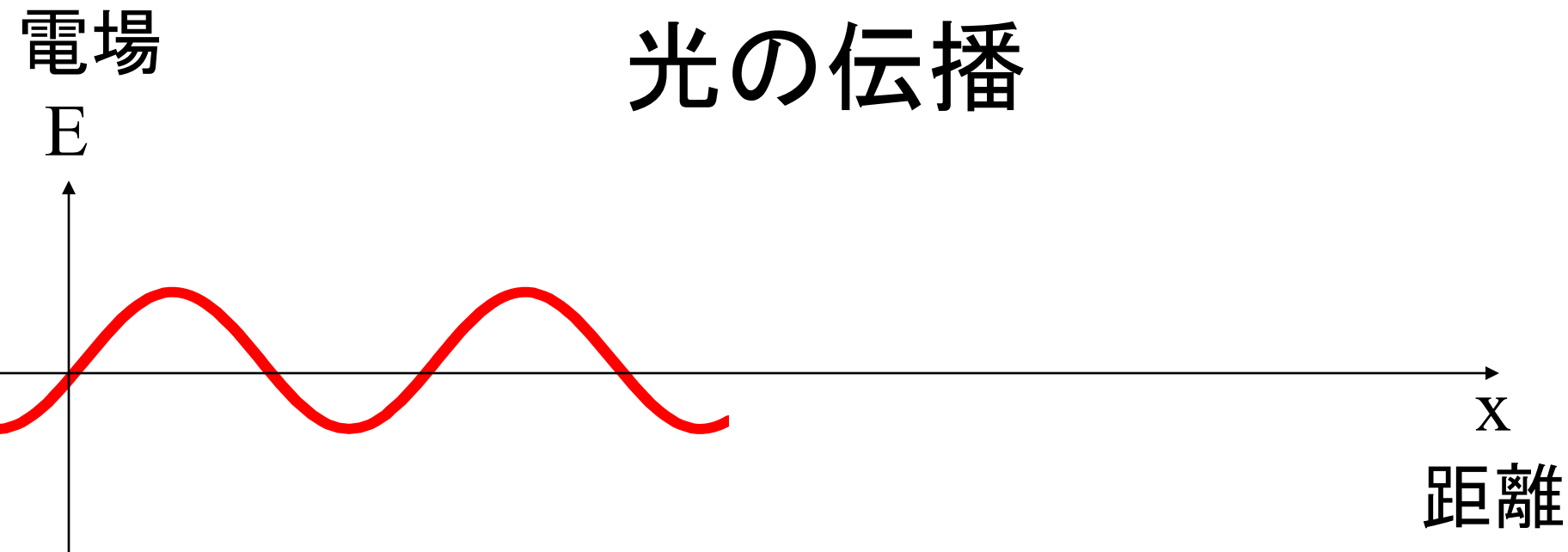
(光は物質とどのように相互作用するか)

これは扱わない

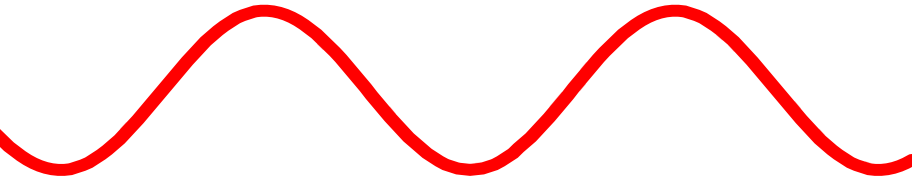
電磁気学3  
物性論C

# 光の伝播

# 光の伝播

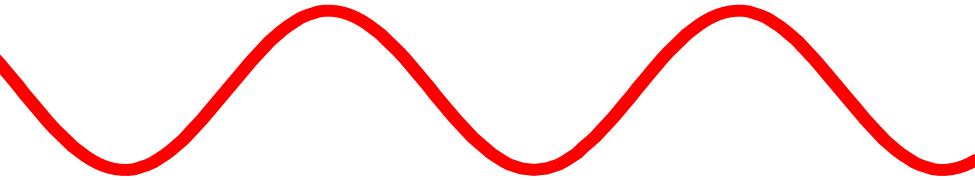


# 光の伝播

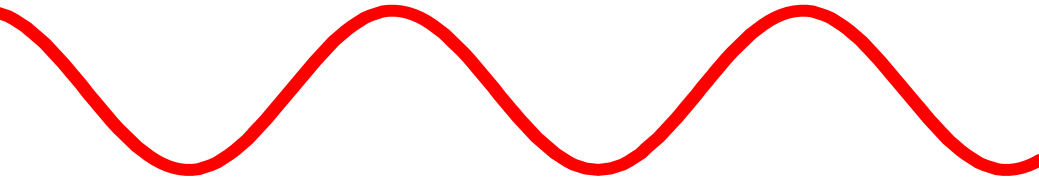




# 光の伝播



# 光の伝播



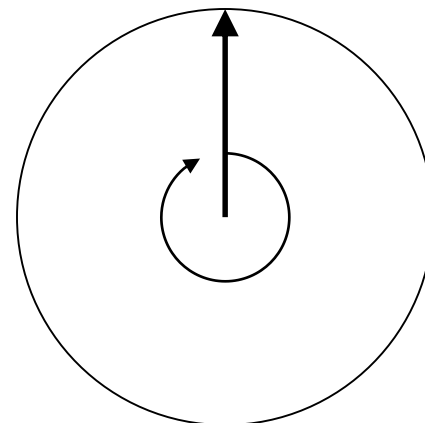
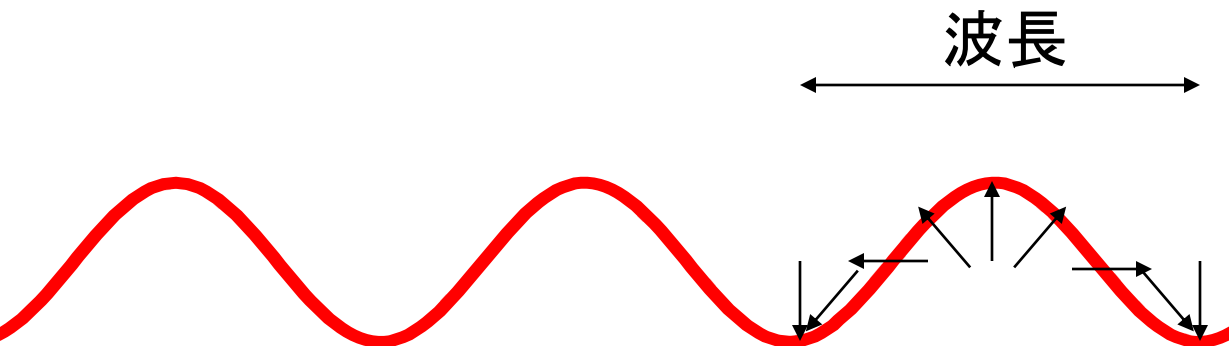
# 光の伝播



# 光の伝播

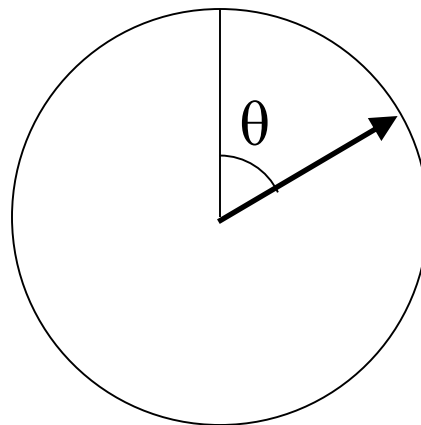


# 光の伝播



波が1波長(1周期)すすむと  
矢印が1回転

矢印がどの角度にあるかを  
“位相”と呼ぶ



# 位相とは？（国語辞典）

周期的に繰り返す現象の1周期のうち、ある特定の局面

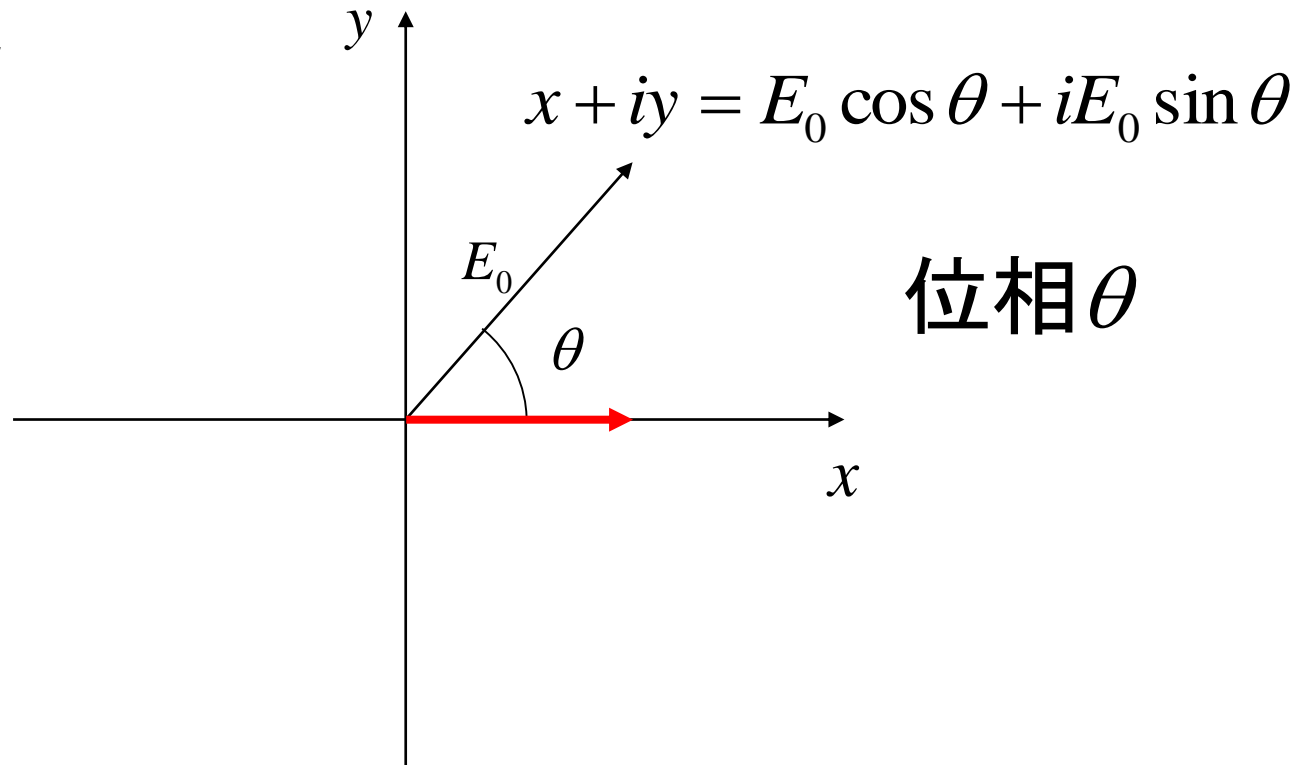
周期関数における変数の値

# 波の振幅の複素表示

$$E = E_0 e^{i\theta} = E_0 e^{i\omega t}$$

観測されるのはこの実部

$$\text{Re } E = E_0 \cos \omega t$$



# 波の波数（はすう、wave number）

空間周波数とも呼ばれる

$$E = E_0 \cos \theta$$

$$= E_0 \cos\left(2\pi ft - \frac{2\pi}{\lambda} x\right)$$

$$= E_0 \cos\left[2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

$$= E_0 \cos\left[2\pi f\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]$$

$$= E_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]$$

$$= E_0 \cos(\omega t - kx)$$

$$\text{波数 } k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$$

$v = c$  光速 のとき

$$\omega = kc$$



# 可視光の波数

$$\lambda = 500\text{nm}$$

$$\frac{k}{2\pi} = \frac{1}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{500\text{nm}}$$

$$= \frac{1}{500 \times 10^{-9} \text{ m}}$$

$$= \frac{1}{500 \times 10^{-7} \text{ cm}}$$

$$= 2 \times 10^4 \text{ cm}^{-1}$$

1cmあたり20000個の波を持つ(20000波長)

# 物質中と真空中の波数の間の関係

真空中の光速  $c$

物質中の光速  $v = c/n$

$n$ : 屈折率

物質中の波数  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} = n \frac{\omega}{c}$

真空中の波数  $k_0 = \frac{\omega}{c}$       真空中の波長  $\lambda_0 = \frac{2\pi}{\omega} c$

$\therefore k = nk_0 \quad (\lambda = \frac{\lambda_0}{n})$

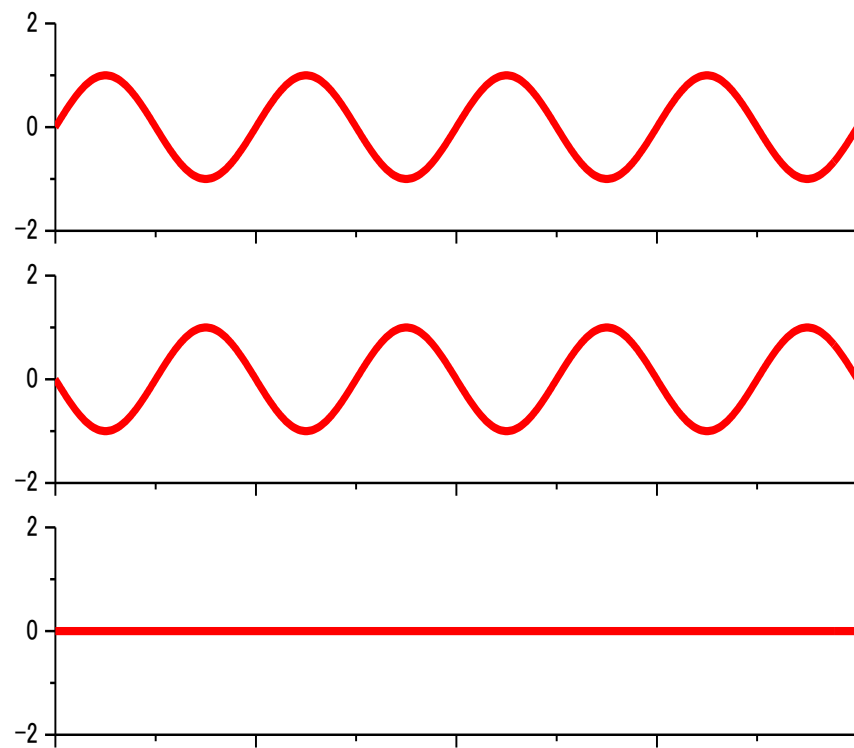
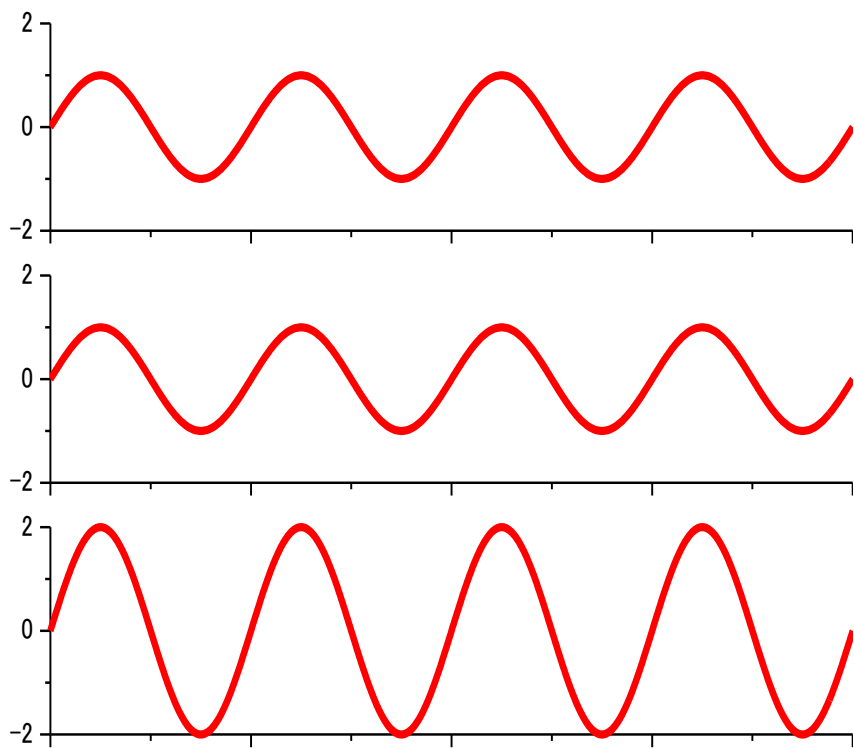
# 光の干渉

教科書p.132

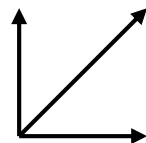
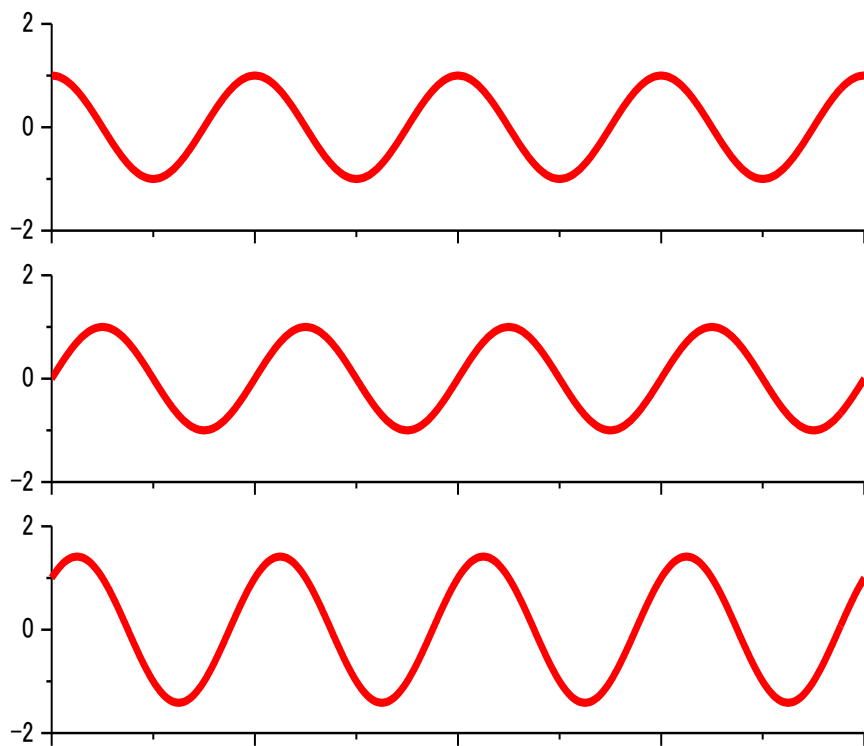
# 波の干渉

↑ ↑  
同位相で強め合う

↑ ↓  
逆位相で弱め合う



# 波の干渉

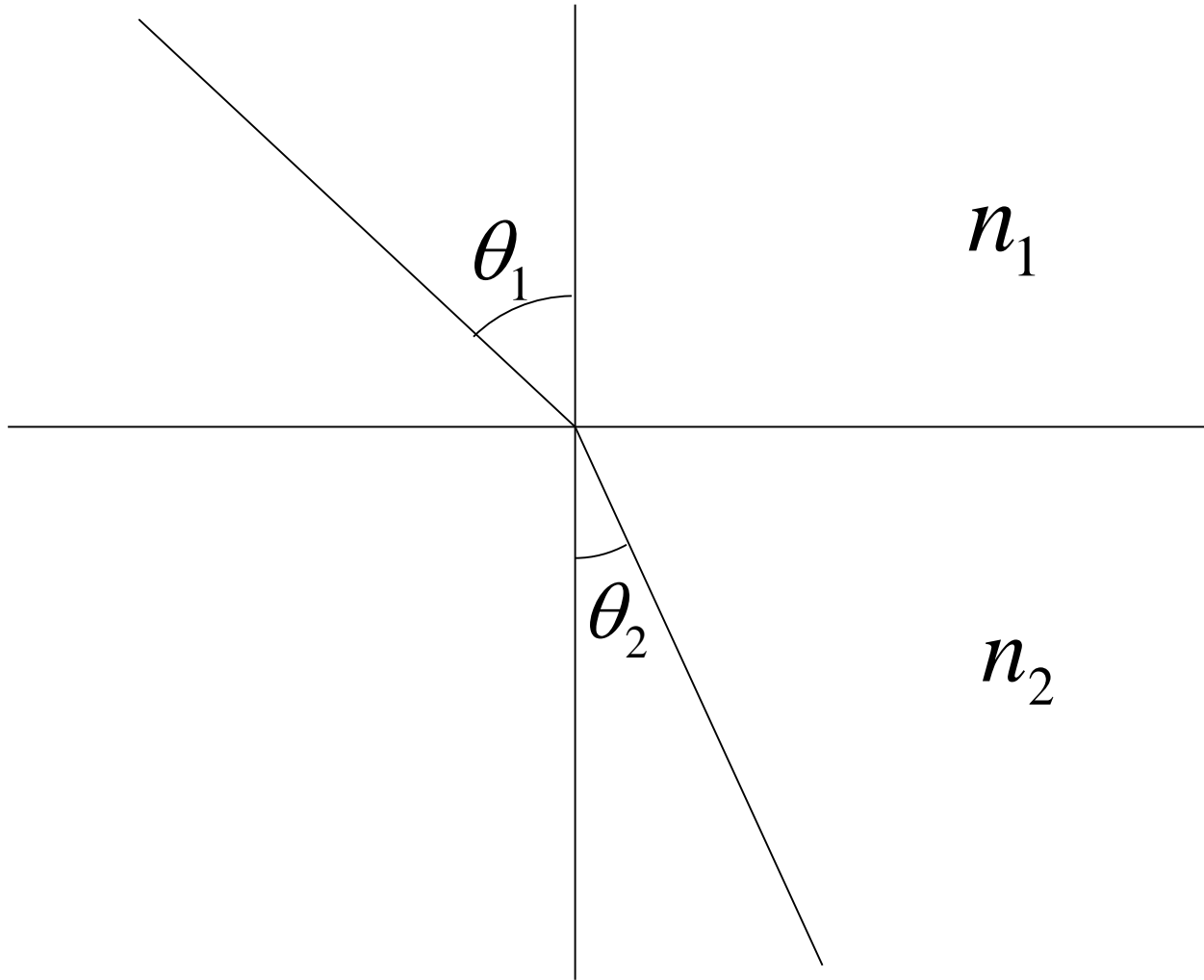


90度位相差

# 光の屈折

# 屈折の法則

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$



# 光を波として ホイヘンスの原理で理解できる

教科書p.144

物質の屈折率を $n$ として、物質中の光速 $v=c/n$ ならば

なぜ透明物質に屈折率の違いがあるのか？屈折率の起源は？  
なぜ光の速度が遅くなるのか？



# ホイヘンスの原理

なぜ後退波が存在しないのか？

光の回折

回折格子

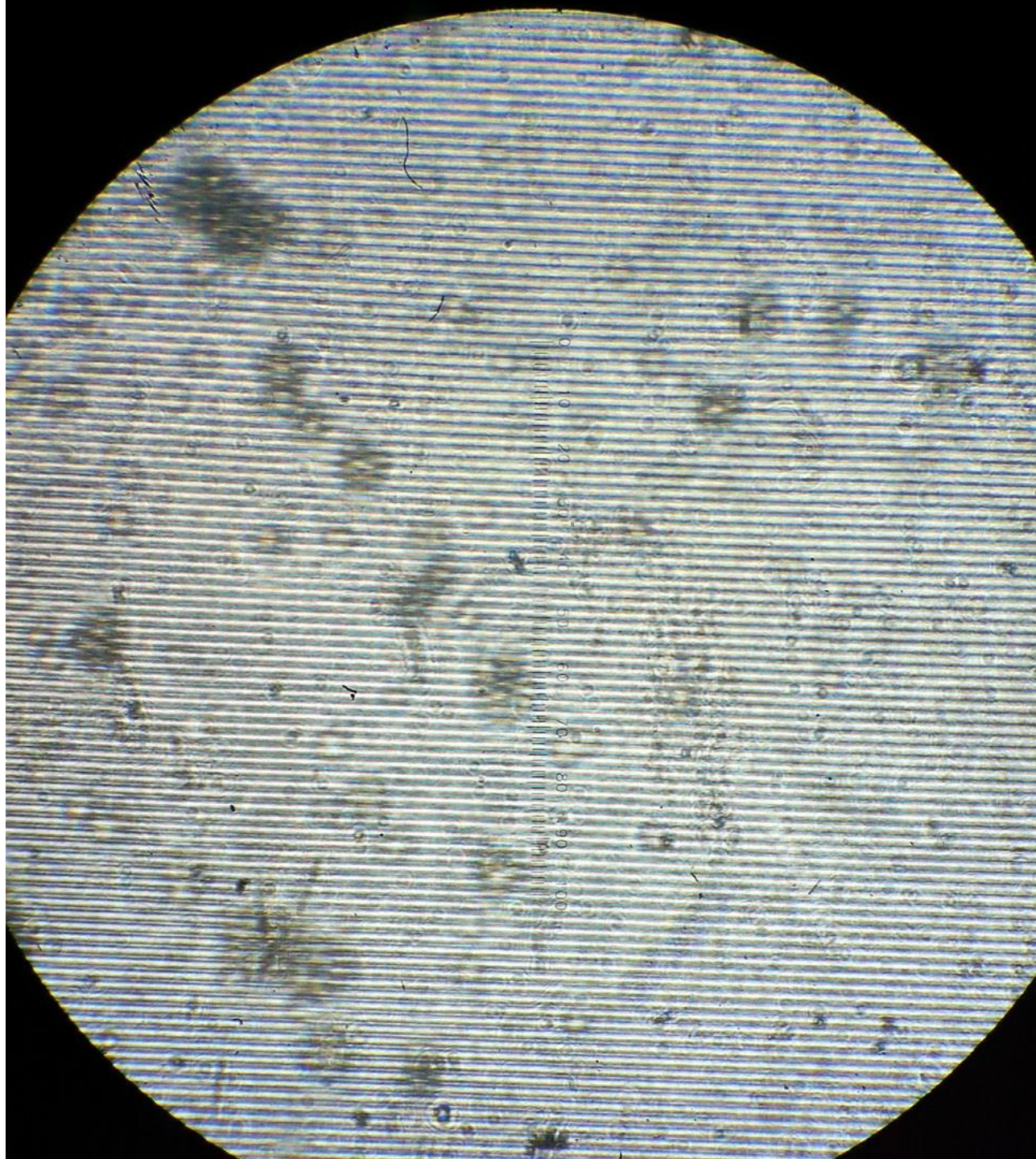
教科書p.148

# 回折格子1

ロンキールーリング

5000サイクル/インチ  
196.85サイクル/mm

1周期  
5.08 $\mu$ m

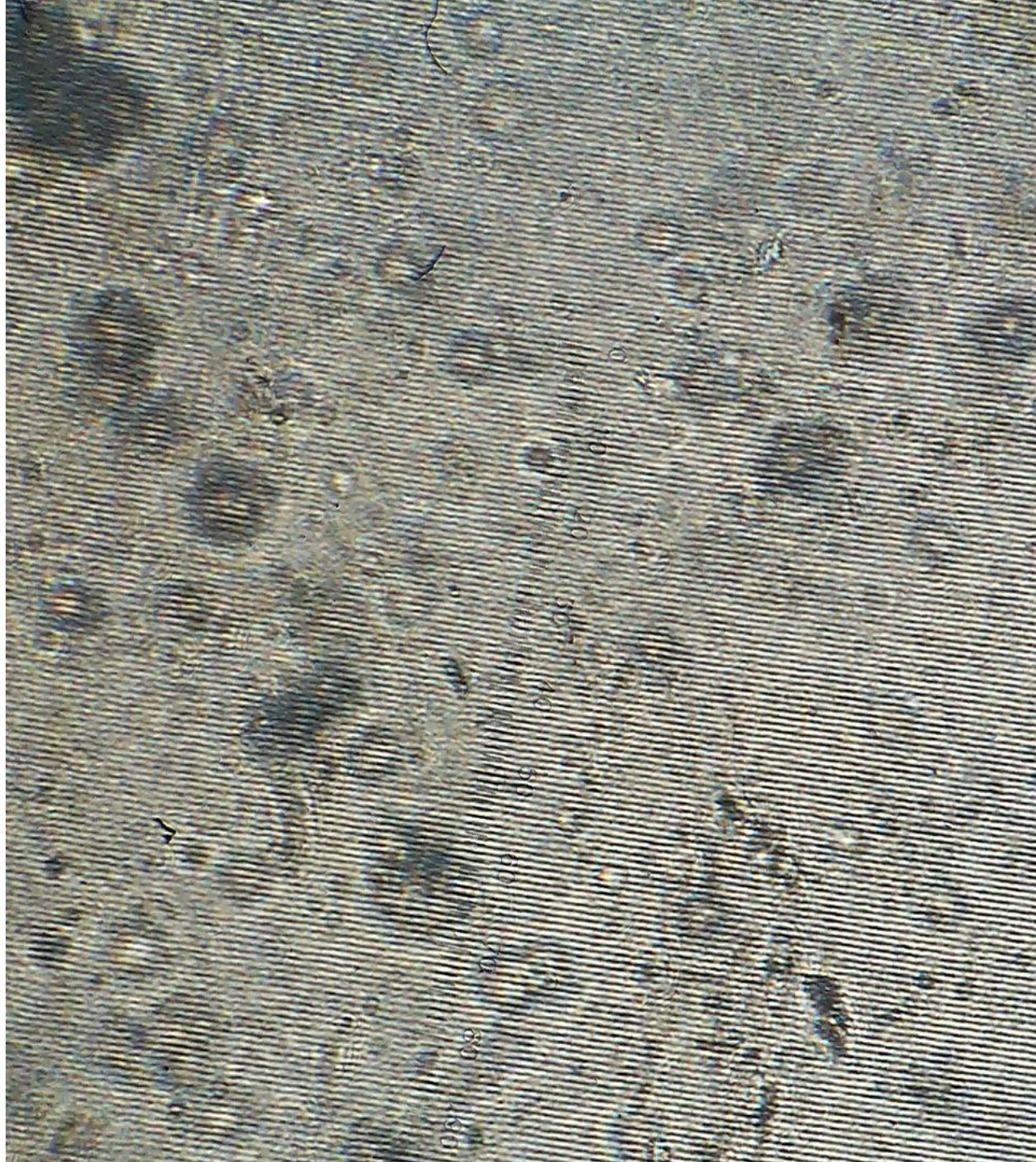


# 回折格子2

フィルム回折格子

500サイクル/mm

1周期2 $\mu$ m

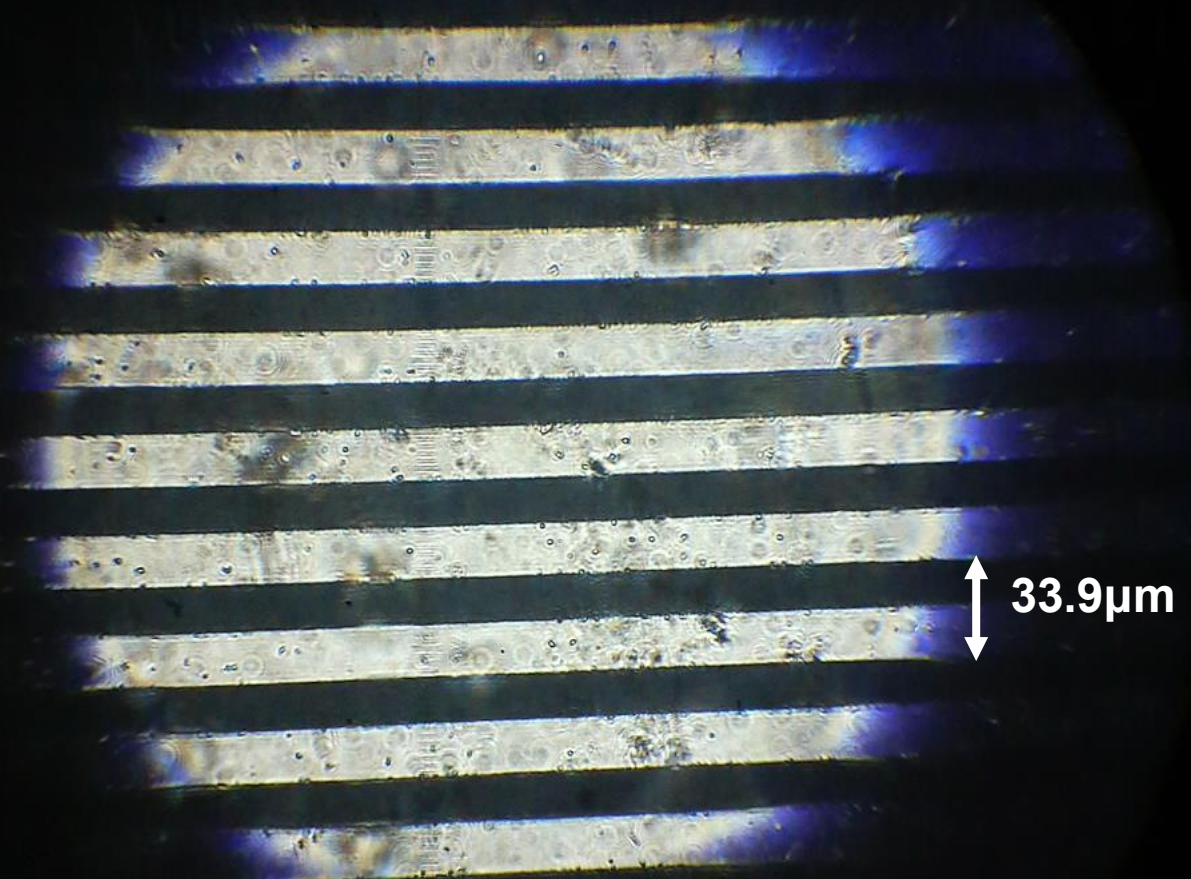


# 回折格子3

ロンキールーリング

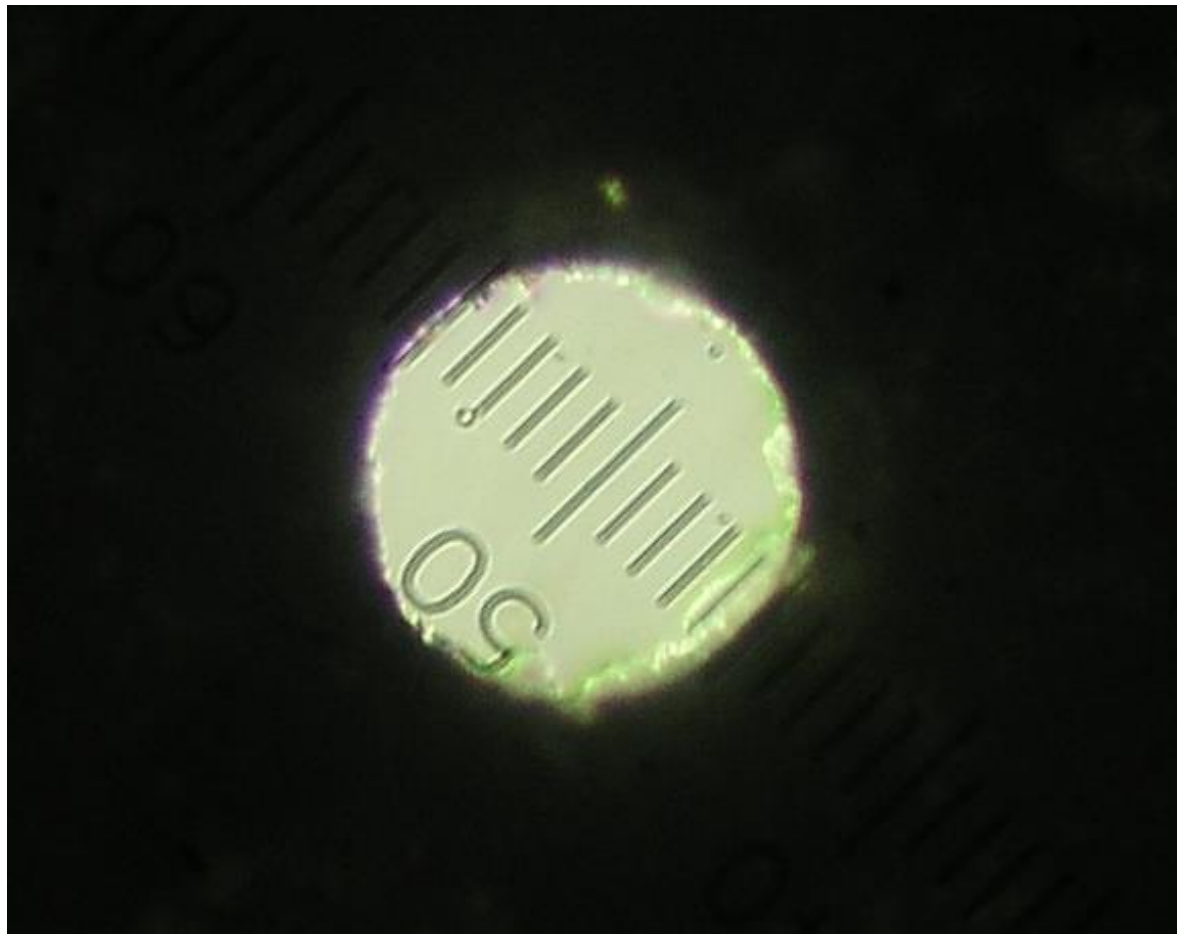
750サイクル/インチ  
29.52サイクル/mm

1周期  
33.9 $\mu$ m



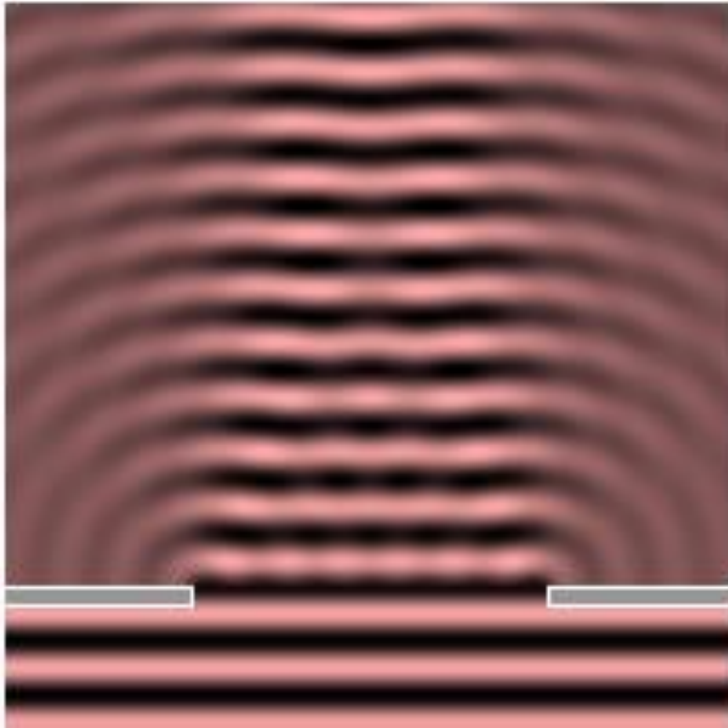
# 円形開口からの回折

直径100 $\mu\text{m}$ のピンホール



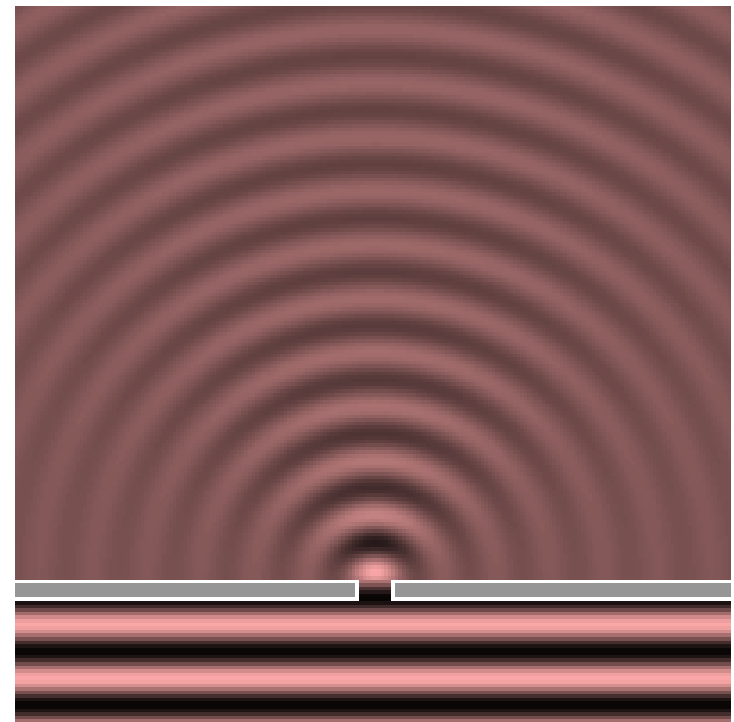
なぜこのような回折パターンが  
生じるのか？

# 波の回折



波長より十分大きい開口  
直進性

粒子的振る舞い

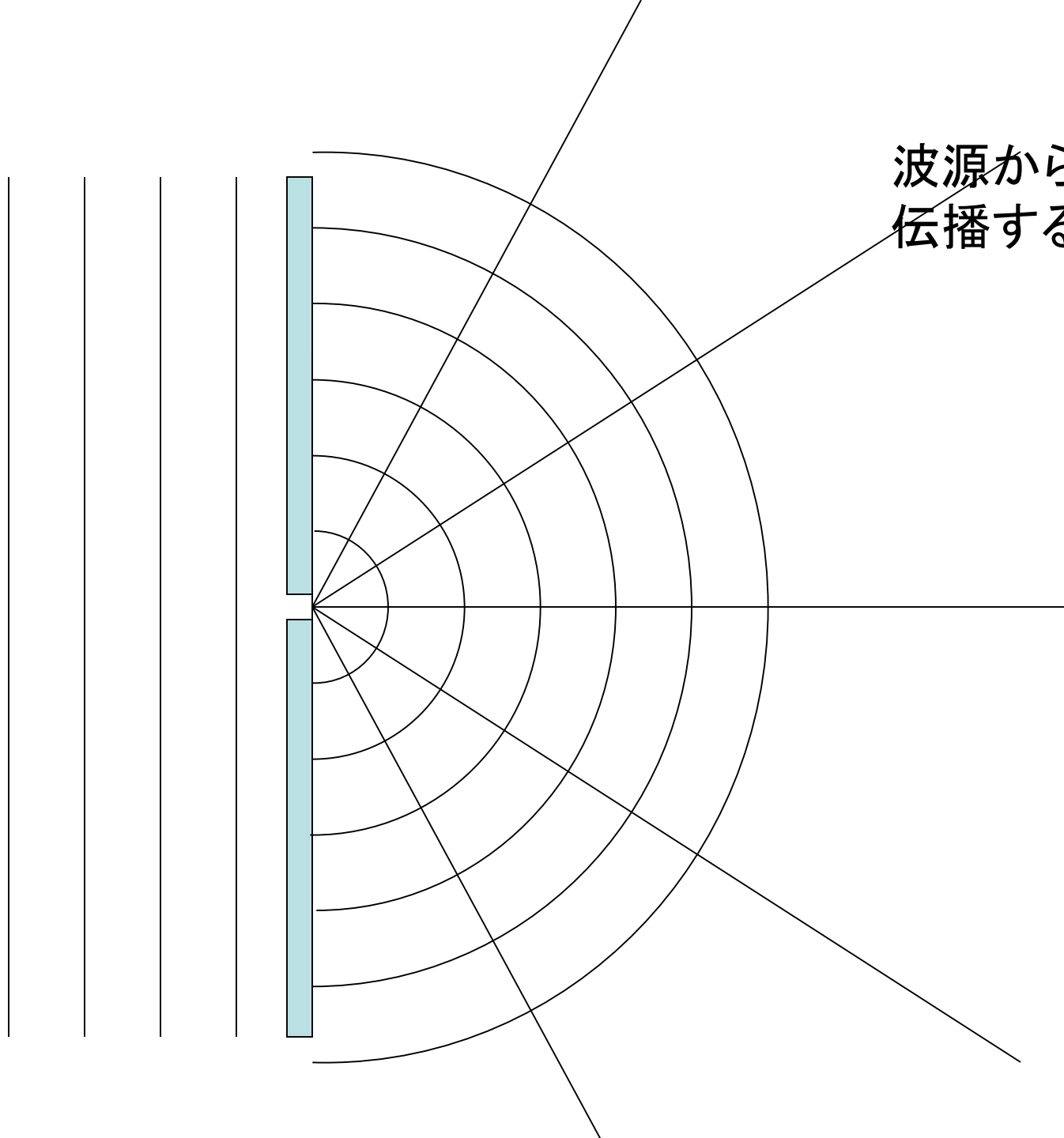


波長程度の開口  
回折

波動的振る舞い

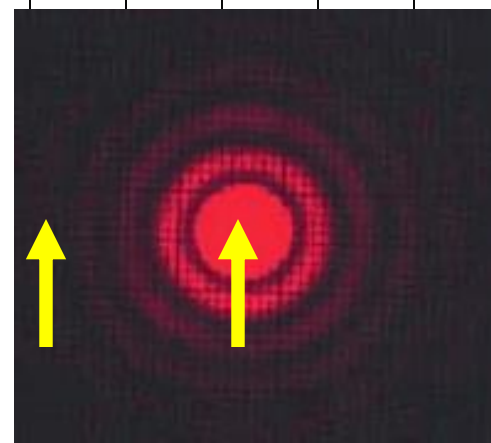


波源からすべての方向に  
伝播する

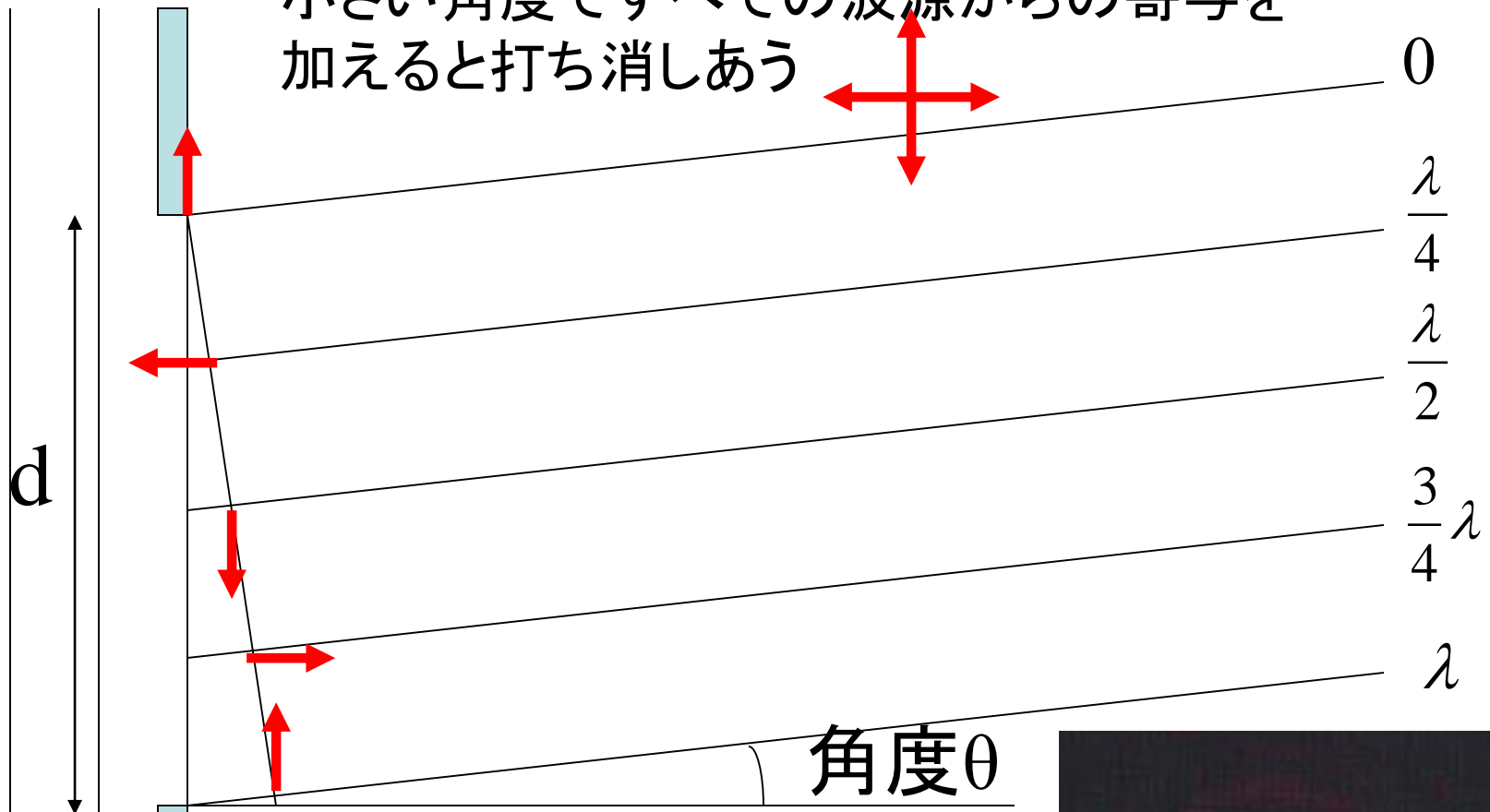


すべての波源からの寄与を  
加えると打ち消しあう

強め合う

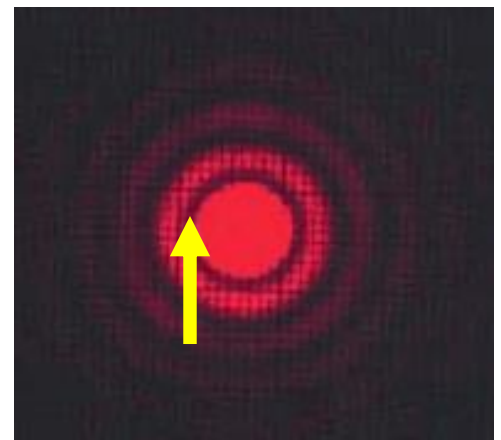


小さい角度ですべての波源からの寄与を  
加えると打ち消しあう

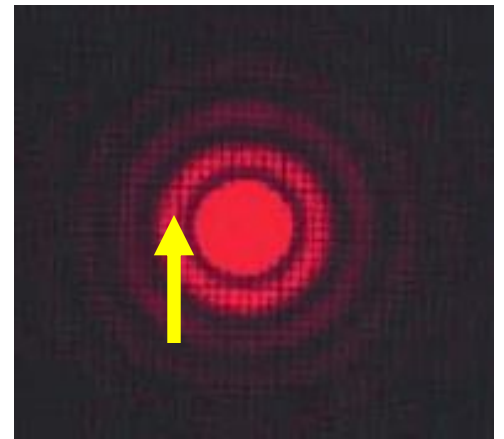
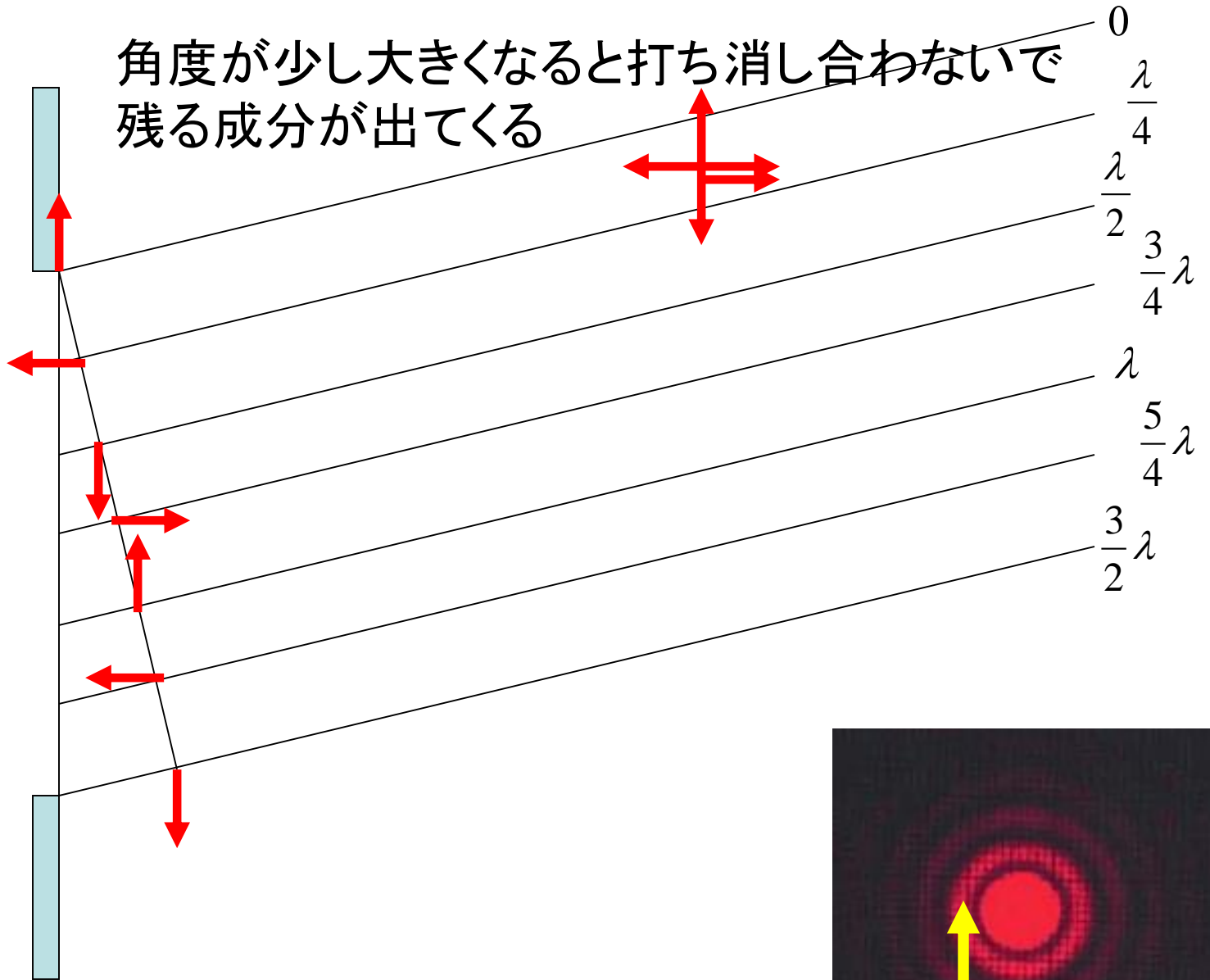


角度 $\theta$

$d \sin\theta = \lambda$   $\theta \ll 1$  のとき  
ビームの広がりが角 $\theta \sim \lambda/d$



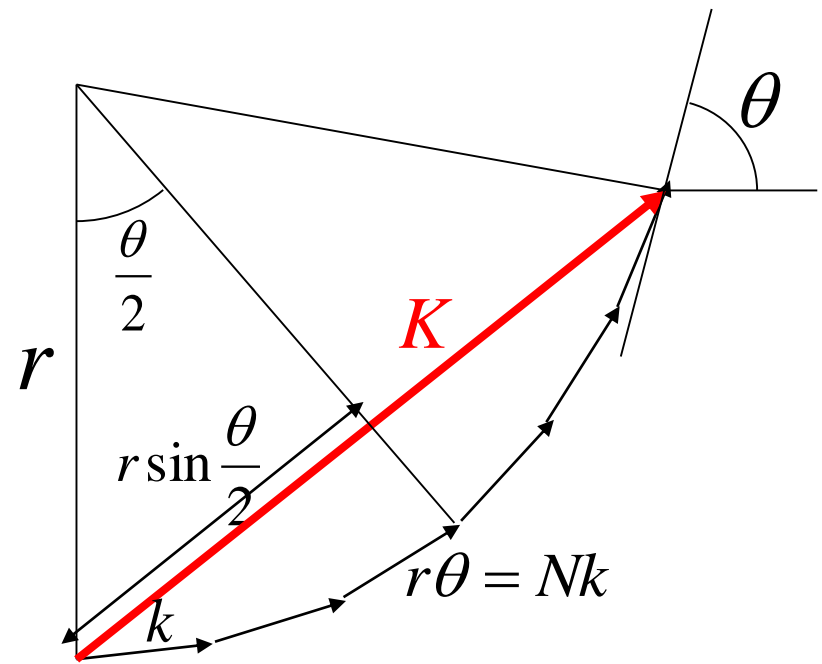
角度が少し大きくなると打ち消し合わな  
残る成分が出てくる



# 定量的に

$$r = \frac{Nk}{\theta}$$

$$K = 2r \sin \frac{\theta}{2} = 2 \frac{Nk}{\theta} \sin \frac{\theta}{2} = \frac{Nk \sin \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}$$



# 光の伝播 まとめ

光は自分自身と干渉して、強め合う方向に進む

推薦図書

ファインマン:

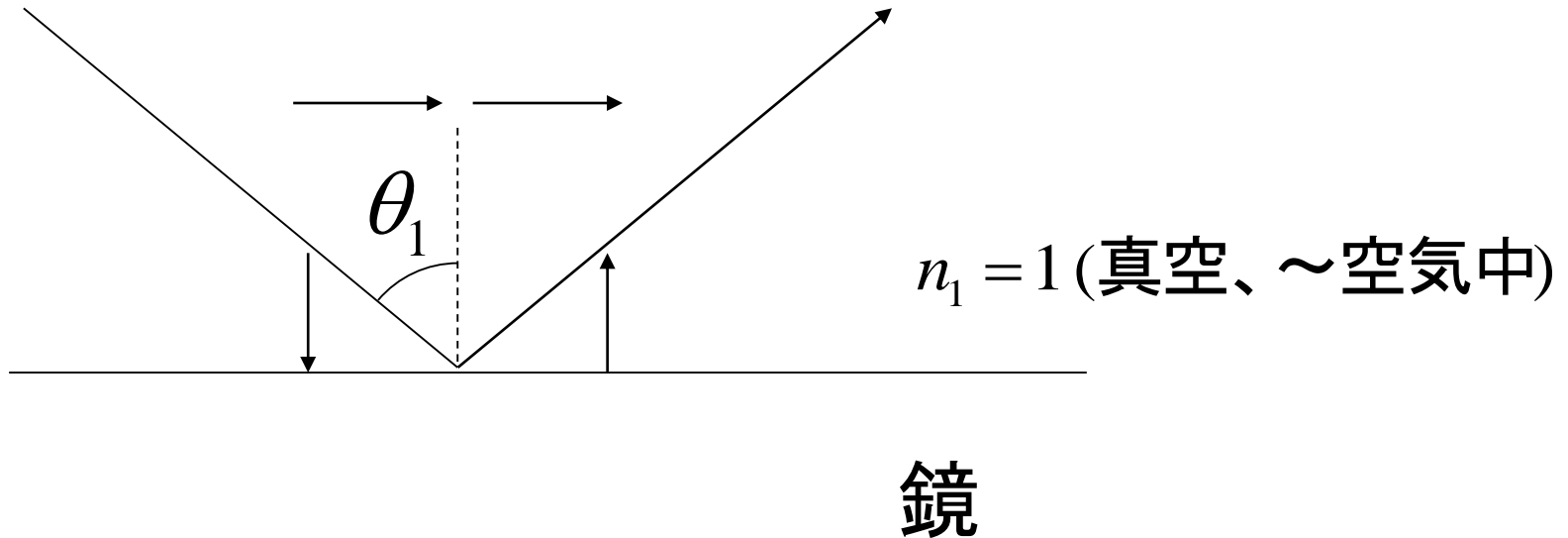
光と物質のふしぎな理論 私の量子電磁力学

# 光の屈折の他の説明

光の粒子性から説明できないか？

# 光の反射

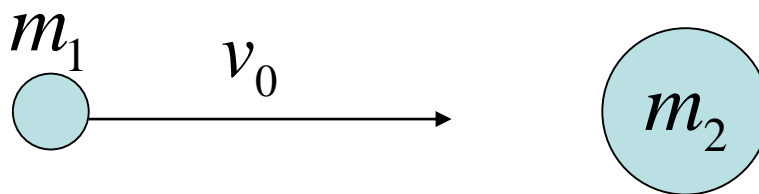
粒子の反射(界面と平行な運動量が保存)と同じ



界面に垂直な運動量は反転(保存しない)



# 注意



右の粒子間の弾性衝突で、

$m_2 \rightarrow \infty$  (壁)に相当

$m_1$ の粒子のみに注目すると  
 $m_2$ の存在で空間の一様性  
(並進対称性)がなくなり、  
運動量が保存しないと見なせる。

反射・屈折のとき、  
界面に平行な方向では空間が一様  
なので、運動量保存

弾性衝突

運動量保存

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

エネルギー保存

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$v_2 = \frac{m_1}{m_2} (v_0 - v_1)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 (v_0 - v_1)^2$$

$$v_0^2 - v_1^2 = \frac{m_1}{m_2} (v_0 - v_1)^2$$

$$m_2 (v_0 + v_1) = m_1 (v_0 - v_1)$$

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 \quad v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0$$

$$m_2 \rightarrow \infty \quad v_1 = -v_0 \quad v_2 = 0$$

# 光は圧力を持つ(輻射圧)

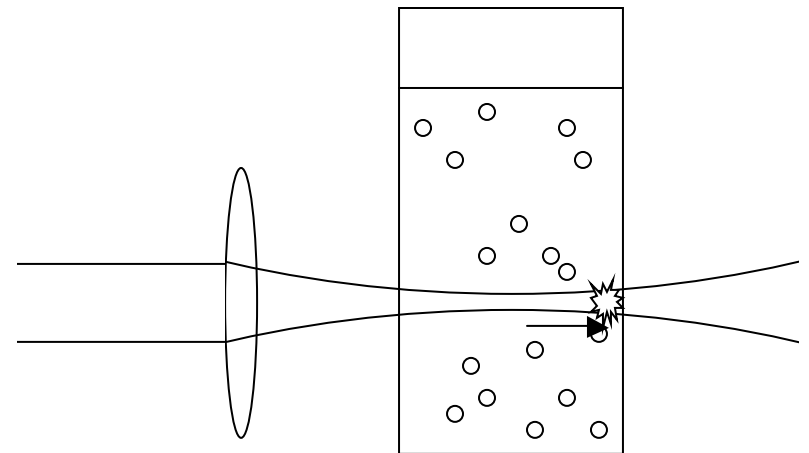
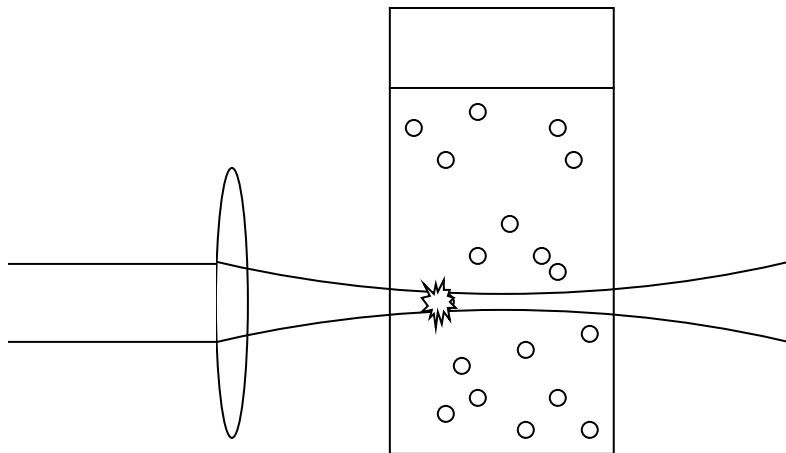
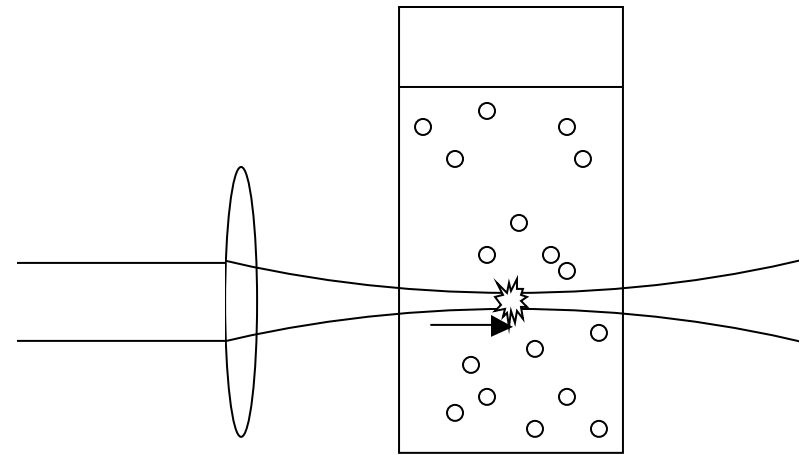
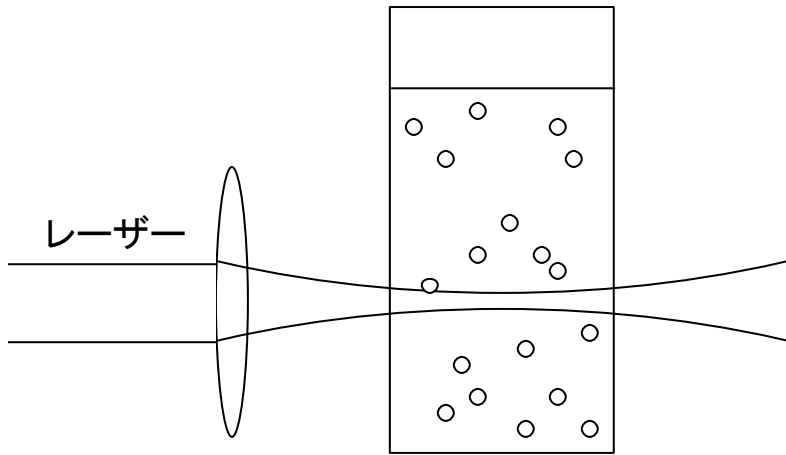
運動量が変化する ( $\Delta p$ ) とき、

反作用として  $-\frac{\Delta p}{\Delta t}$  の力を及ぼす

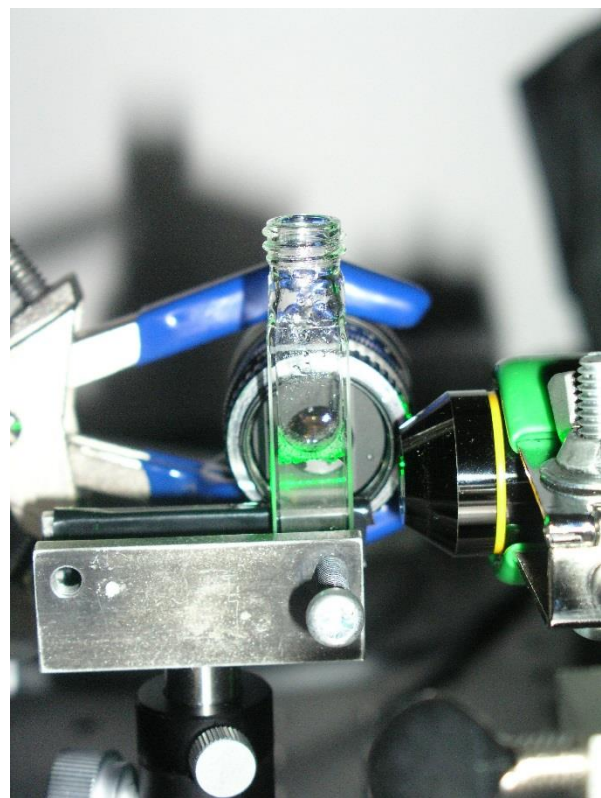
これが光の圧力となる

# 水中の直径 $20\mu\text{m}$ のポリスチレン球を レーザー光で動かす

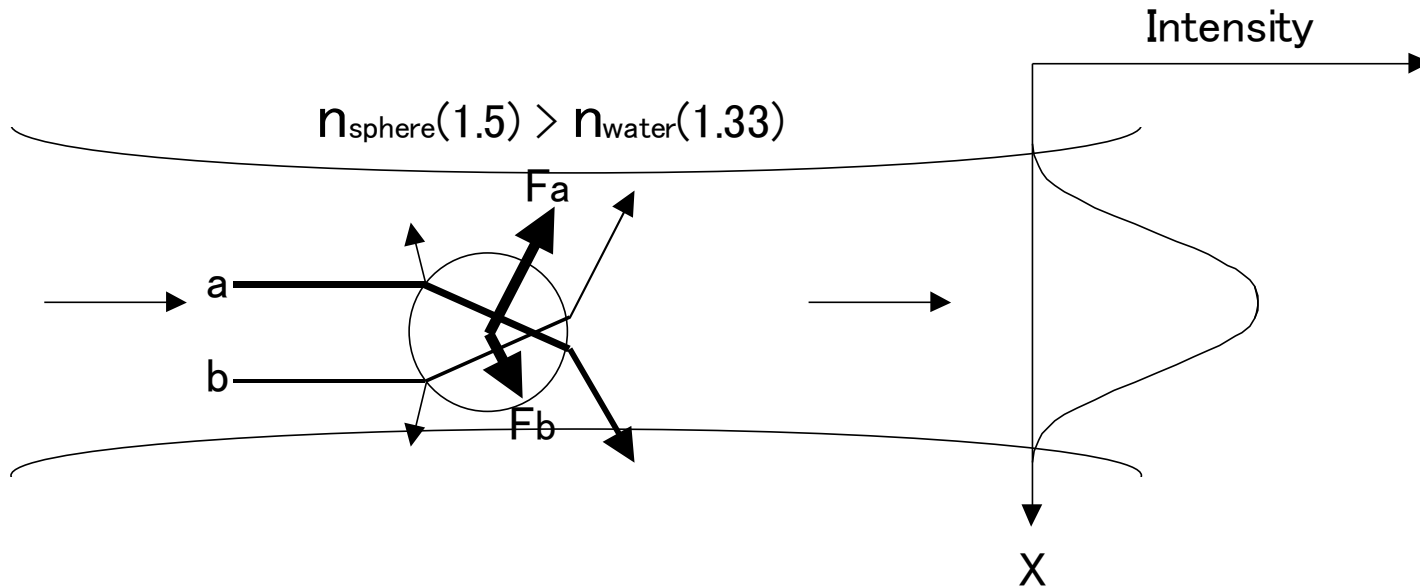
3年実験 レーザー



# 水中の直径 $20\mu\text{m}$ のポリスチレン球を レーザー光で動かす



# 光の輻射圧による微小球のトラップと推進



$r$ : ポリマー球の半径  $10\mu\text{m} \approx$  集光径

$\eta$ : 水の粘性  $10^{-3} \text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$      $P$ : レーザーパワー  $60\text{mW}$

$$F_{rad} = F_{\eta} \quad F_{rad} \approx \frac{I}{c} \times \pi r^2 = \frac{P}{\pi r^2 c} \times \pi r^2 = \frac{P}{c} \quad F_{\eta} = 6\pi\eta r v \text{ (Stokes' s law)}$$

終端速度  $1\text{mm}/\text{s}$

# 太陽光の圧力つかめ!

大きな帆を張り、ヨットのよつに宇宙空間を進む。SF小説に描かれた夢の宇宙探査機の実現に向けて日本の計画が動き出した。八月には高度百五十キロ・円で帆を開くロケット実験に成功し、来年には気球を使った実験も試みられる。木星を目指し出帆する日を目指し研究が進められている。

(滝田 恭子)

ヨットは帆に風を受けて海面を滑る。「ソーラーセール」と呼ばれる宇宙ヨットは太陽光の圧力を使って宇宙を航行する。

太陽光の圧力とはこうだ。光は非常に小さな運動量を持つ光子と呼ばれる粒子の束だ。光子の動きは、地上では風の動きや重力に比べるとあまりに小さいため私たちには感じられない。

しかし、真空、無重力の宇宙では太陽光の光子の圧力によって人工衛星の姿勢が乱されるほど。すい星の尾には太陽が噴出する高速のプラズマに吹き流された青いガスの帯と、光の圧力で飛ばされたちりの尾があるが、光圧のほうが千倍近くも強い。

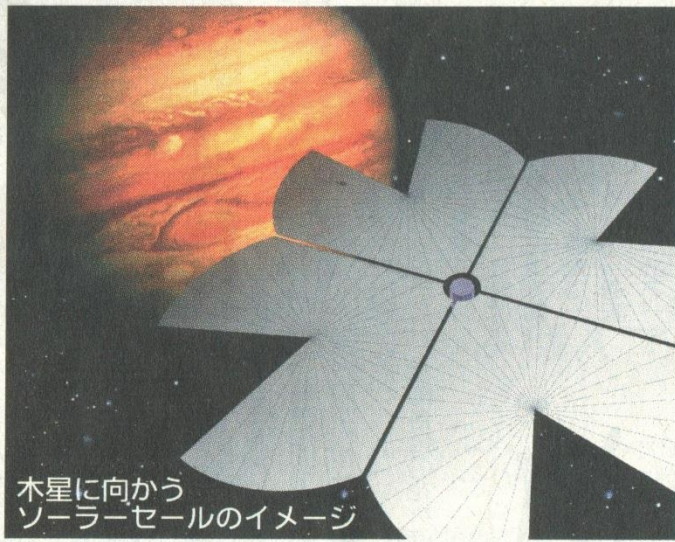
太陽光をヨットの推進力にしようという考えは、一九二〇年代にロシアの科学者が提案した。地球付近で一平方センチあたり一秒間に一京個も衝突する太陽光の光子は無尽蔵の「燃料」だ。一九七二年には作家の

アーサー・C・クラークが宇宙ヨットレースをテーマにしたSF小説「太陽からの風」を発表している。

※

だが、SFならまだしも実用化へのハードルは高かった。光の推進力は百四十方の帆を広げて、一円玉十枚に動く重力程度。だから帆や探査機自体が重いと役に立たない。高温でしかも放射線にさらされる宇宙空間の過酷な環境に耐えられ、薄く軽い帆が必要だったが、理想の材料はなかなか見つからなかった。

そんな中、日本で宇宙ヨットの研究を進めている宇



木星に向かうソーラーセールのイメージ

## “宇宙ヨット”帆の実験成功

宇宙航空研究開発機構は、「ポリイミド」という高分子フィルムに着目した。ポリイミドは300度以上の熱に耐えられ、放射線や紫外線にも強い。

同機構では光の反射率を上げるため片面に気化させたアルミを吹き付け、毛髪の太さの十分の一程度の七・五マイクロメートルという薄さにして帆の材料にした。

同機構の横田力男・主任研究員は「ポリイミドは携帯電話やパソコンの電子基板として多用されており、

分野 活用 課題 宇宙 付 巨大 折り 開か 傘 せて 法な みの

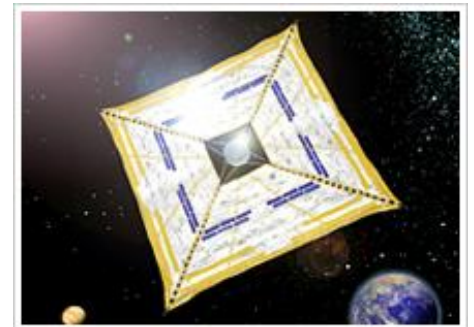
宇宙 10年 機構

サイエンス

# ソーラーセイル実証機イカロス

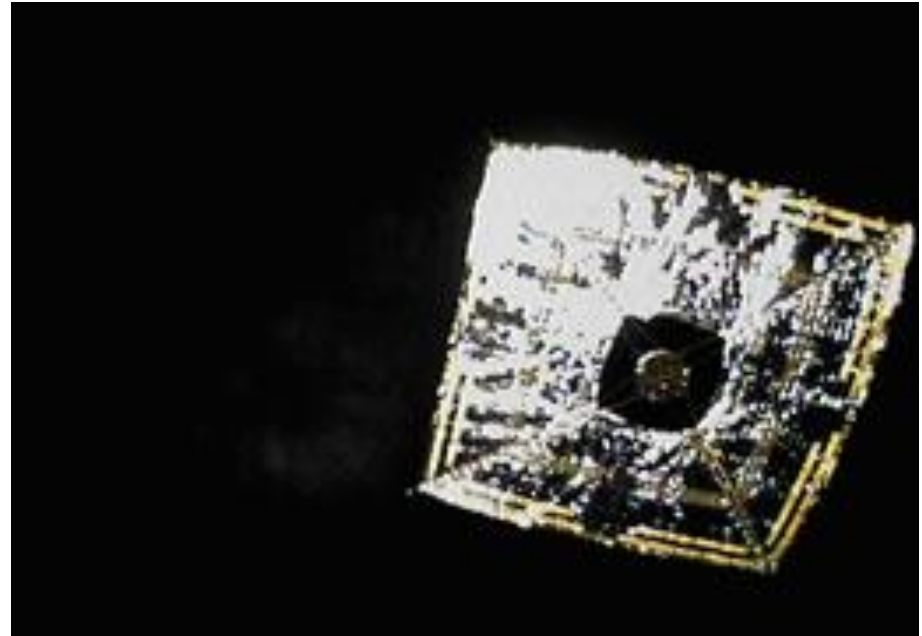
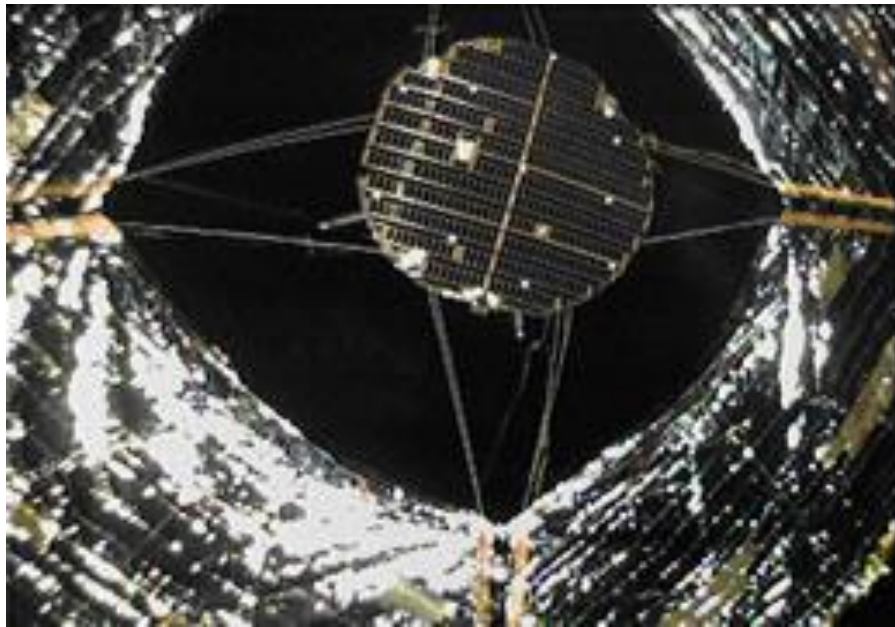
宇宙航空開発機構(JAXA)は、2010年度に種子島宇宙センターから、小型ソーラ電力セイル実証機「IKAROS(イカロス)」を金星探査機「あかつき(PLANET-C)」と相乗りでH-IIAロケットにより打ち上げる予定です。

「イカロス」は、「一辺約14.1mの大きな帆でヨットのように太陽の光を受けて、太陽系を航行する」宇宙船です。「イカロスキャンペーン」では、全世界の人々から応募いただいたお名前とメッセージをアルミプレートやDVDに収録し、「イカロス」に載せ、金星軌道に向かって宇宙の大海に旅立つというものです。また、「イカロス」と同じく2010年末に打ち上げ予定である米国惑星協会の「Light Sail-1(ライトセイル1号)」について、相互にミッション応援キャンペーンを実施します。



打ち上げ成功 2010年5月21日

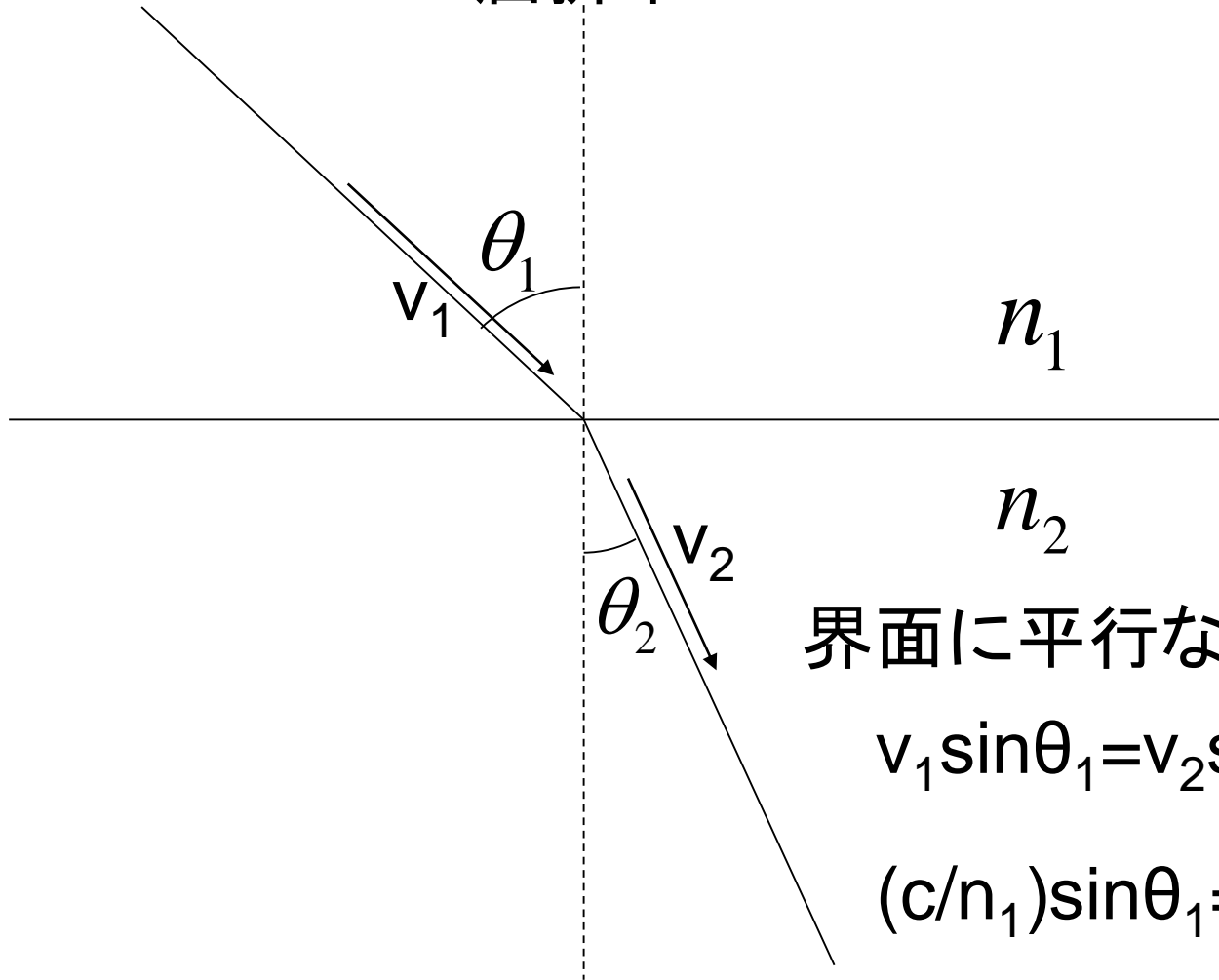
ソーラーセイルの展開成功 6月10日





# 光の運動量？

光の運動量  $\propto$  光の速度  $v$  ならば  
 $v=c/n$   $n$ :屈折率



界面に平行な運動量が保存

$$v_1 \sin \theta_1 = v_2 \sin \theta_2$$

$$(c/n_1) \sin \theta_1 = (c/n_2) \sin \theta_2$$

$$n_2 \sin \theta_1 = n_1 \sin \theta_2$$

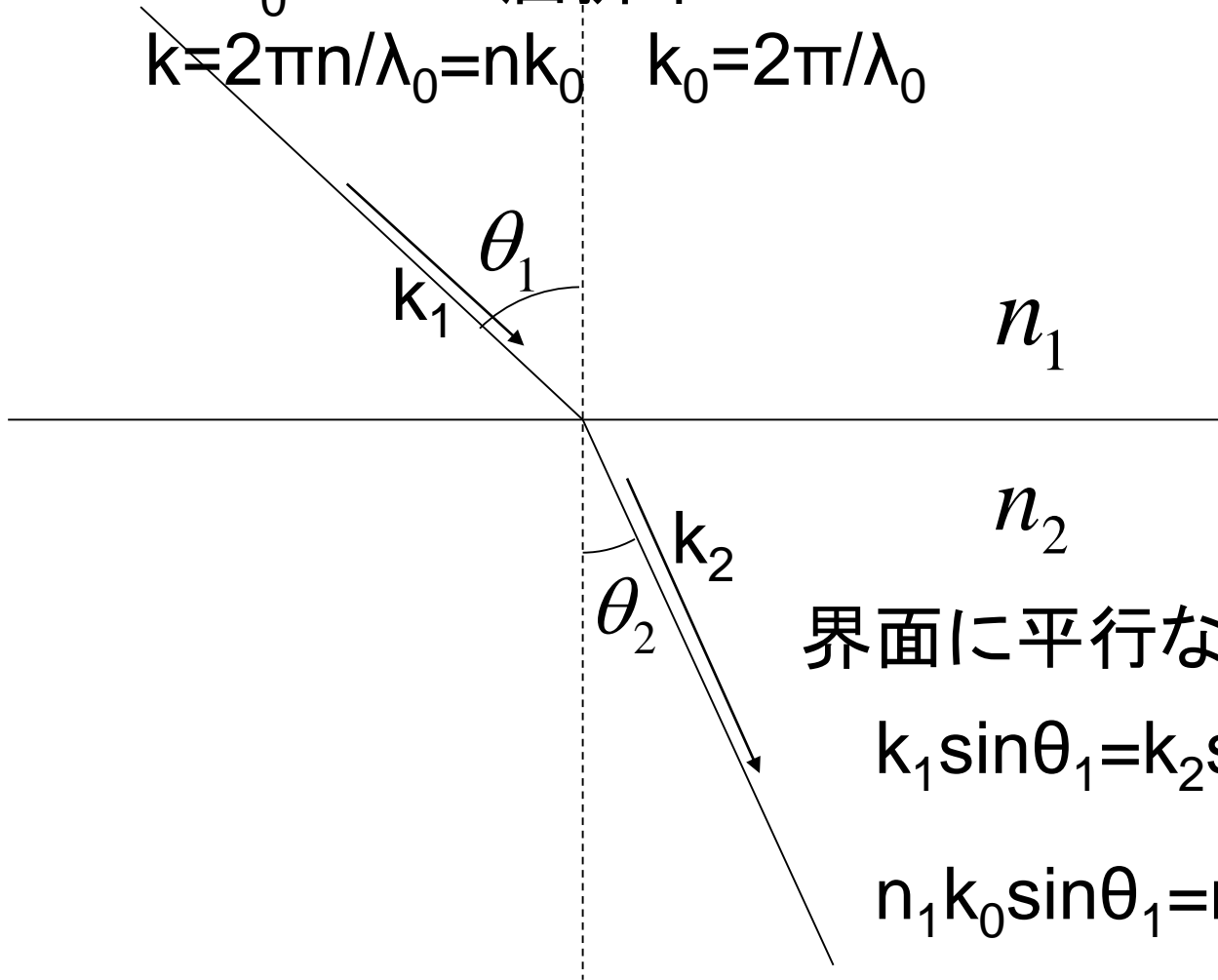
光の運動量  $\propto$  光の速度  $v$  とすると、  
屈折の法則を説明できない

# 光の運動量？

光の運動量  $\propto$  光の波数  $k=2\pi/\lambda$  ならば

$\lambda=\lambda_0/n$   $n$ :屈折率

$k=2\pi n/\lambda_0=nk_0$   $k_0=2\pi/\lambda_0$



界面に平行な運動量が保存

$$k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2$$

$$n_1 k_0 \sin \theta_1 = n_2 k_0 \sin \theta_2$$

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

# 光子のエネルギーと運動量

$$\text{エネルギー } E = hf = \frac{h}{2\pi} 2\pi f = \hbar\omega$$

$$\text{運動量 } p = \hbar k \quad (\text{運動量の単位})$$

$$\hbar[\text{J}\cdot\text{s}]$$

$$\hbar k[\text{J}\cdot\text{s}/\text{m}] = [\text{kg m}^2/(\text{s}\cdot\text{m})] = [\text{kg m/s}]$$

すなわち

$$\omega = k_0 c \quad 2\pi f = \frac{2\pi}{\lambda_0} c \quad f\lambda_0 = c$$

$$E = p_0 c \quad (\text{真空中})$$

$$\text{物質中では } f \frac{\lambda_0}{n} = \frac{c}{n} (=v) \quad 2\pi f = n \frac{2\pi}{\lambda_0} v \quad \omega = kv = nk_0 \frac{c}{n}$$

$$E = pv$$

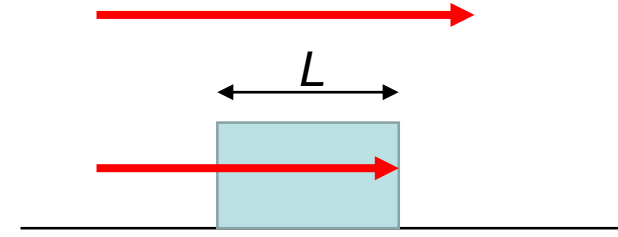
$$p = n\hbar k_0 \quad \text{Minkowski運動量}$$

# 補足：誘電媒質中でのMinkowski運動量とAbraham運動量

長さ $L$ , 質量 $M$ , 屈折率 $n$ の透明ブロックに光子が入射

全エネルギー  $E = Mc^2 + \hbar\omega$  全運動量  $P = \frac{\hbar\omega}{c} = \hbar k_0$

ブロックの通過時間  $T = nL/c$



通過後、ブロックがない場合に比べ光子は  $cT - \frac{c}{n}T = (n-1)L$  だけ伝搬距離が短い

全重心（質量・エネルギー中心）の保存（重心は初期移動速度  $V = \frac{P}{E}$  を保つ）は  
 ブロックが光子の進行方向に  $\Delta z$  動くことで補償される

$Mc^2\Delta z = \hbar\omega(n-1)L$  より  $\Delta z = \frac{\hbar\omega}{Mc^2}(n-1)L$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad c=1$$

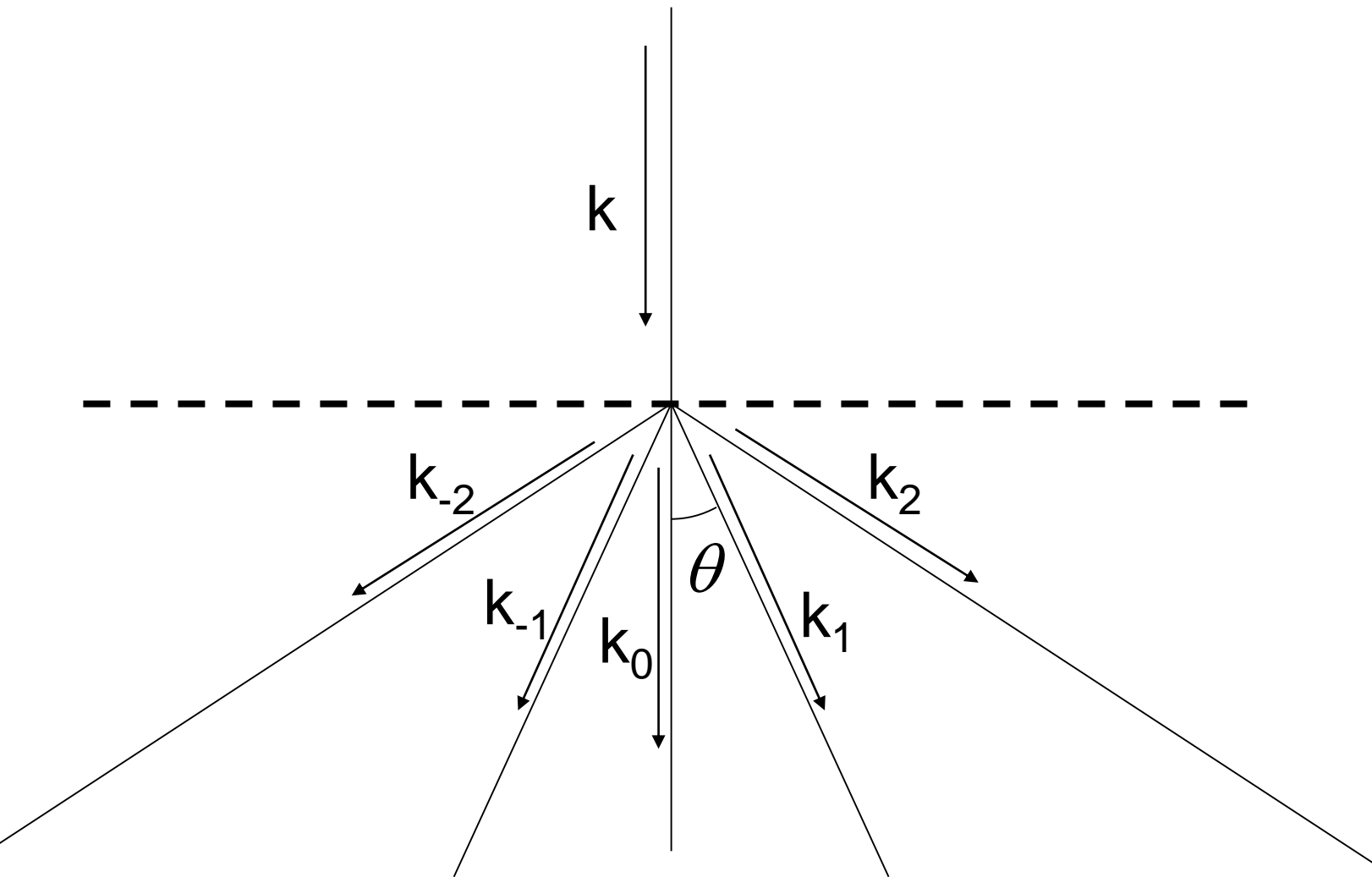
光子がブロック中にいる間に  $\Delta z$  動くためには、ブロックは運動量  $P_{block}$  を持つ。

$P_{block} = M \frac{\Delta z}{T} = M \frac{c\Delta z}{nL} = \frac{Mc}{nL} \frac{\hbar\omega}{Mc^2} (n-1)L = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{\hbar\omega}{c}$

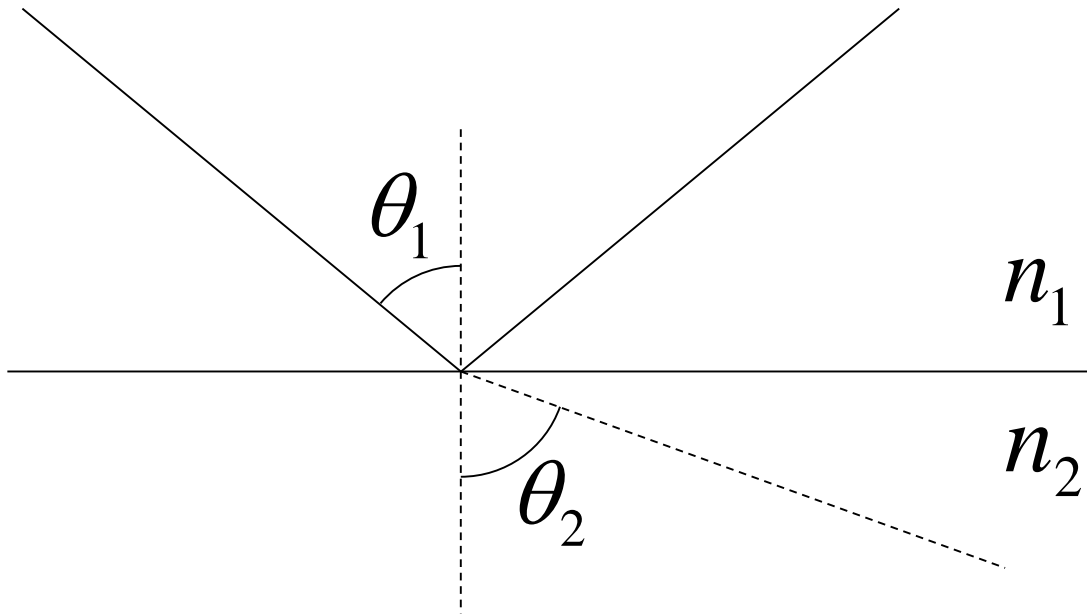
全運動量  $P = \frac{\hbar\omega}{c} = \hbar k_0$  の保存より  $P\left(= \frac{\hbar\omega}{c}\right) = P_{block} + P_{photon} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{\hbar\omega}{c} + \frac{\hbar\omega}{nc}$

$P_{photon} = \frac{\hbar\omega}{nc} = \frac{\hbar k_0}{n}$  Abraham運動量

# 回折格子による回折は？ 運動量保存？



# 全反射とは？



$$n_1 \quad n_1 > n_2$$

$$n_2 \quad n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

$\theta_1$ が大きくて

$$\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 > 1 \geq \sin \theta_2$$

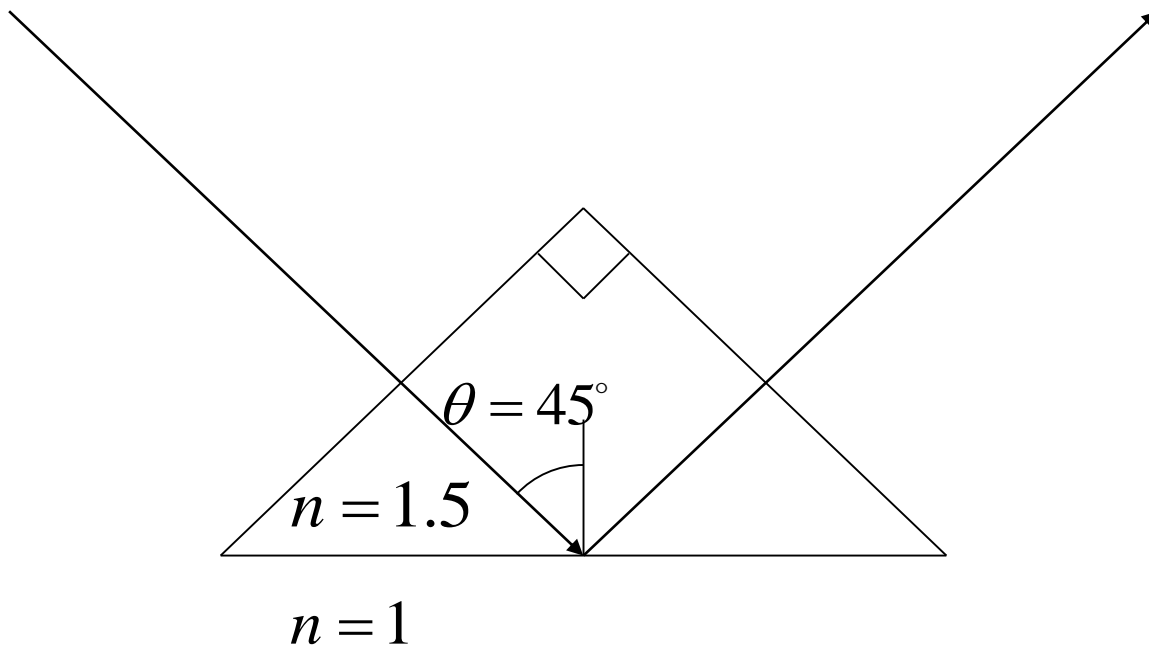
を満たすとき、全反射

$$\sin \theta_1 > \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{n_1} \quad (n_2 = 1 \text{ のとき})$$

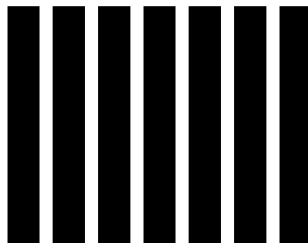
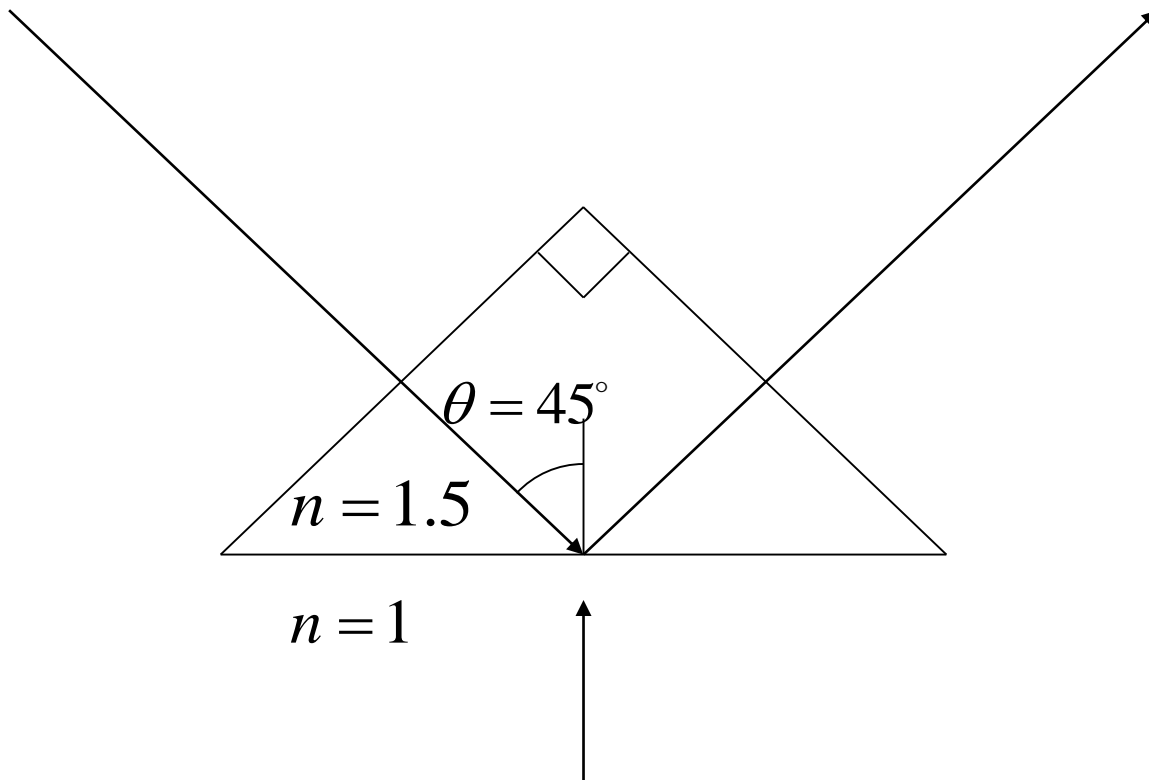
どんな角度で屈折しても  
入射光と屈折光の間で  
界面に平行な方向の運動量保存  
を満たせない



# 全反射



# 全反射

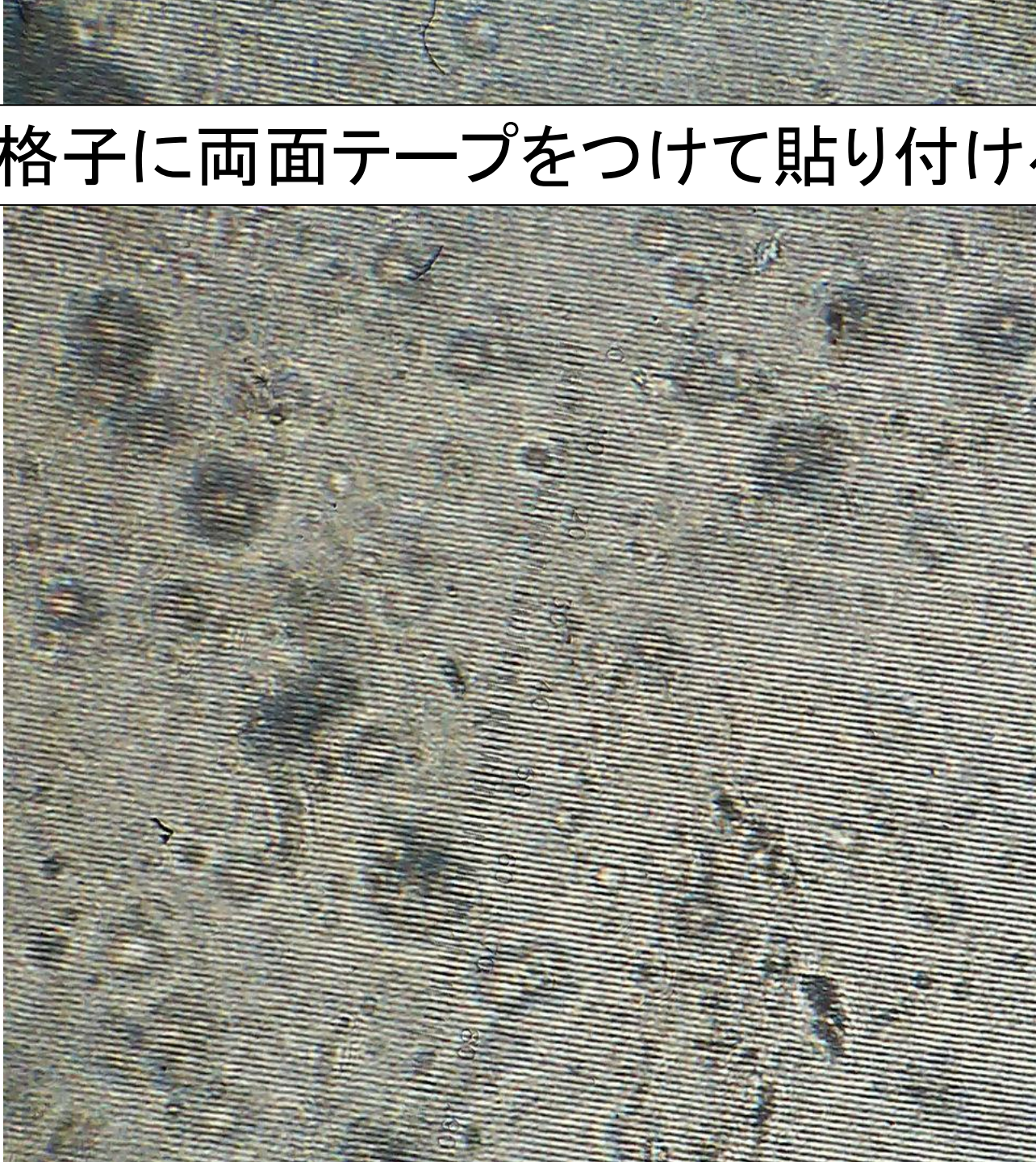


全反射しているガラス表面を  
左図のように塗り、透明な面積を  
減らすとどうなるか？

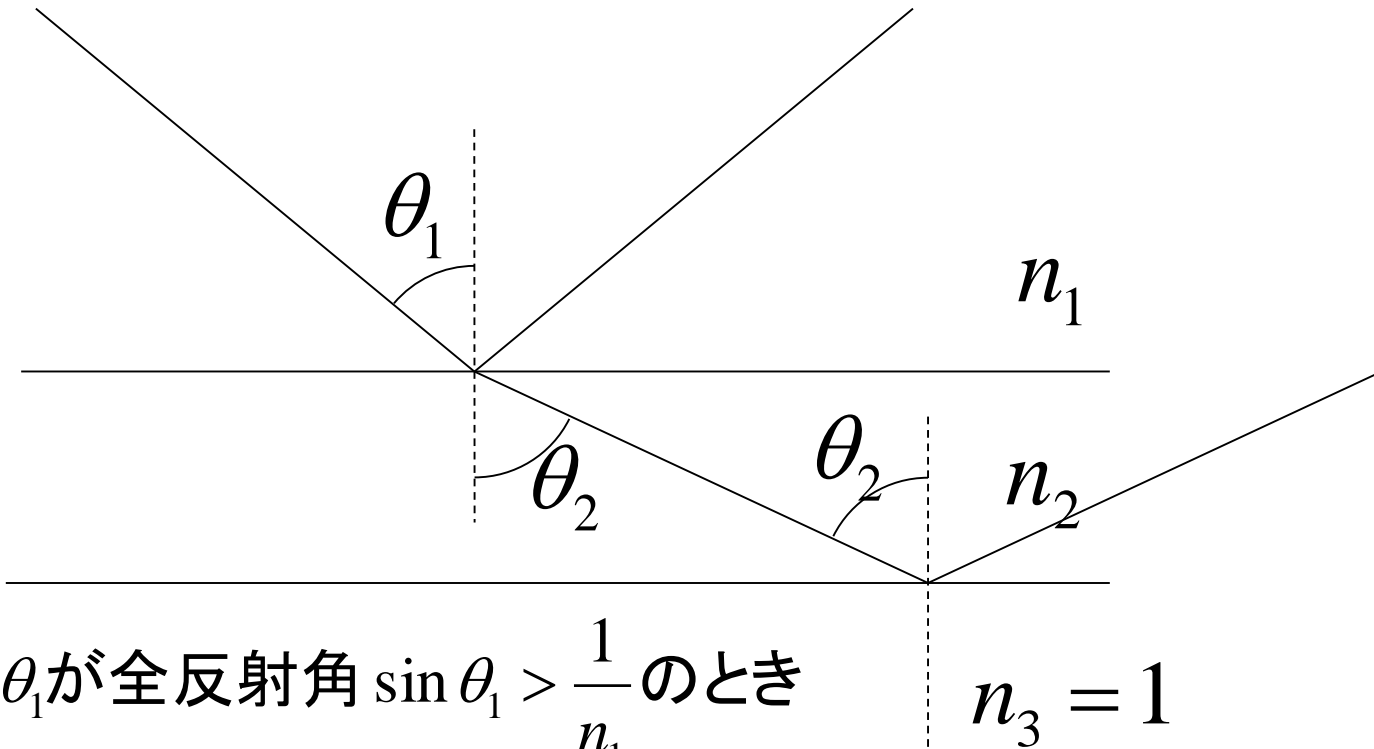
フィルム回折格子に両面テープをつけて貼り付ける

500サイクル/mm

1周期2 $\mu$ m



# 全反射



図は

$$n_1 > n_2 > n_3 = 1$$

の場合

$\theta_1$ が全反射角  $\sin \theta_1 > \frac{1}{n_1}$  のとき

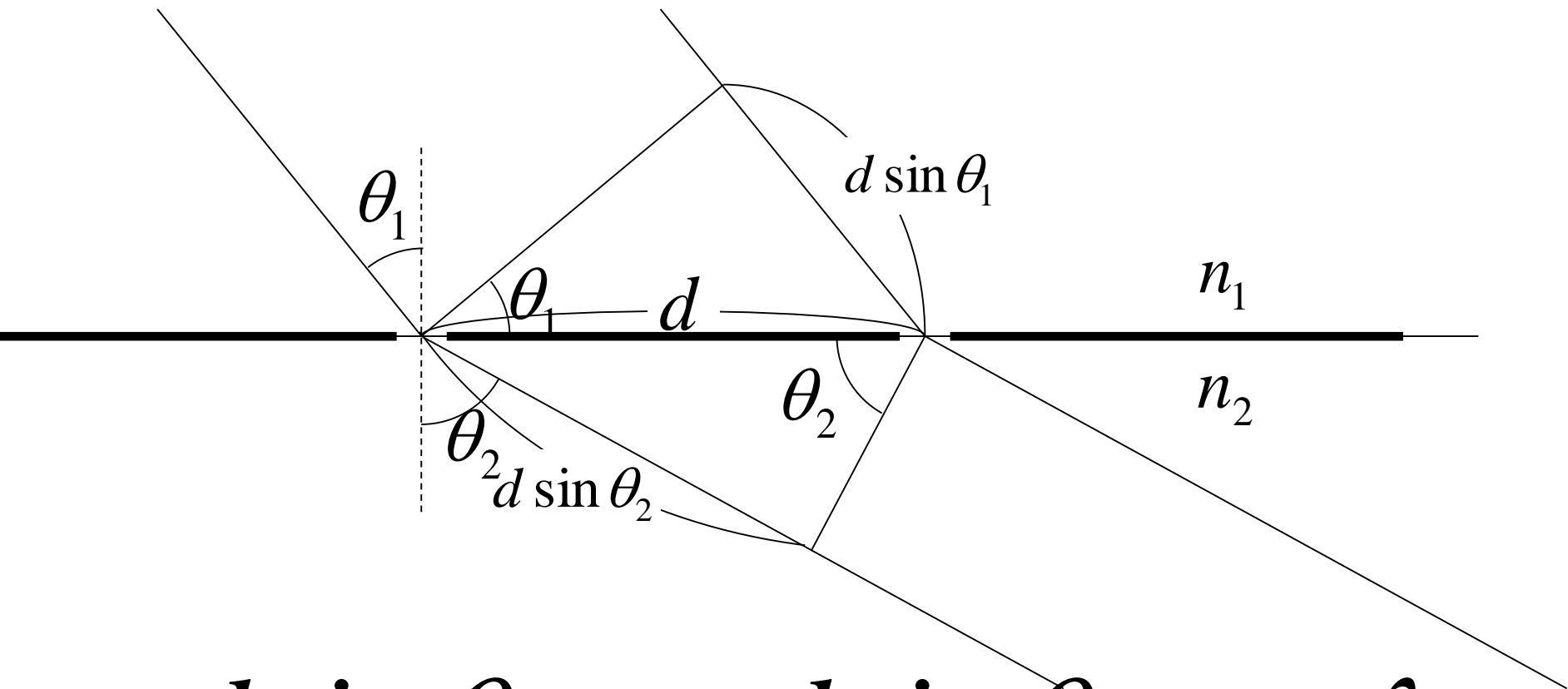
$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 > 1$$

$$\sin \theta_2 > \frac{1}{n_2}$$

$\theta_2$ も全反射角

界面に薄膜層が加わっても  
全反射条件を満たす

# 回折格子による回折条件



$$n_1 d \sin \theta_1 - n_2 d \sin \theta_2 = m \lambda$$

$$d(n_1 \sin \theta_1 - n_2 \sin \theta_2) = m\lambda$$

$$n_1 = 1.5, n_2 = 1, d = 2000\text{nm}, \theta_1 = 45^\circ, \lambda = 633\text{nm}$$

$$2000\left(\frac{1.5}{1.414} - \sin \theta_2\right) = 633m$$

$$m = 1 \quad \sin \theta_2 = 0.744 \quad \theta_2 = 48^\circ$$

$$m = 2 \quad \sin \theta_2 = 0.428 \quad \theta_2 = 25^\circ$$

$$m = 3 \quad \sin \theta_2 = 0.111 \quad \theta_2 = 6^\circ$$

$$m = 4 \quad \sin \theta_2 = -0.205 \quad \theta_2 = -12^\circ$$

$d$  を小さくしていくと何が起こるだろうか？

$$d(n_1 \sin \theta_1 - n_2 \sin \theta_2) = m\lambda$$

$$n_1 \sin \theta_1 - n_2 \sin \theta_2 = m \frac{\lambda}{d} \rightarrow \infty \quad (d \rightarrow 0)$$

$m = 0$  しか解がない

$\therefore n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$      $\lambda$  を大きくしても同じ

Snellの法則に帰着

# もっと詳しく検討してみよう

$$d(n_1 \sin \theta_1 - n_2 \sin \theta_2) = m\lambda$$

$$\frac{n_1}{\lambda} \sin \theta_1 - \frac{n_2}{\lambda} \sin \theta_2 = \frac{m}{d}$$

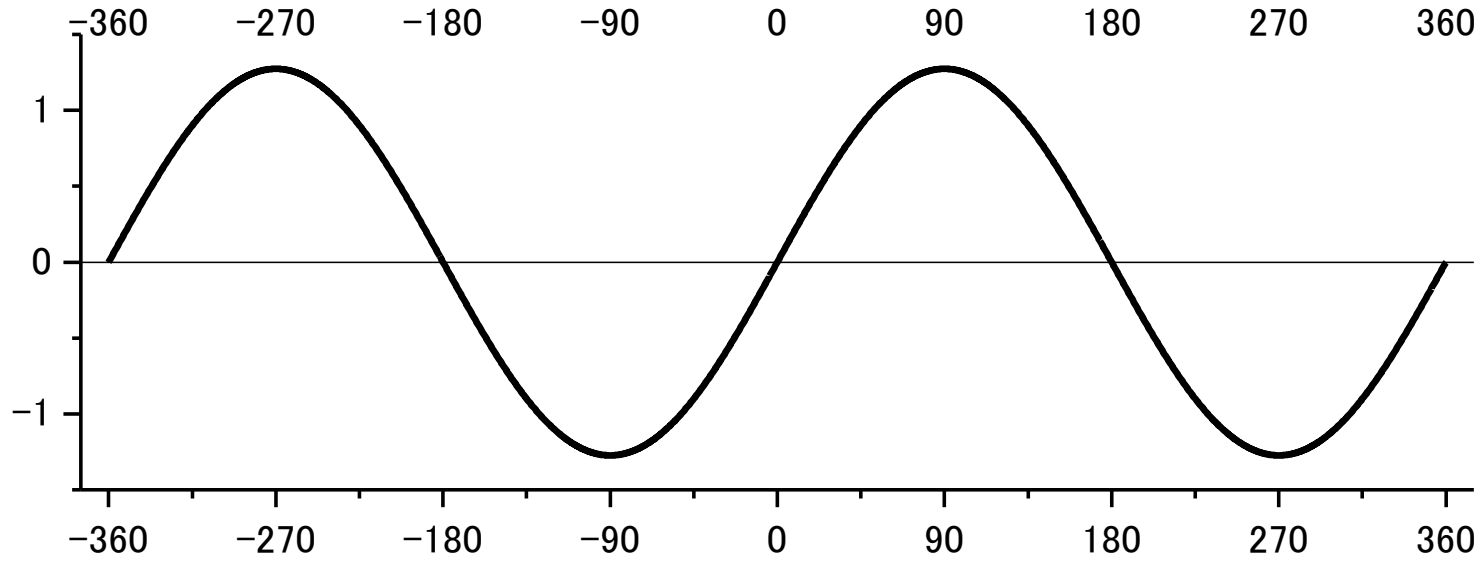
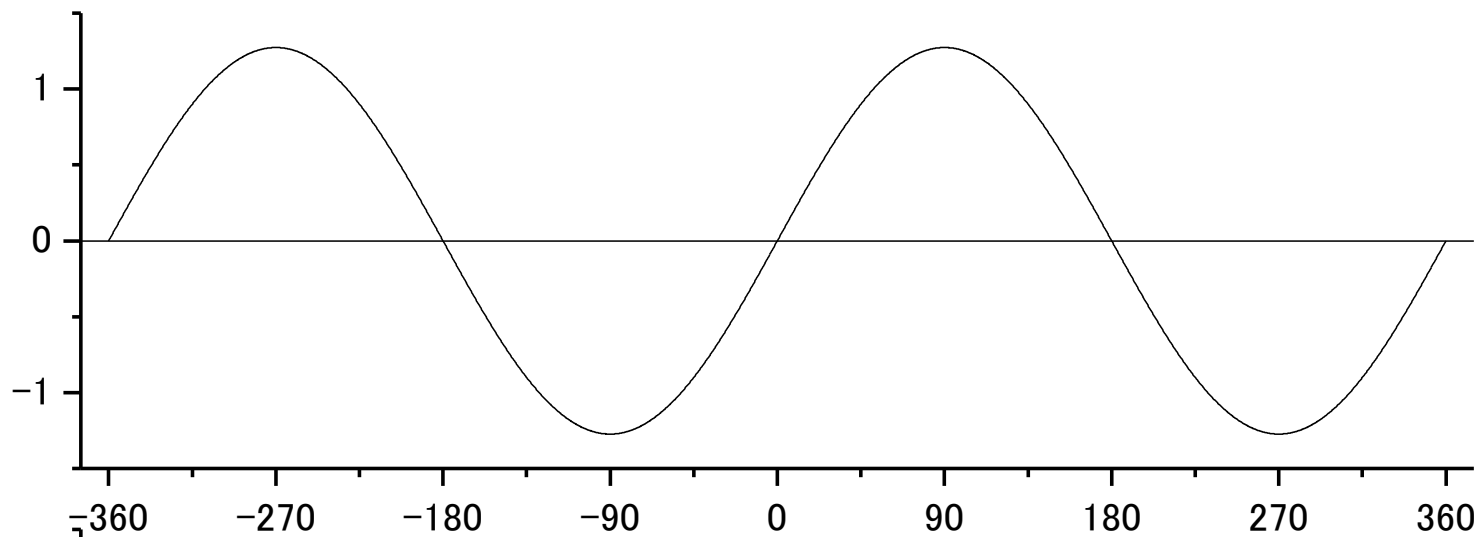
$$n_1 \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta_1 - n_2 \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta_2 = m \frac{2\pi}{d}$$

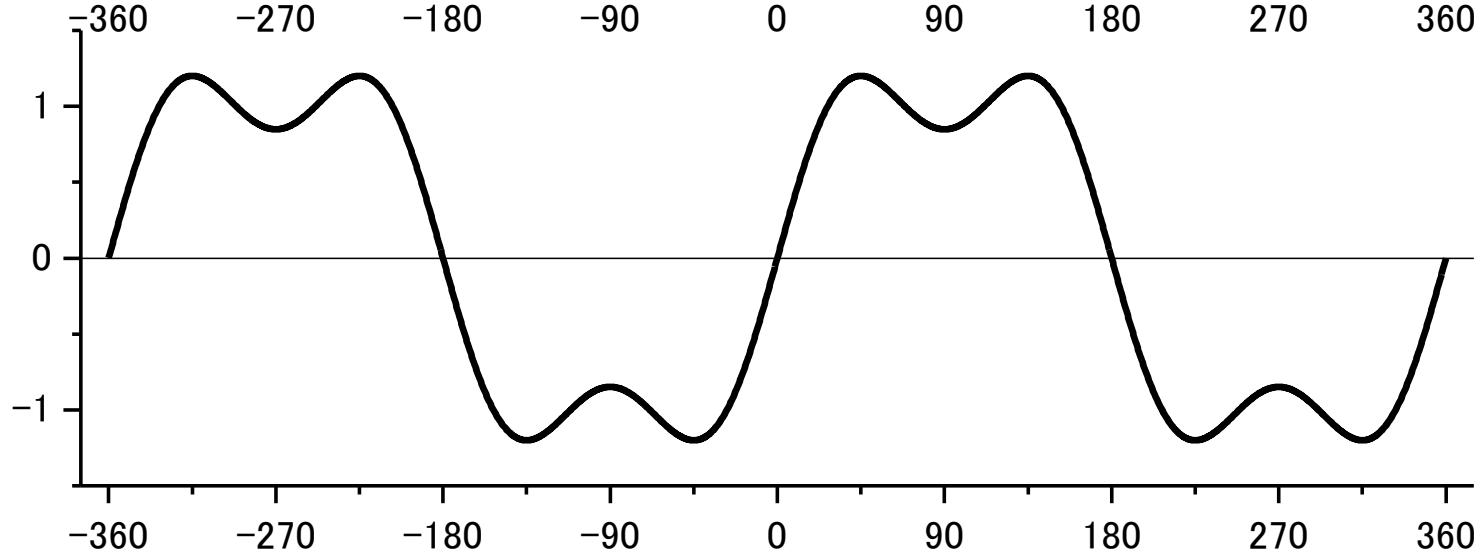
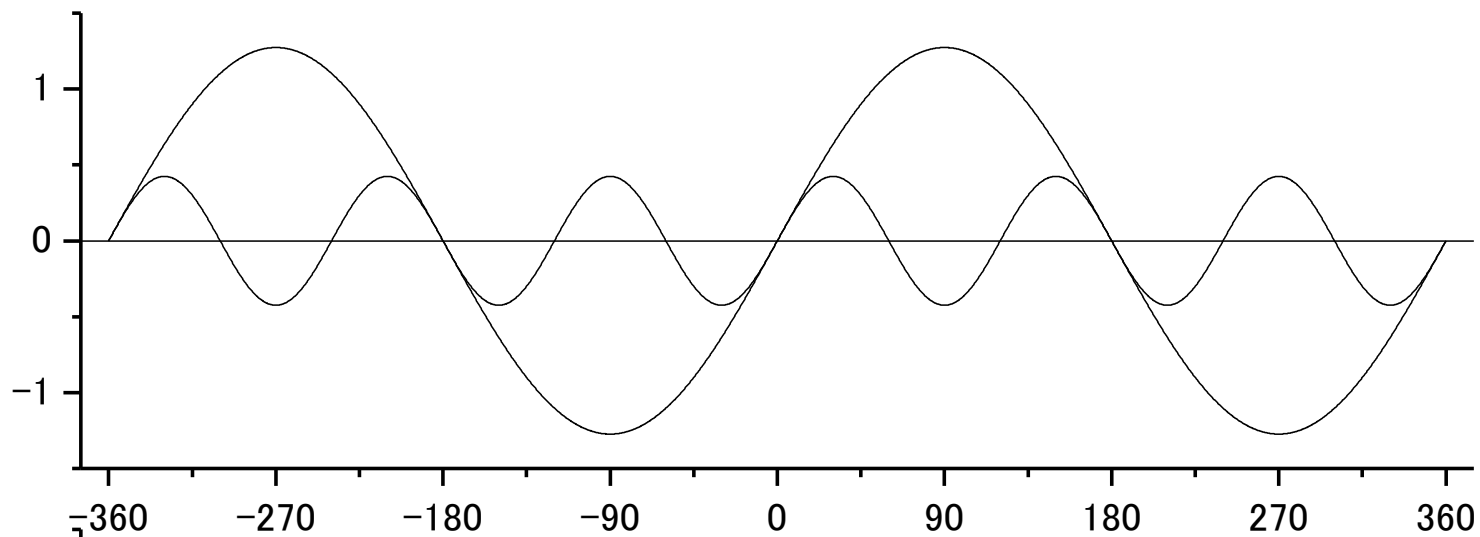
$$n_1 k \sin \theta_1 - n_2 k \sin \theta_2 = m k_d$$

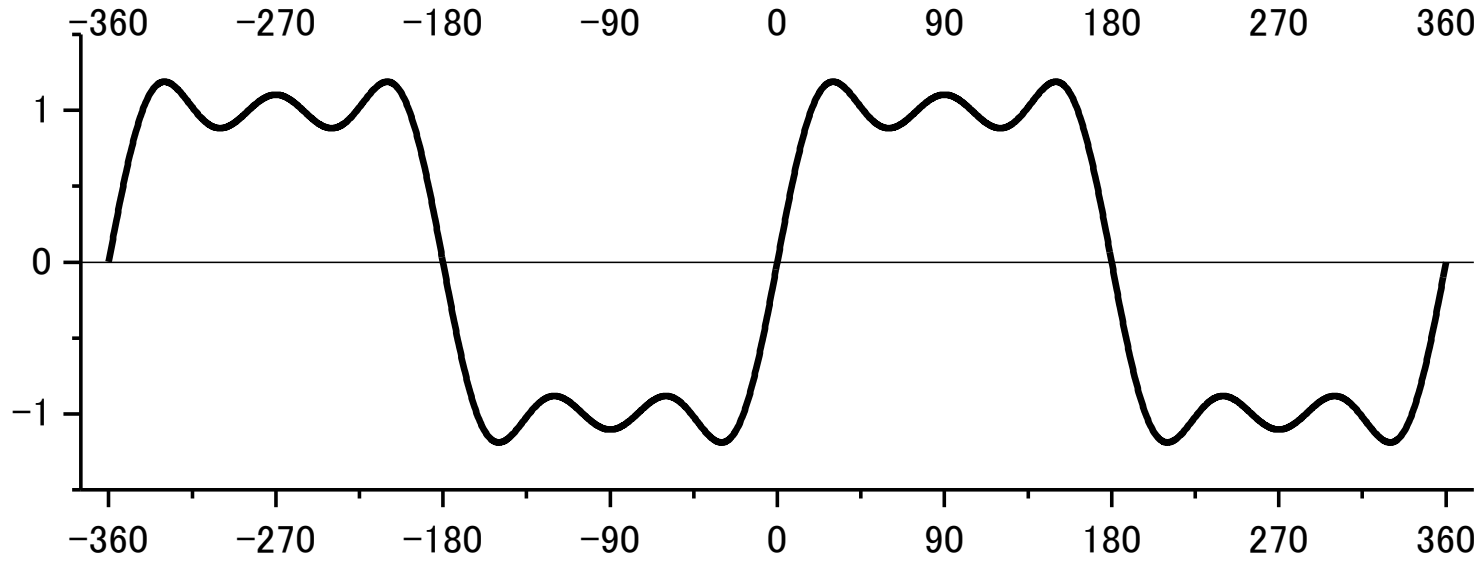
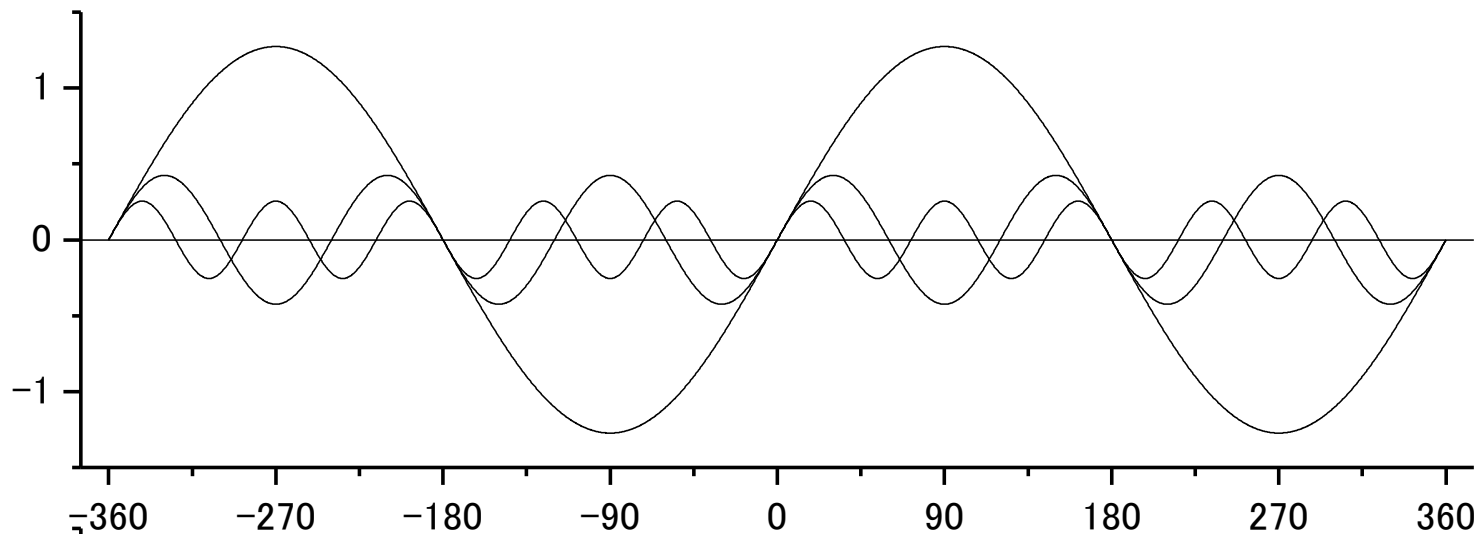
$$n_1 k \sin \theta_1 = n_2 k \sin \theta_2 + m k_d$$

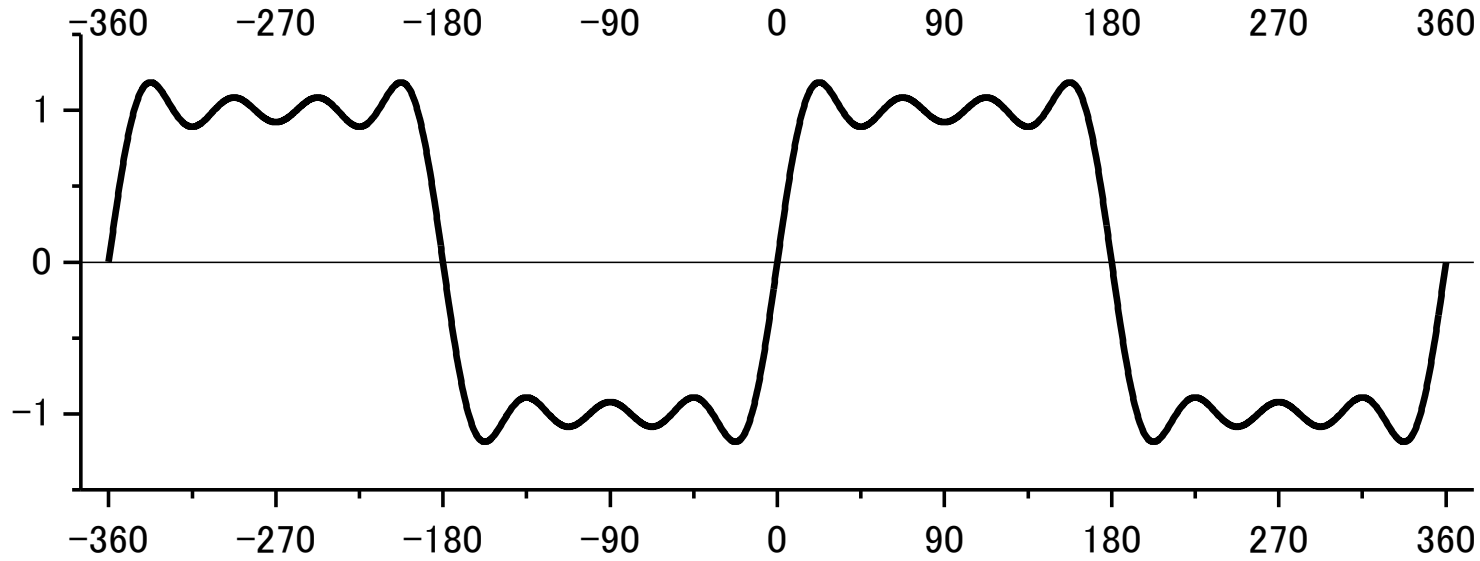
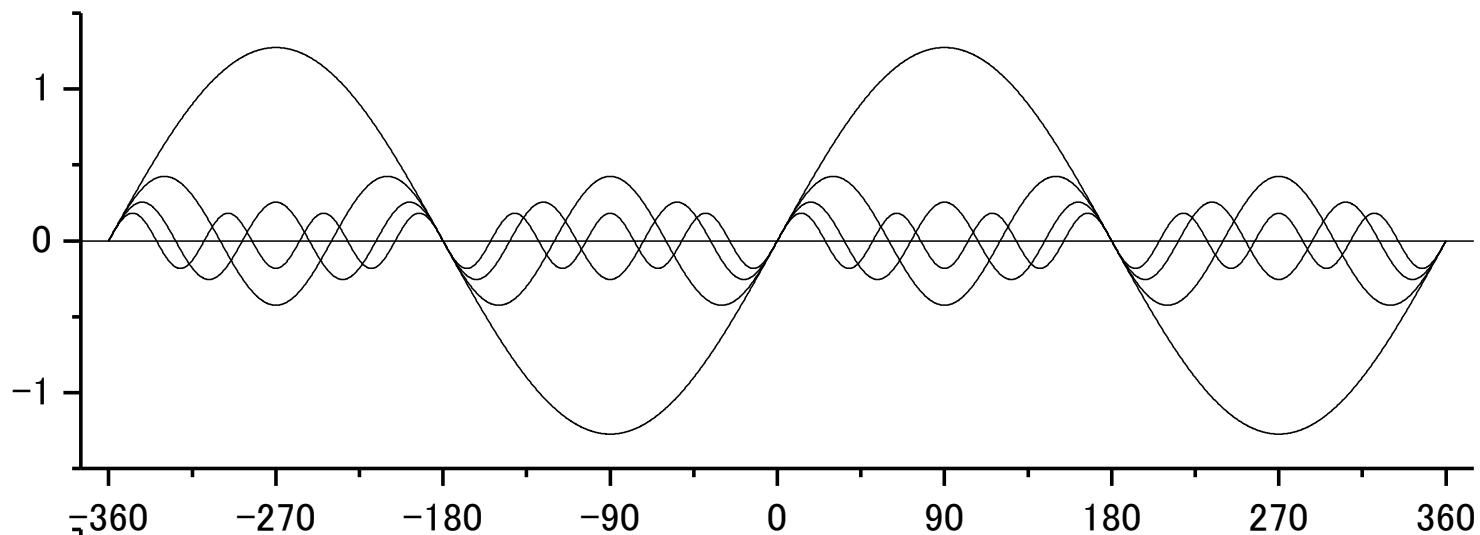
波数の単位を持つ  $m k_d$  とは何か？

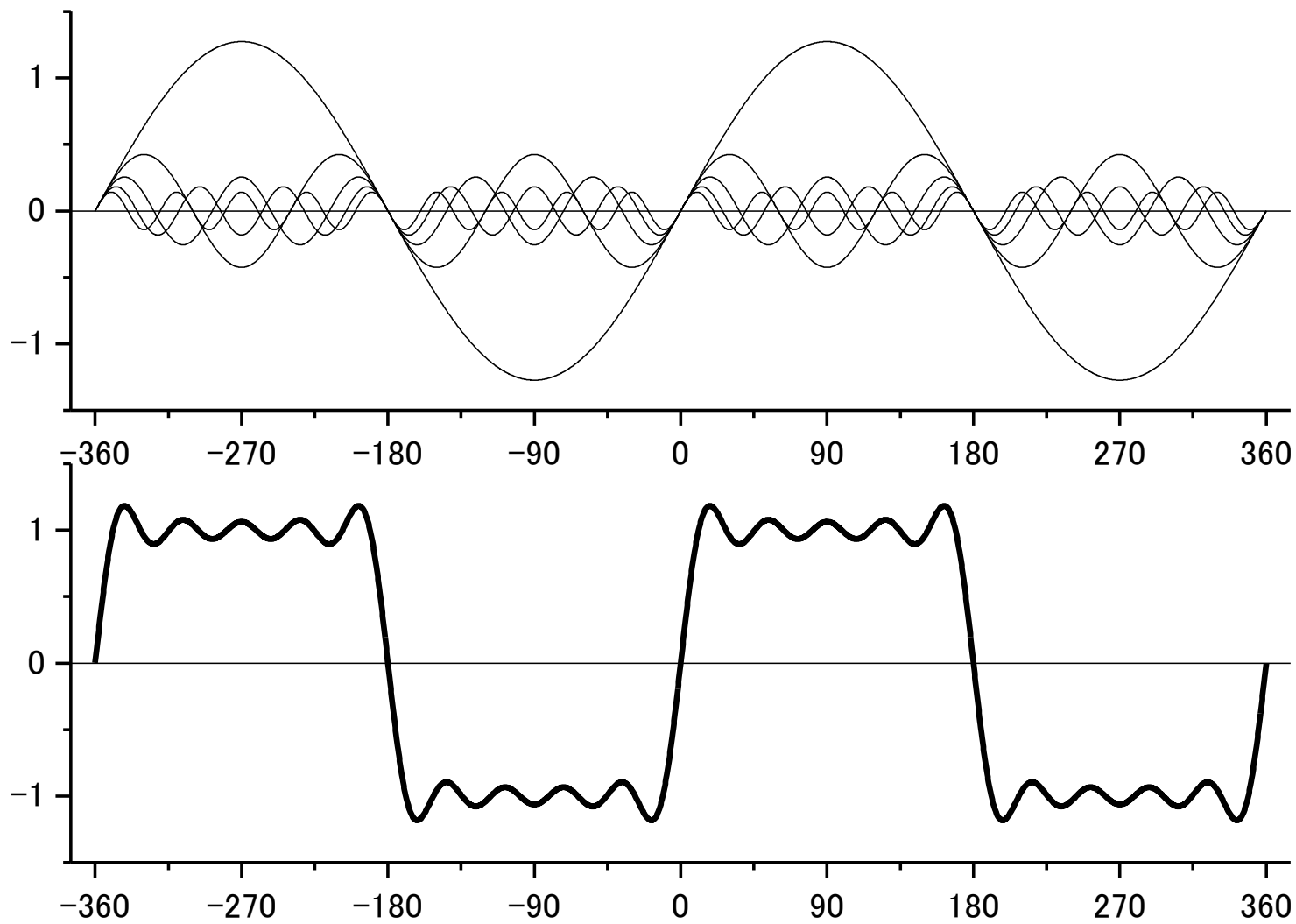


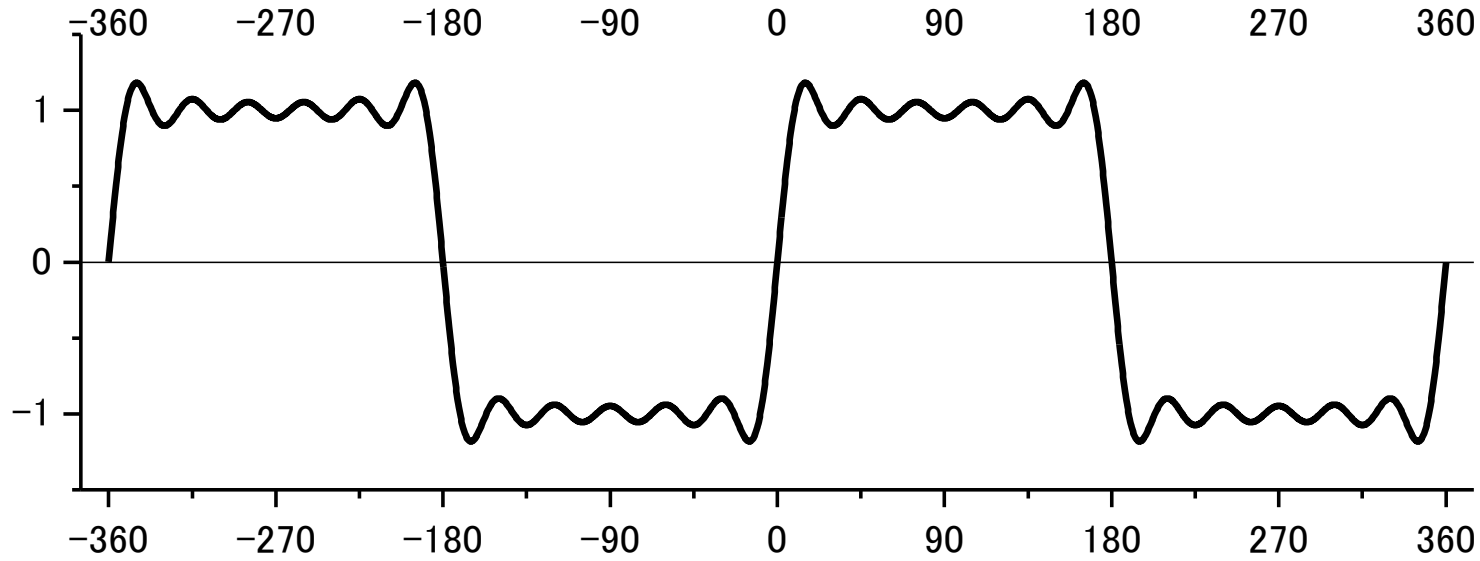
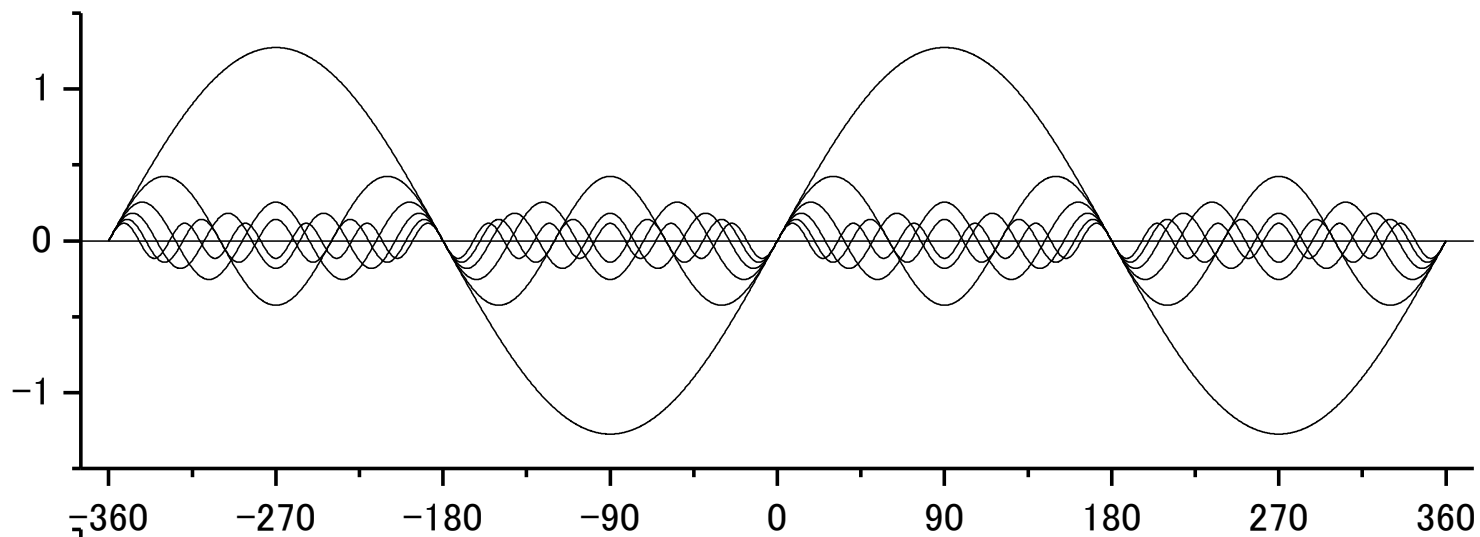


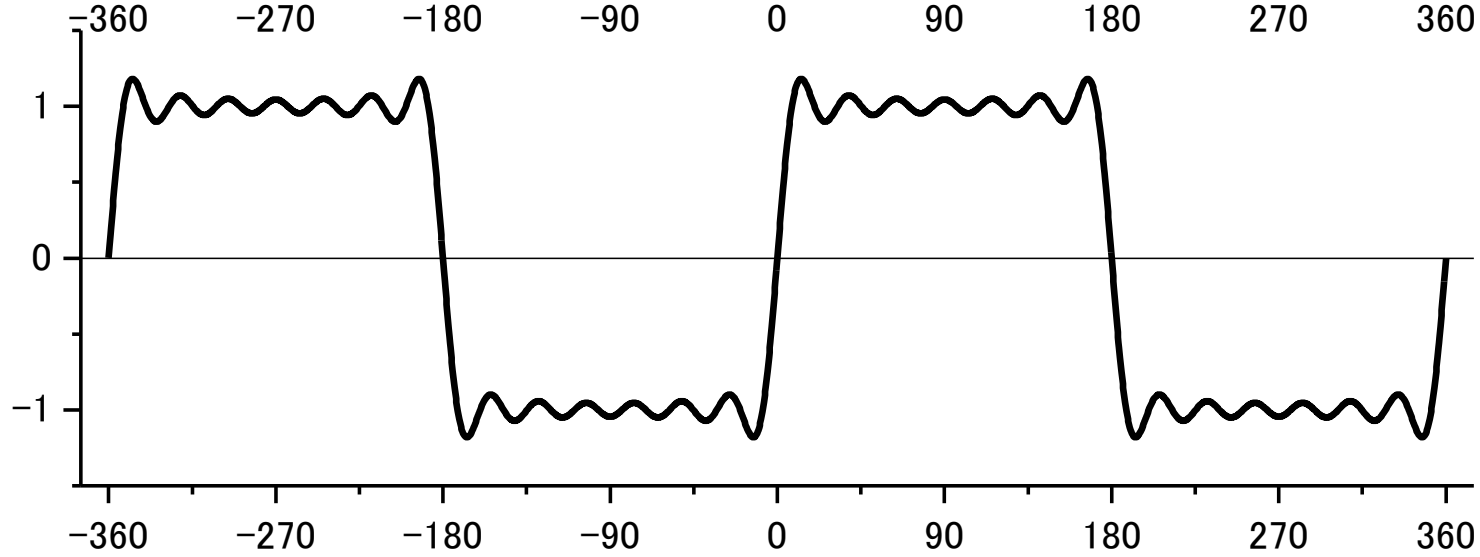
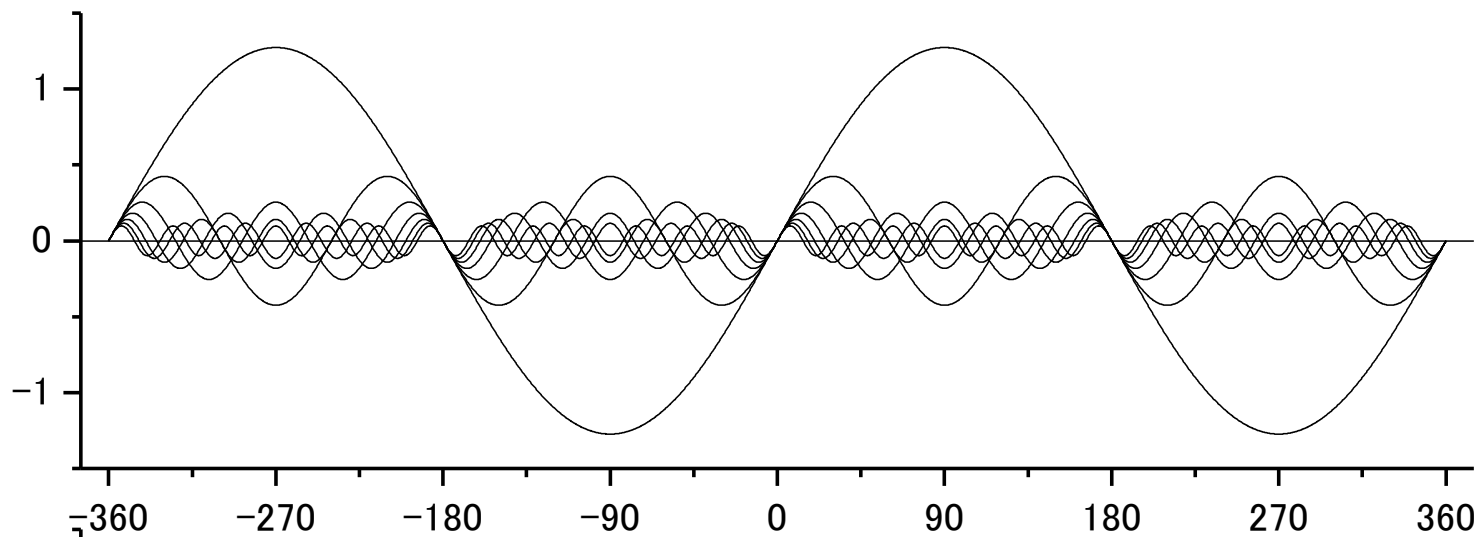


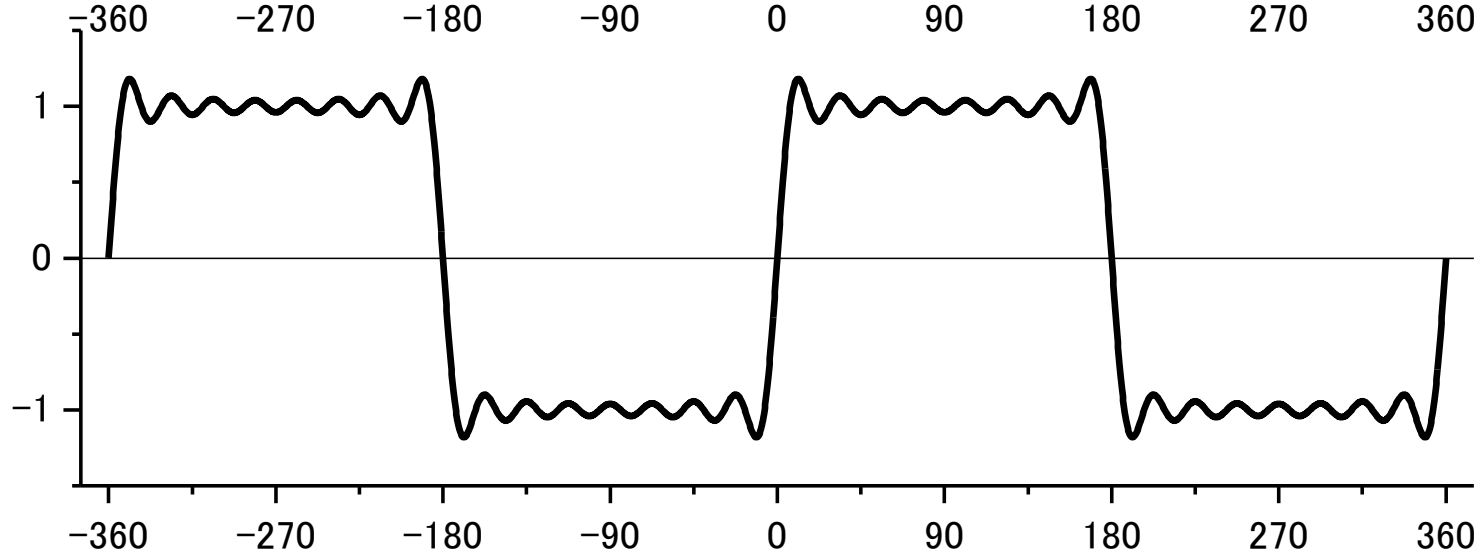
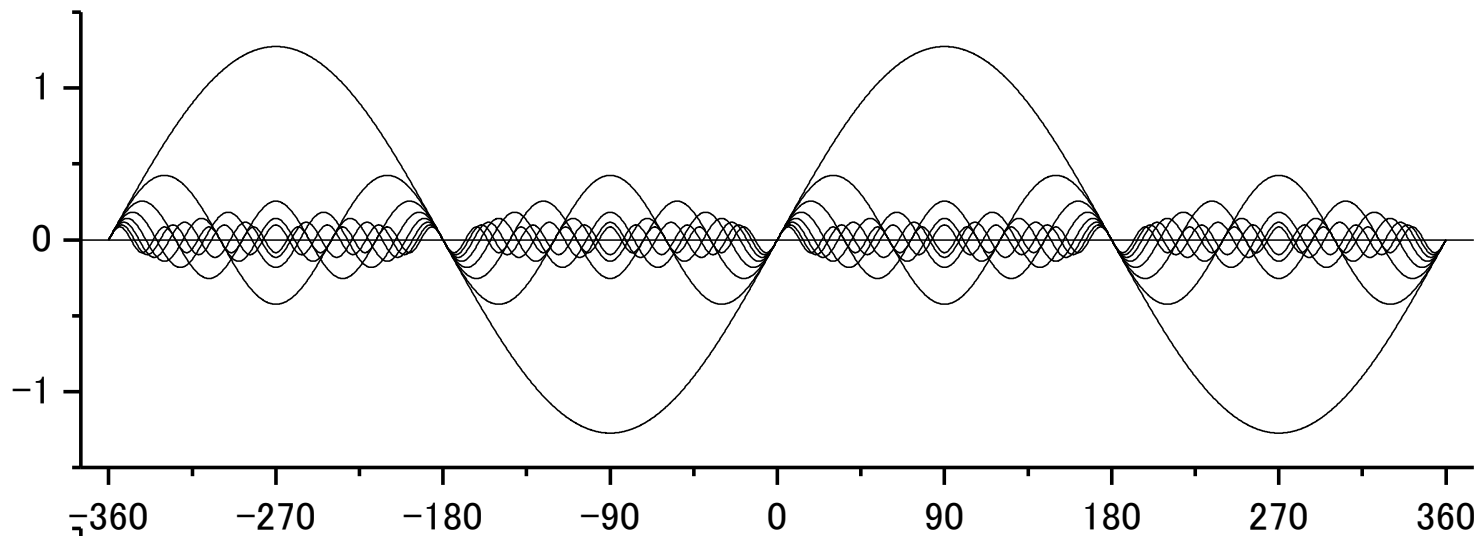




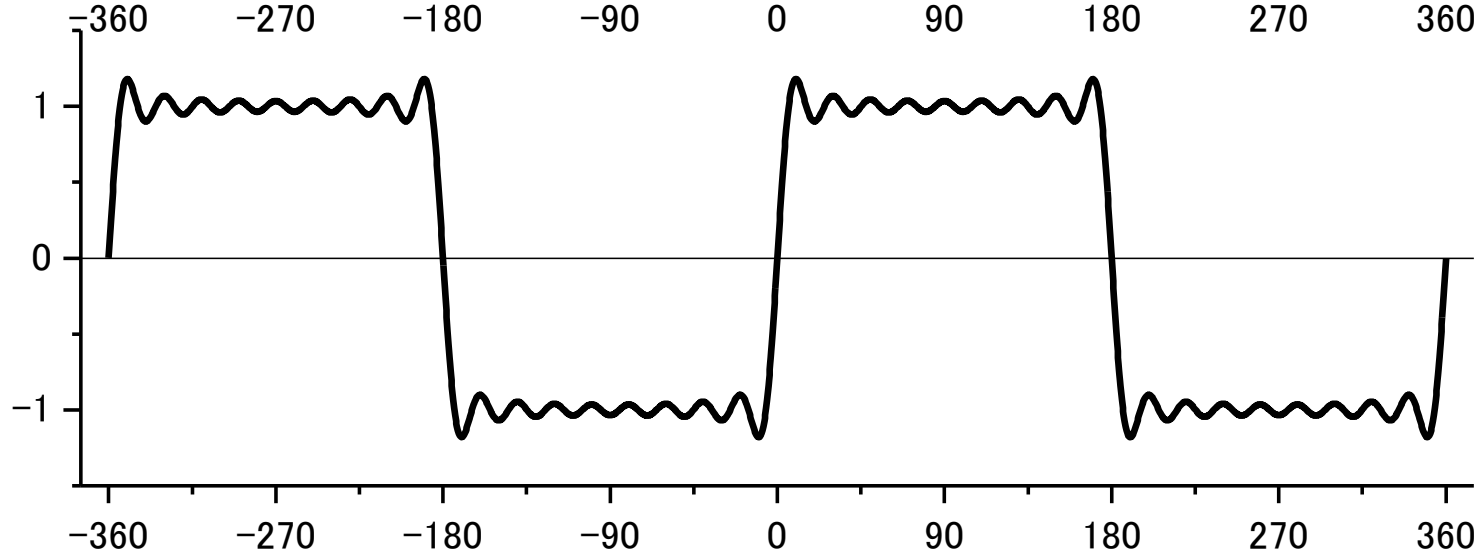
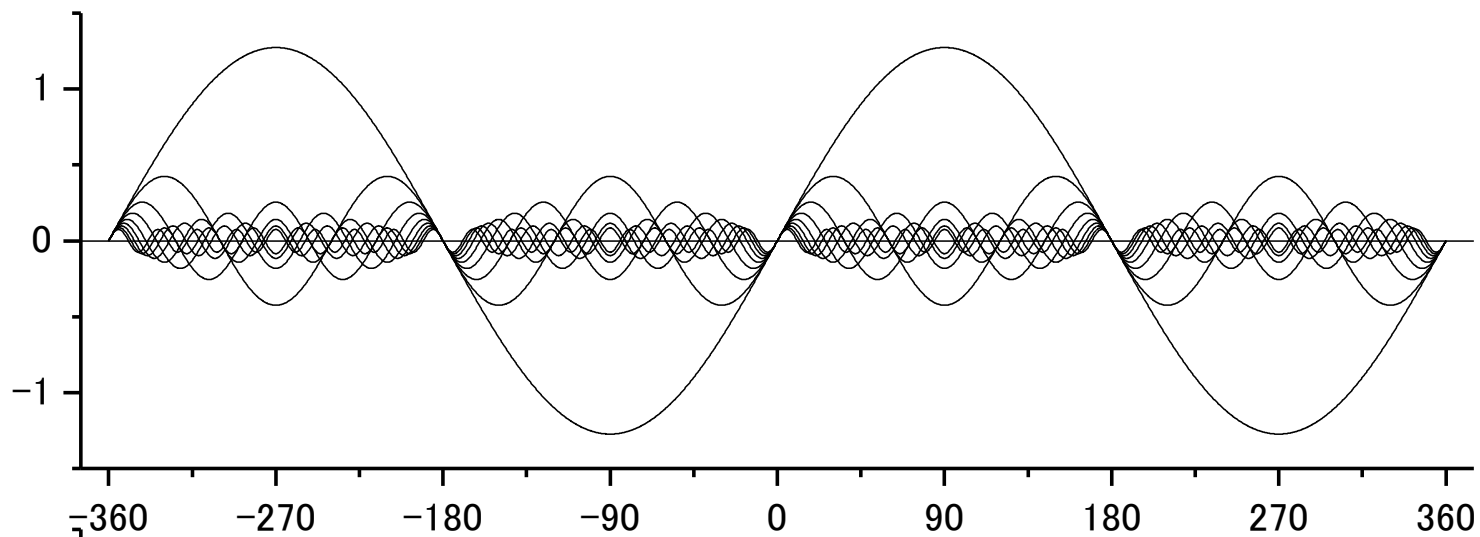


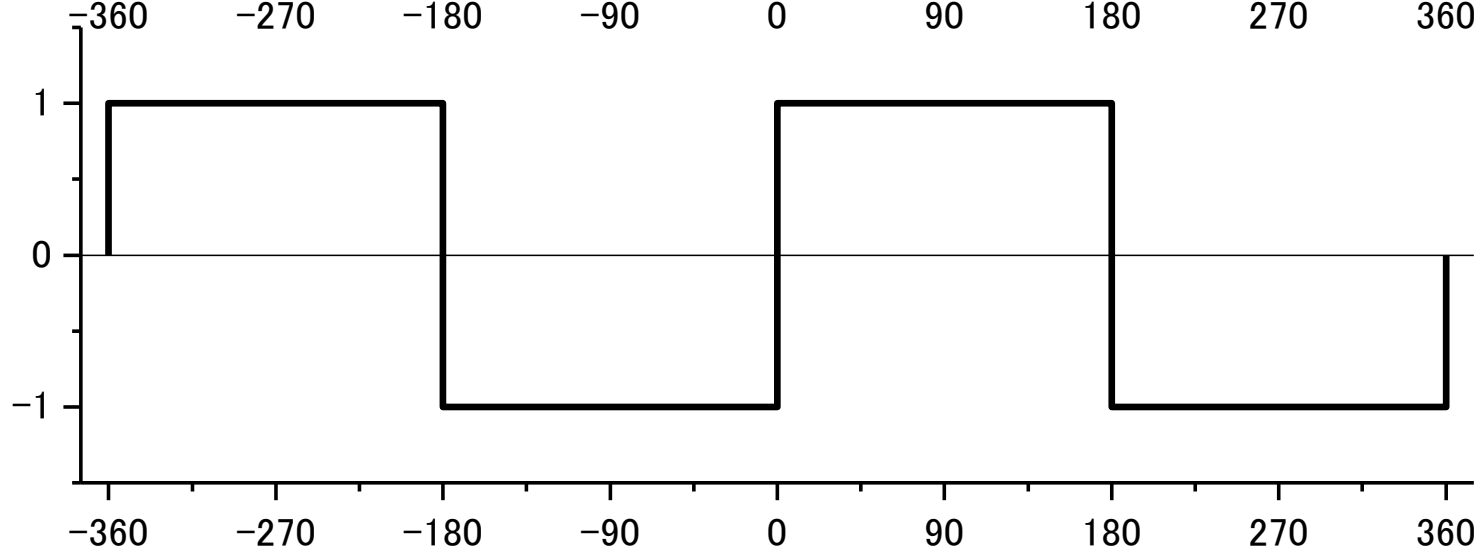
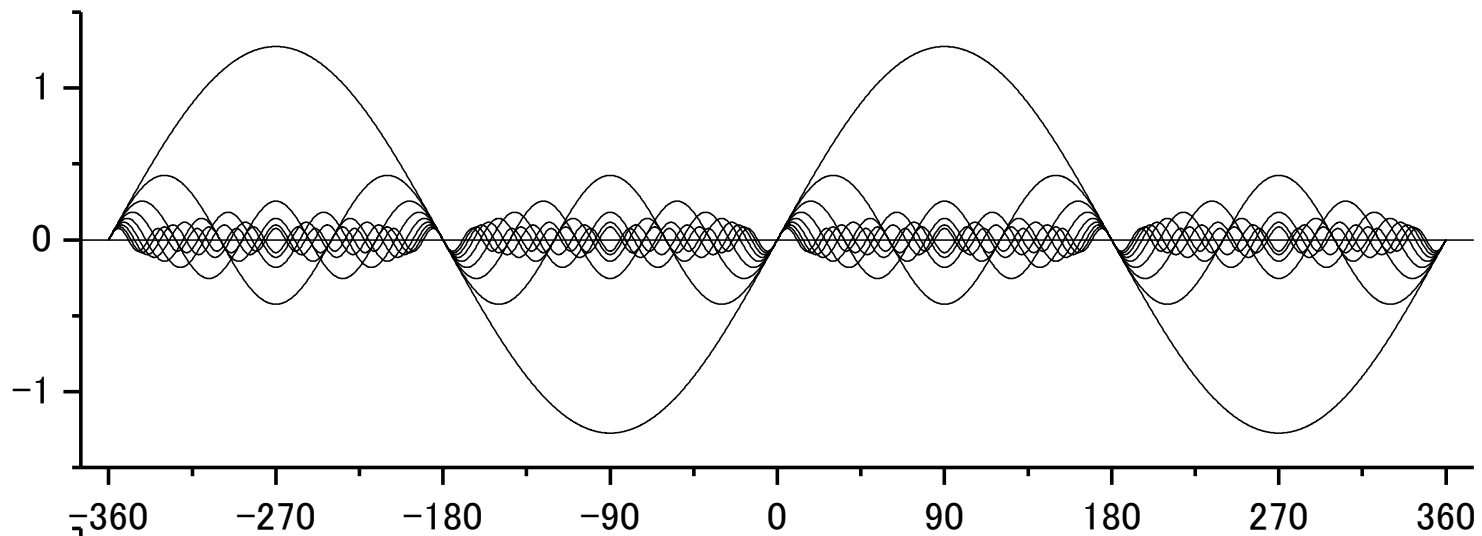




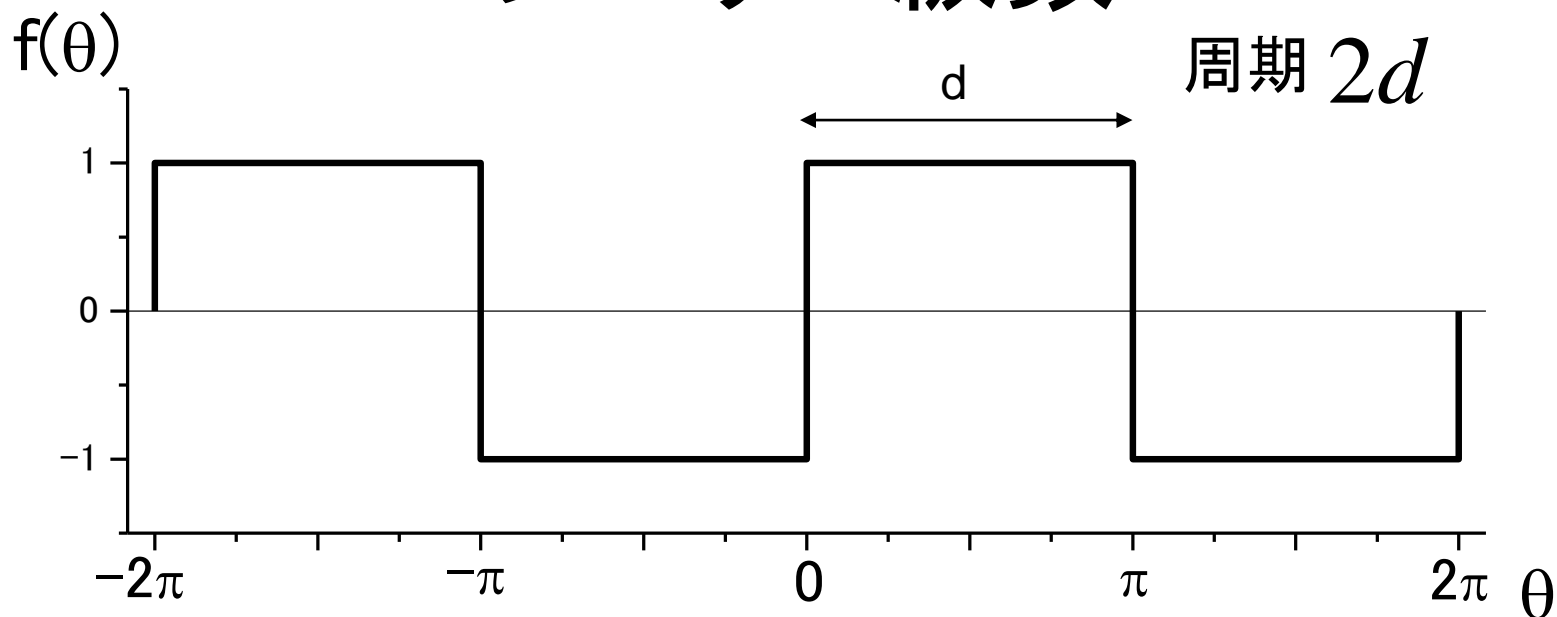








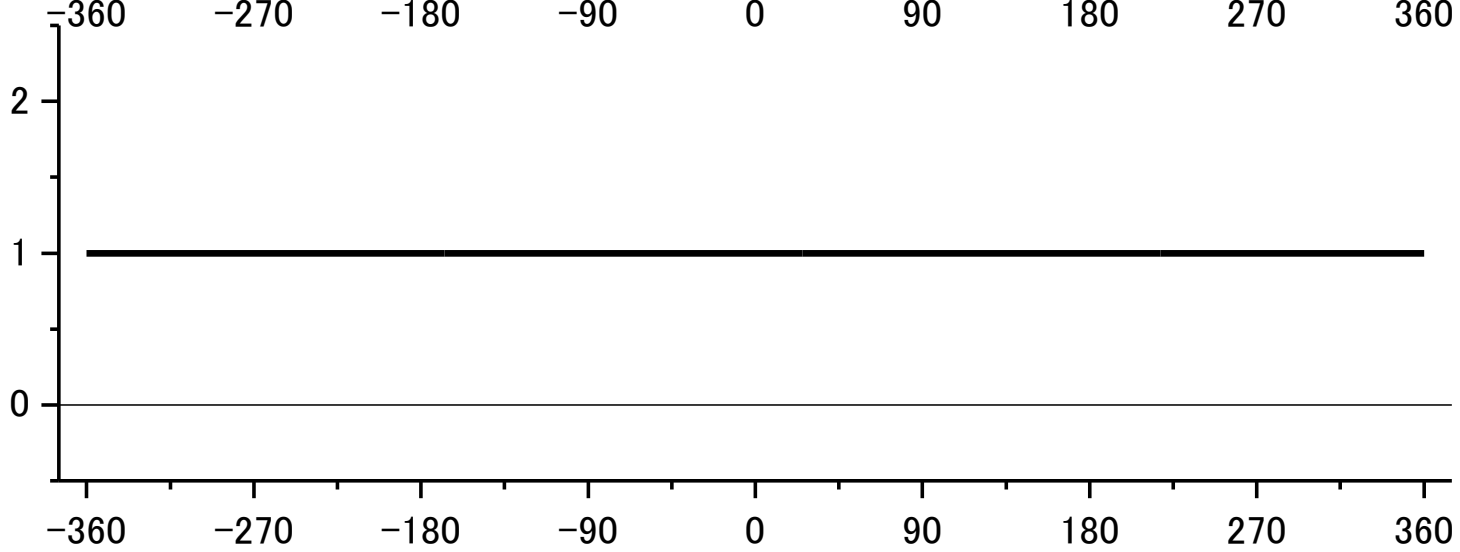
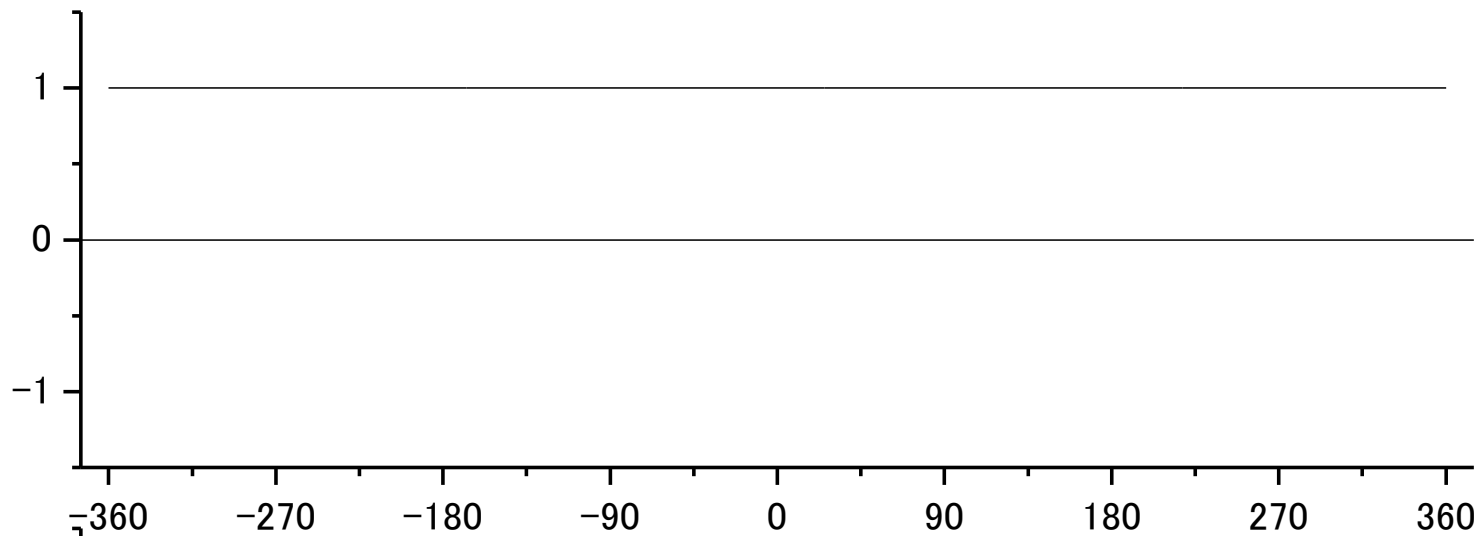
## フーリエ級数

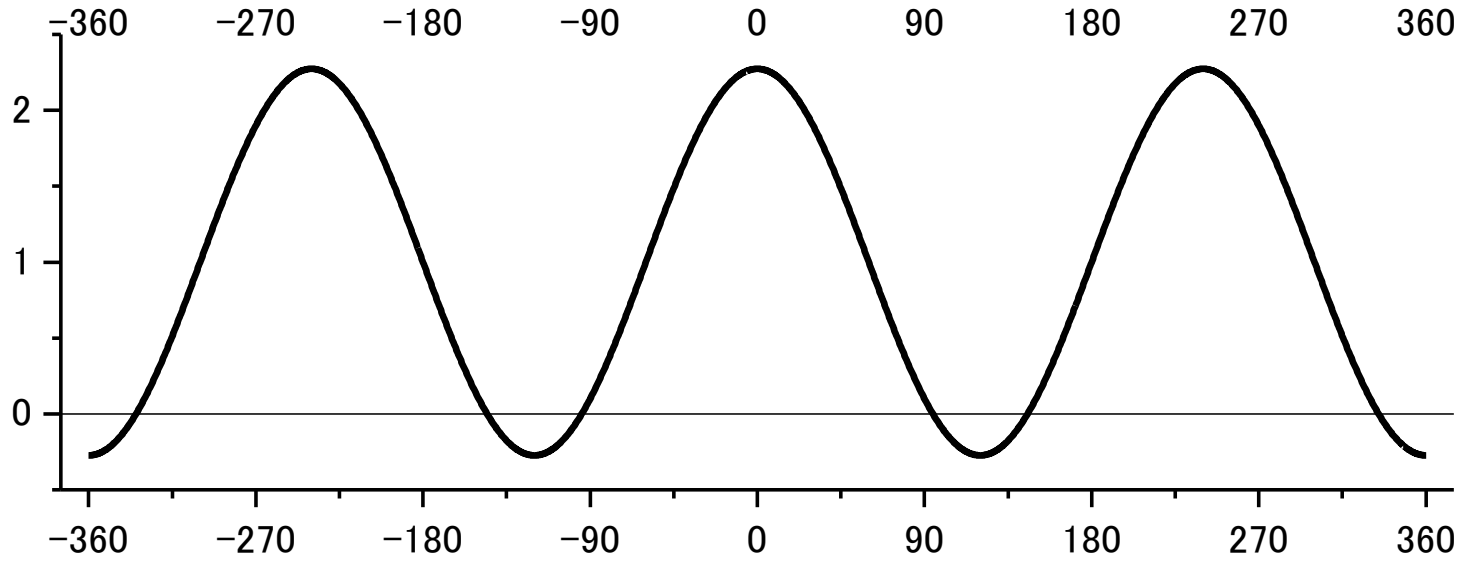
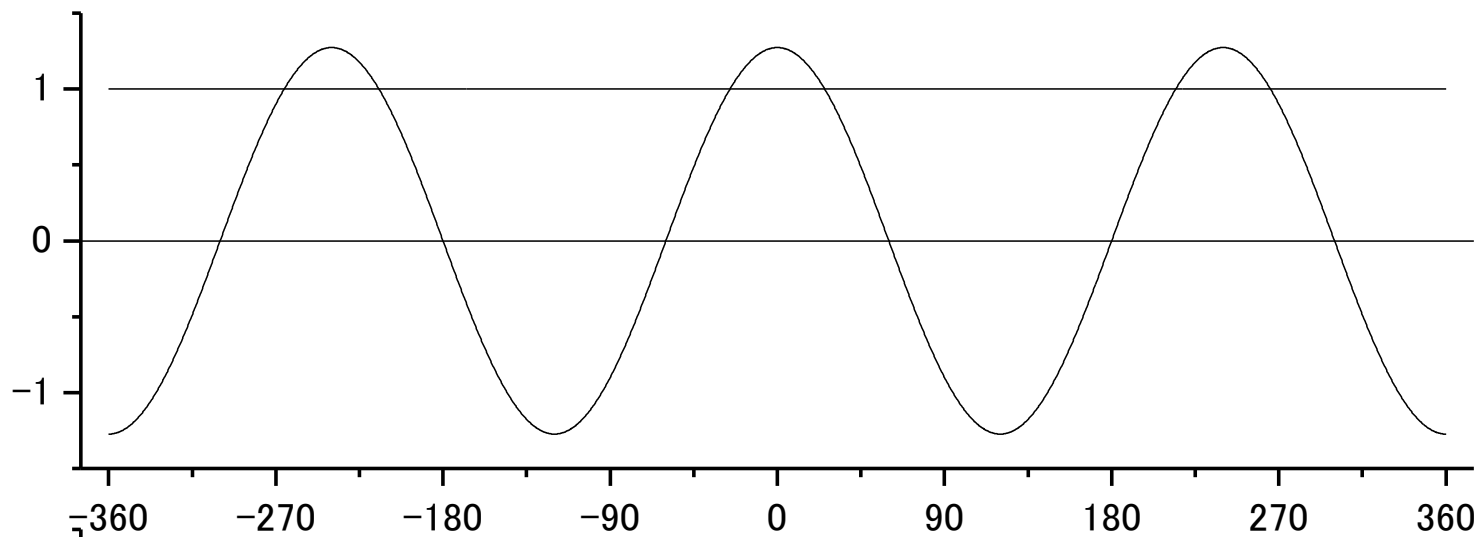


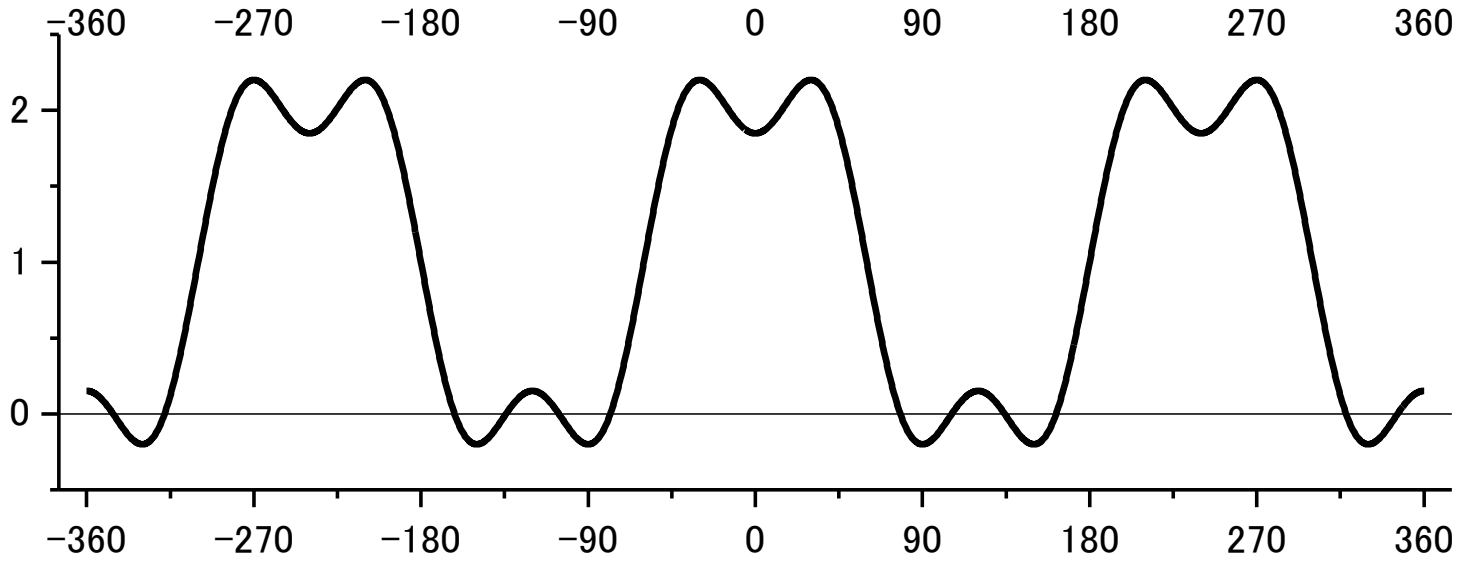
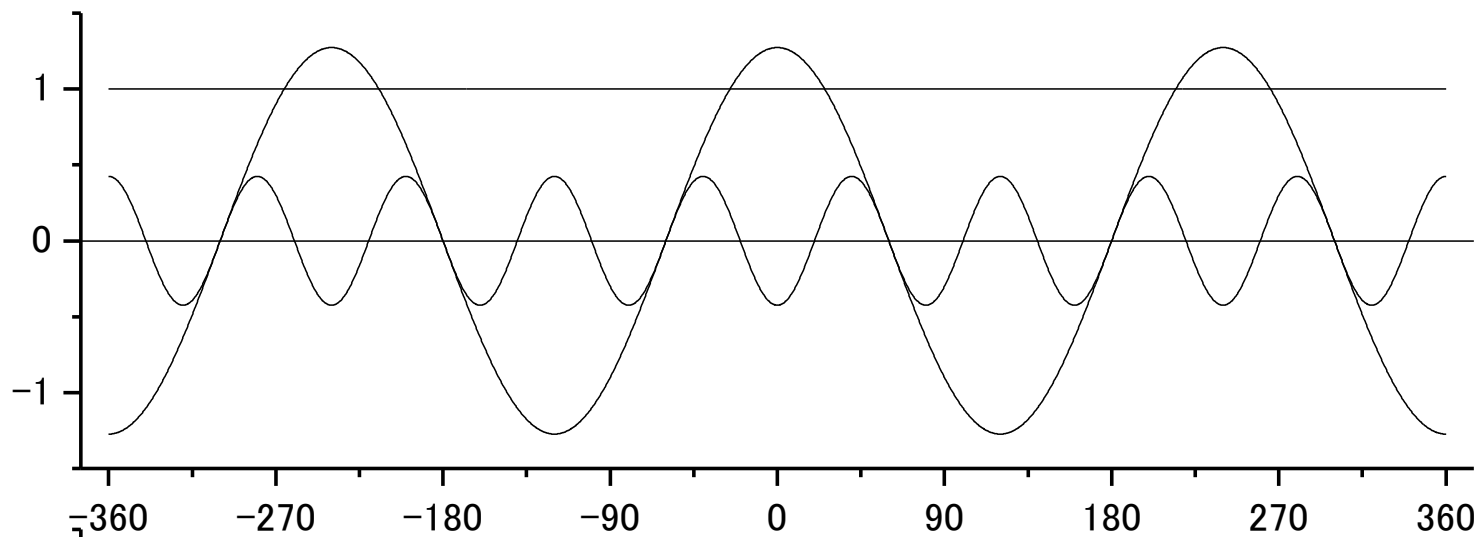
$$f(\theta) = \frac{4}{\pi} \left( \sin \theta + \frac{1}{3} \sin 3\theta + \frac{1}{5} \sin 5\theta + \frac{1}{7} \sin 7\theta + \dots \right)$$

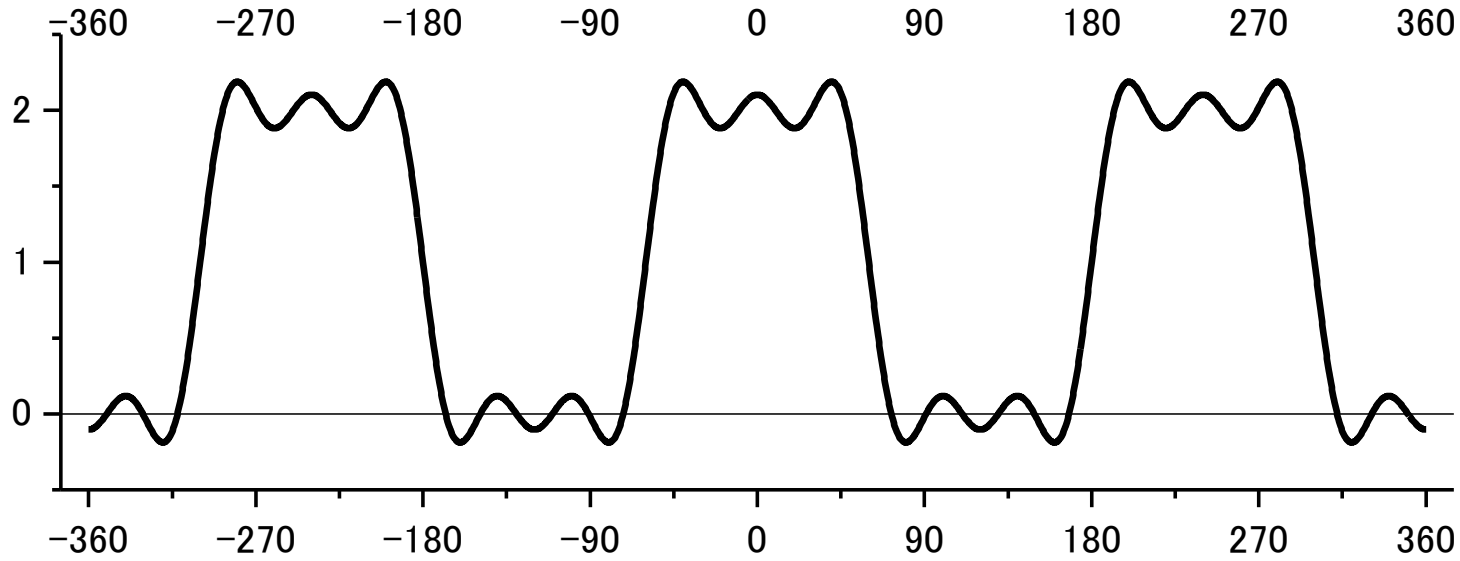
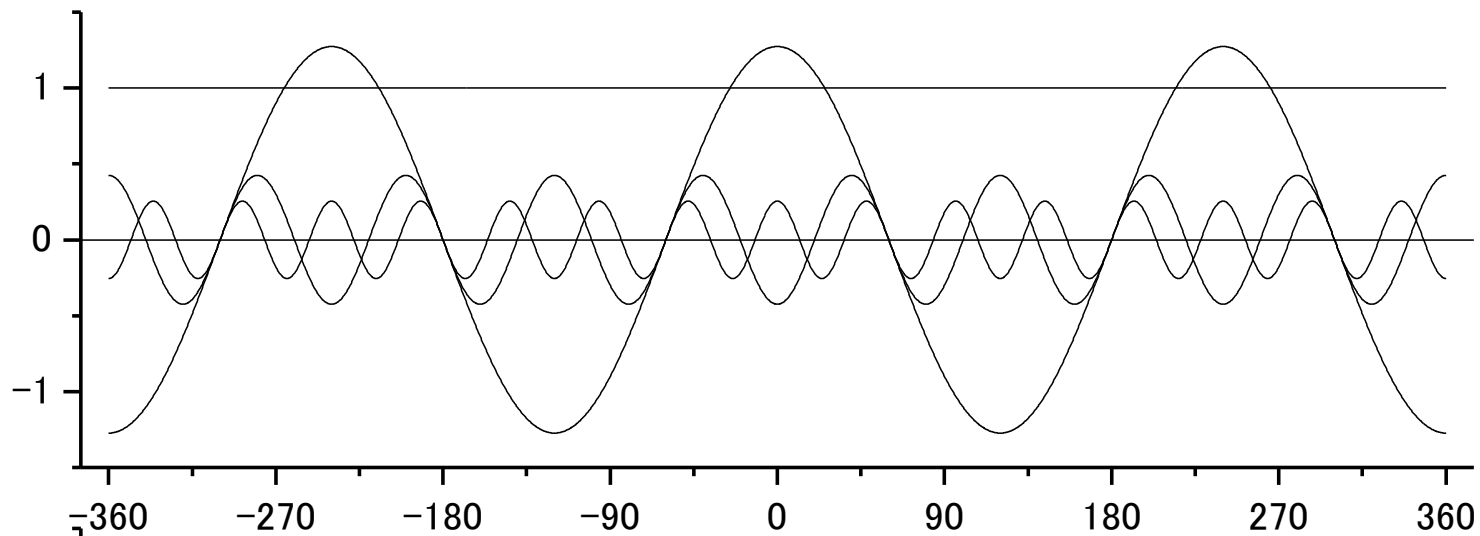
$$f\left(\theta = \frac{\pi}{d} x\right) = \frac{4}{\pi} \left( \sin \frac{\pi}{d} x + \frac{1}{3} \sin 3 \frac{\pi}{d} x + \frac{1}{5} \sin 5 \frac{\pi}{d} x + \frac{1}{7} \sin 7 \frac{\pi}{d} x + \dots \right)$$

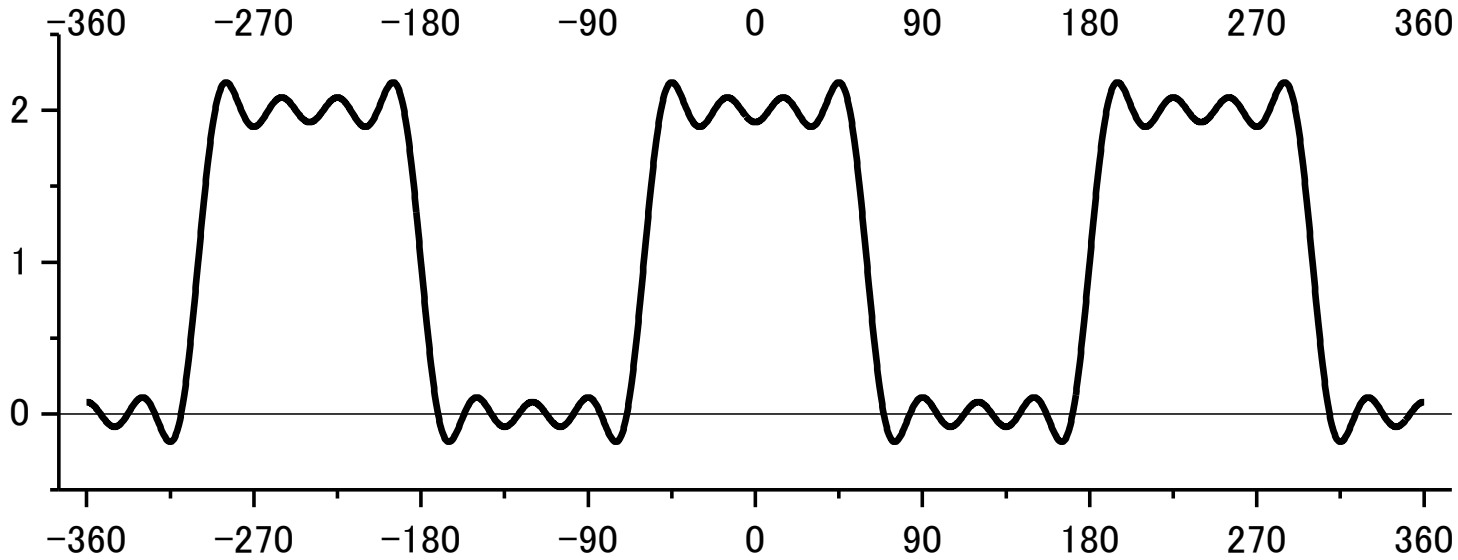
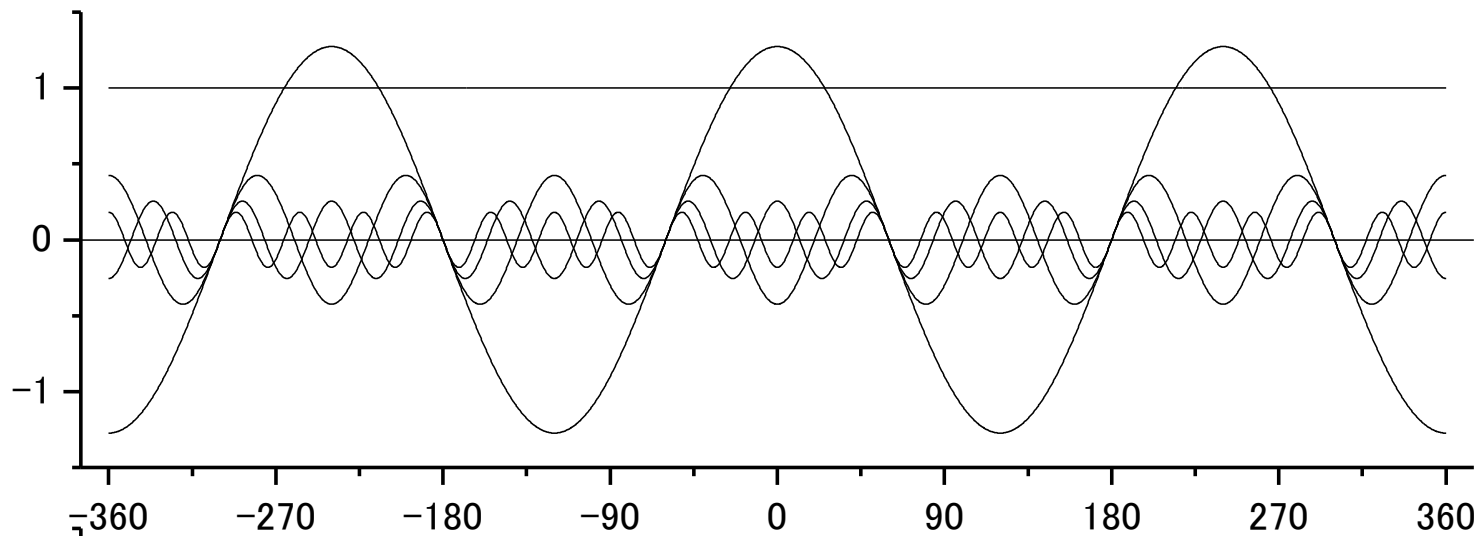
矩形関数は高い空間周波数成分  $k_n = n \frac{\pi}{d}$  を含む



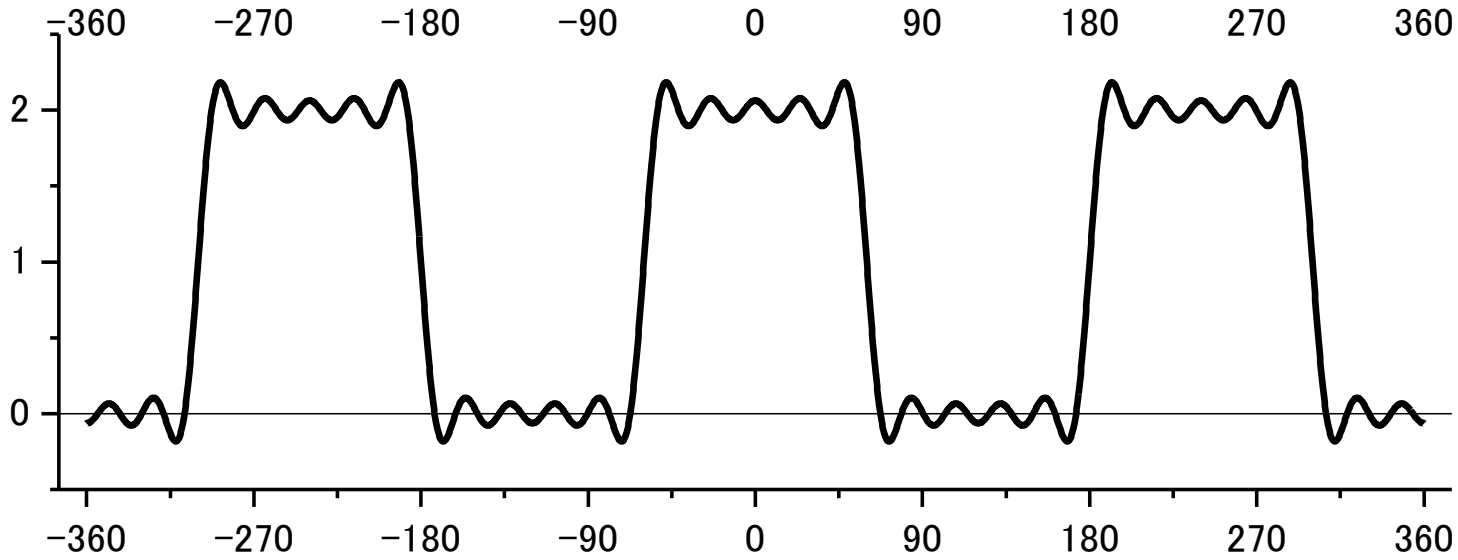
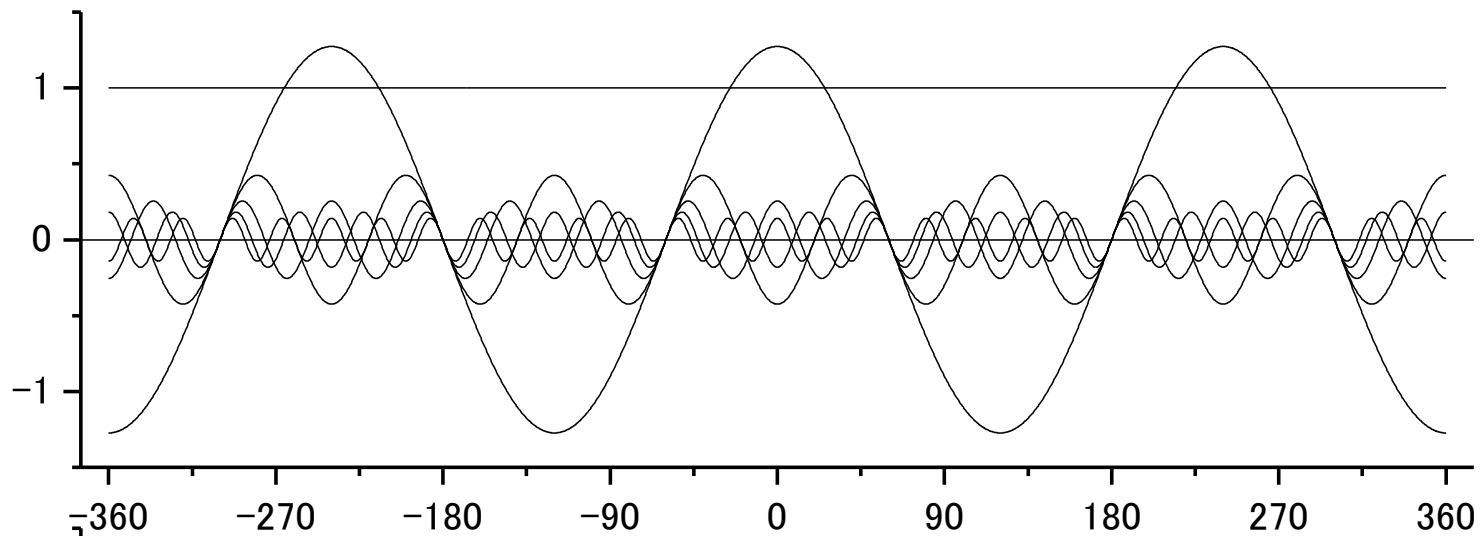


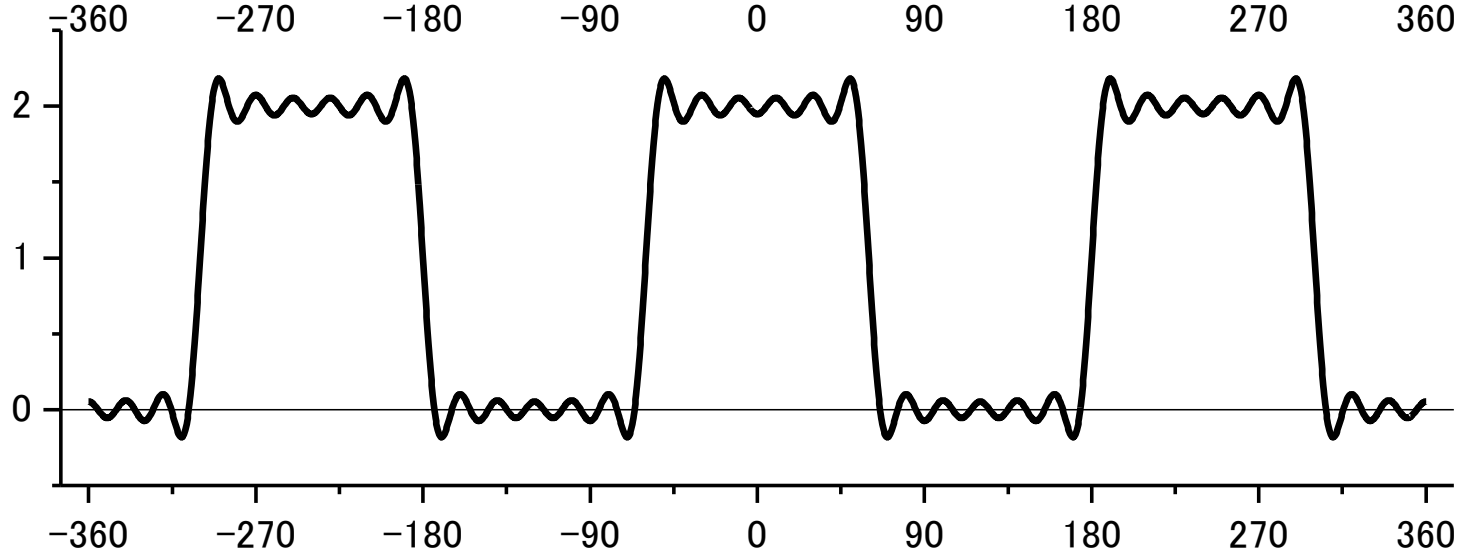
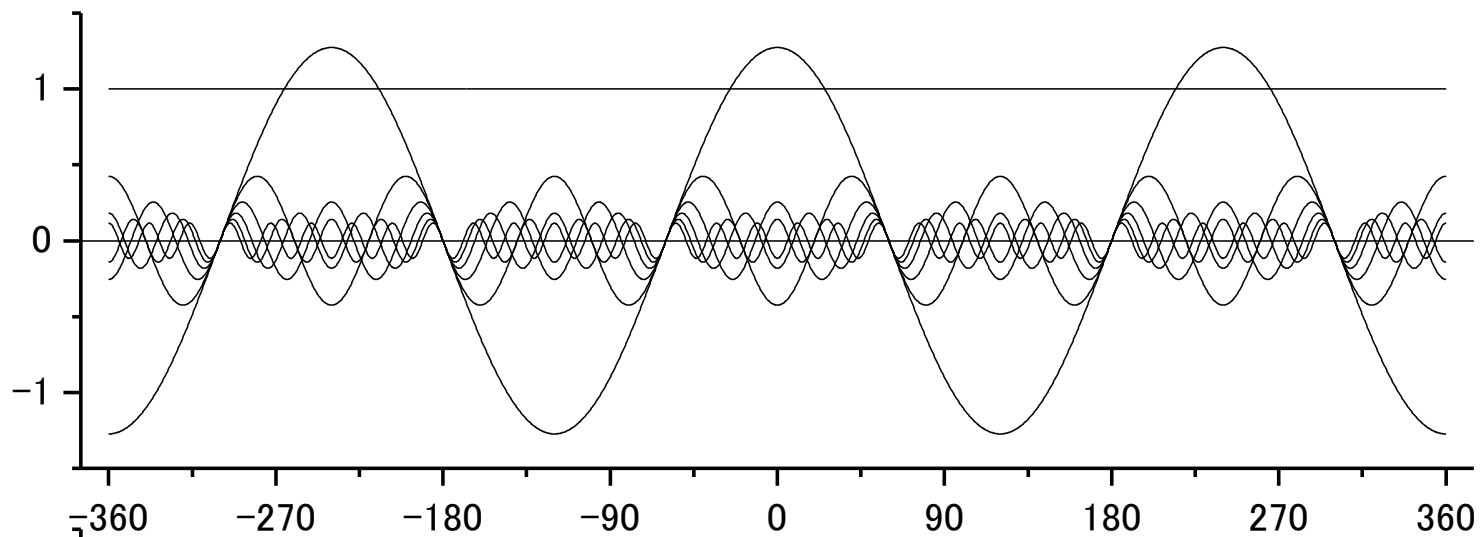


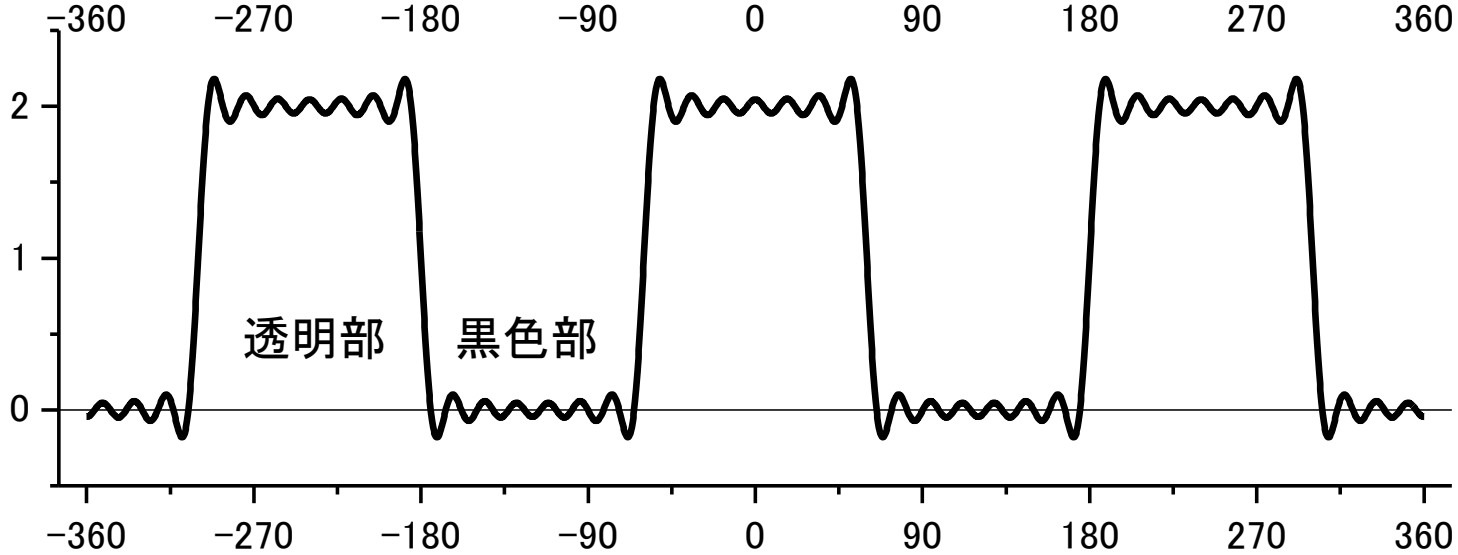
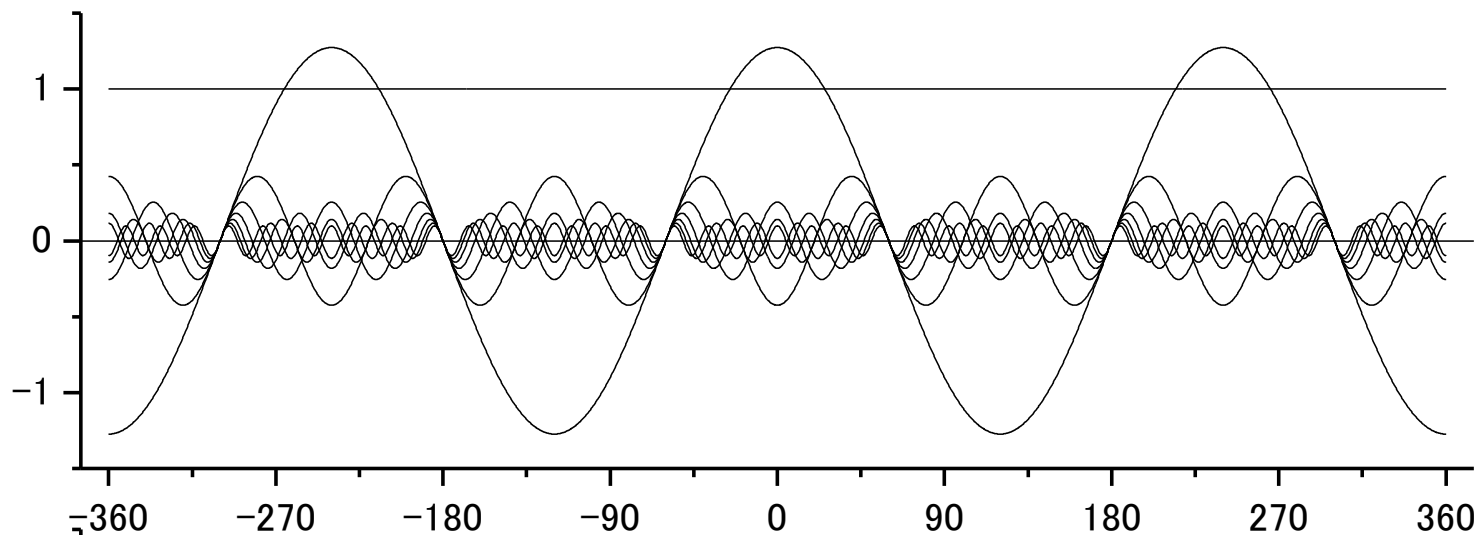












回折格子3のパターン

$$f(\theta) = 1 + \frac{4}{\pi} \left( \cos \theta - \frac{1}{3} \cos 3\theta + \frac{1}{5} \cos 5\theta - \frac{1}{7} \cos 7\theta + \dots \right)$$

$$\theta = \frac{\pi}{d} x$$

$$f(\theta) = e^{i0x} + \frac{2}{\pi} \left[ \left( e^{i\frac{\pi}{d}x} + e^{-i\frac{\pi}{d}x} \right) - \frac{1}{3} \left( e^{i\frac{3\pi}{d}x} + e^{-i\frac{3\pi}{d}x} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{5} \left( e^{i\frac{5\pi}{d}x} + e^{-i\frac{5\pi}{d}x} \right) - \frac{1}{7} \left( e^{i\frac{7\pi}{d}x} + e^{-i\frac{7\pi}{d}x} \right) + \dots \right]$$

周期  $2d$

$$k_{2d} = \frac{2\pi}{2d} = \frac{\pi}{d}$$

$$K = 0, \pm k_{2d}, \pm 3k_{2d}, \pm 5k_{2d}, \pm 7k_{2d}, \dots$$

# フーリエ級数

物理数学2

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{d} + b_n \sin \frac{n\pi x}{d} \right)$$

周期 $2d$

$$a_n = \frac{1}{d} \int_{-d}^d f(x) \cos \frac{n\pi x}{d} dx \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{d} \int_{-d}^d f(x) \sin \frac{n\pi x}{d} dx \quad n = 1, 2, \dots$$

# フーリエ変換

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx} dk$$

$$\begin{aligned} F(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos kx - i \sin kx) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos kx dx - i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin kx dx = A(k) - iB(k) \end{aligned}$$

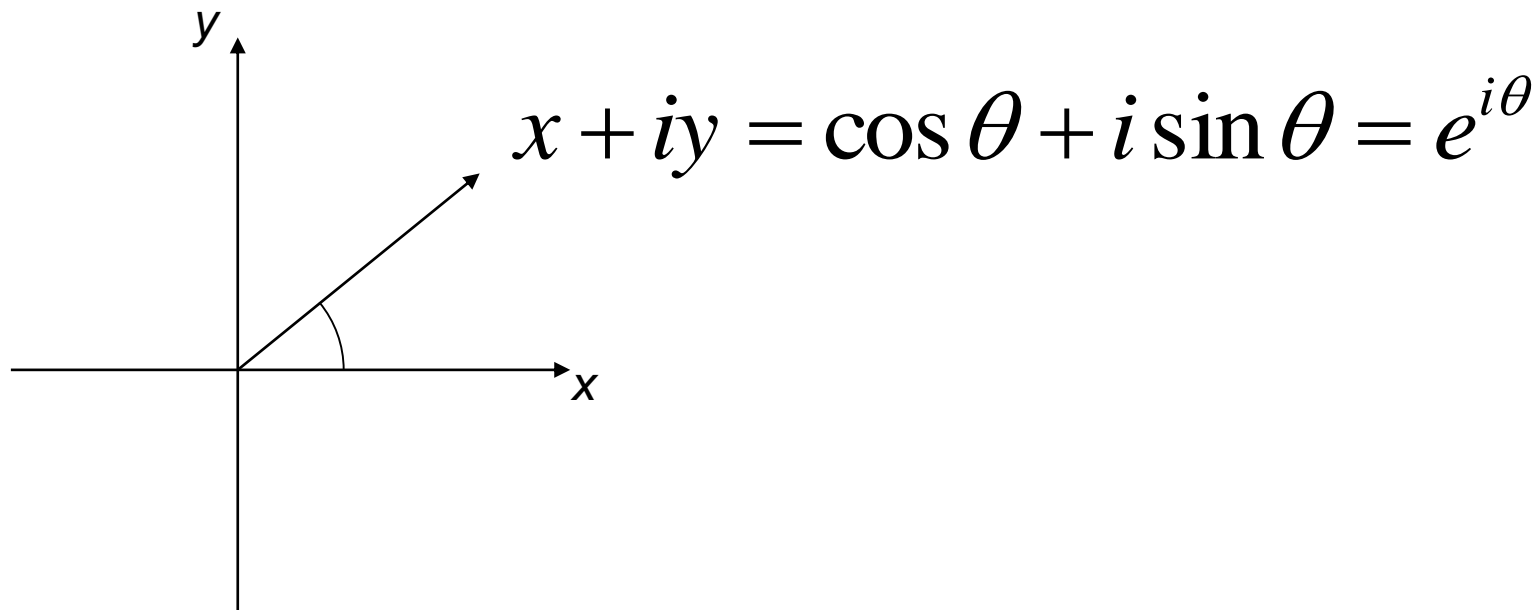
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A(k) - iB(k)](\cos kx + i \sin kx) dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A(k) \cos kx + B(k) \sin kx] dk \\ &\quad + i \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A(k) \sin kx - B(k) \cos kx] dk \end{aligned}$$

$f(x)$ が実関数ならば

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A(k) \cos kx + B(k) \sin kx] dk$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{d} + b_n \sin \frac{n\pi x}{d} \right) \quad \text{と比較せよ} \quad k_n = \frac{n\pi}{d}$$

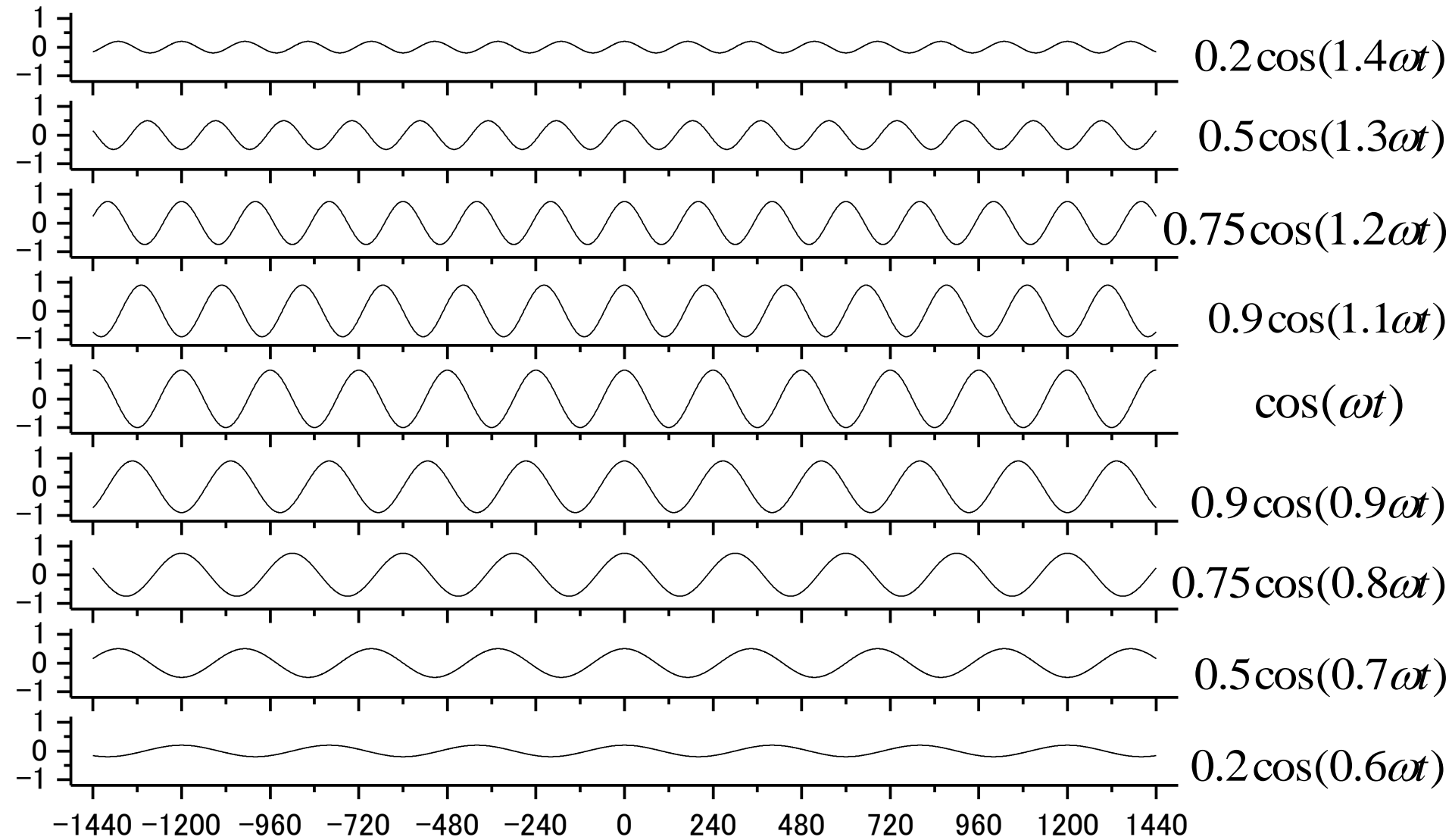
# $\cos \theta$ と $\sin \theta$ は直交(直交関数) 物理数学2



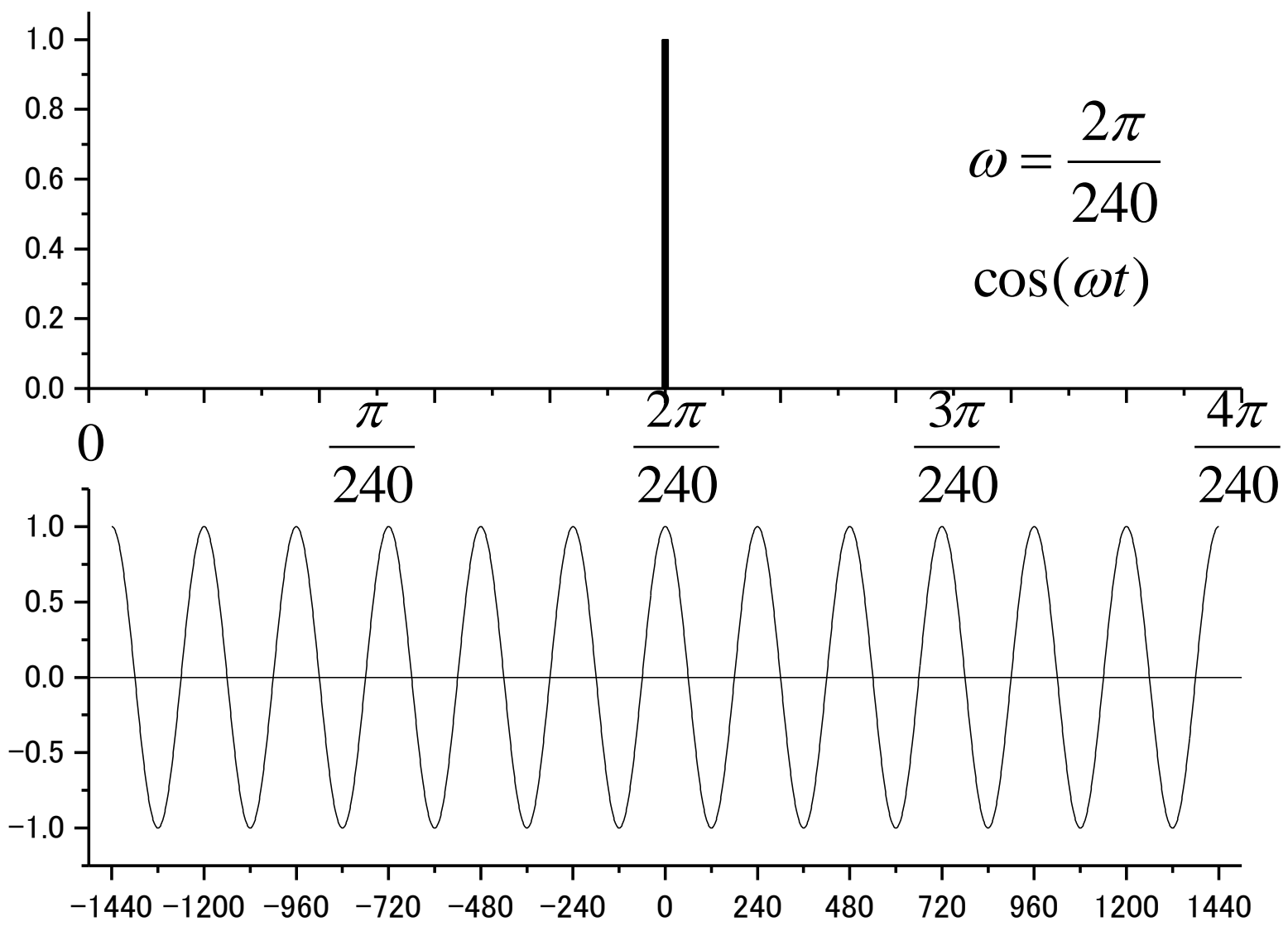
$$\begin{aligned} R \cos(kx + \phi) &= R(\cos kx \cos \phi - \sin kx \sin \phi) \\ &= R(a \cos kx + b \sin kx) \\ &= A \cos kx + B \sin kx \end{aligned}$$

$\cos kx$ に $\sin kx$ を加えることは、任意の位相シフト $\phi$ を加えることに相当  
こうすることで、フーリエ展開で $\cos kx$ だけでは表せない関数も表せる

# フーリエ級数でパルス波を作る





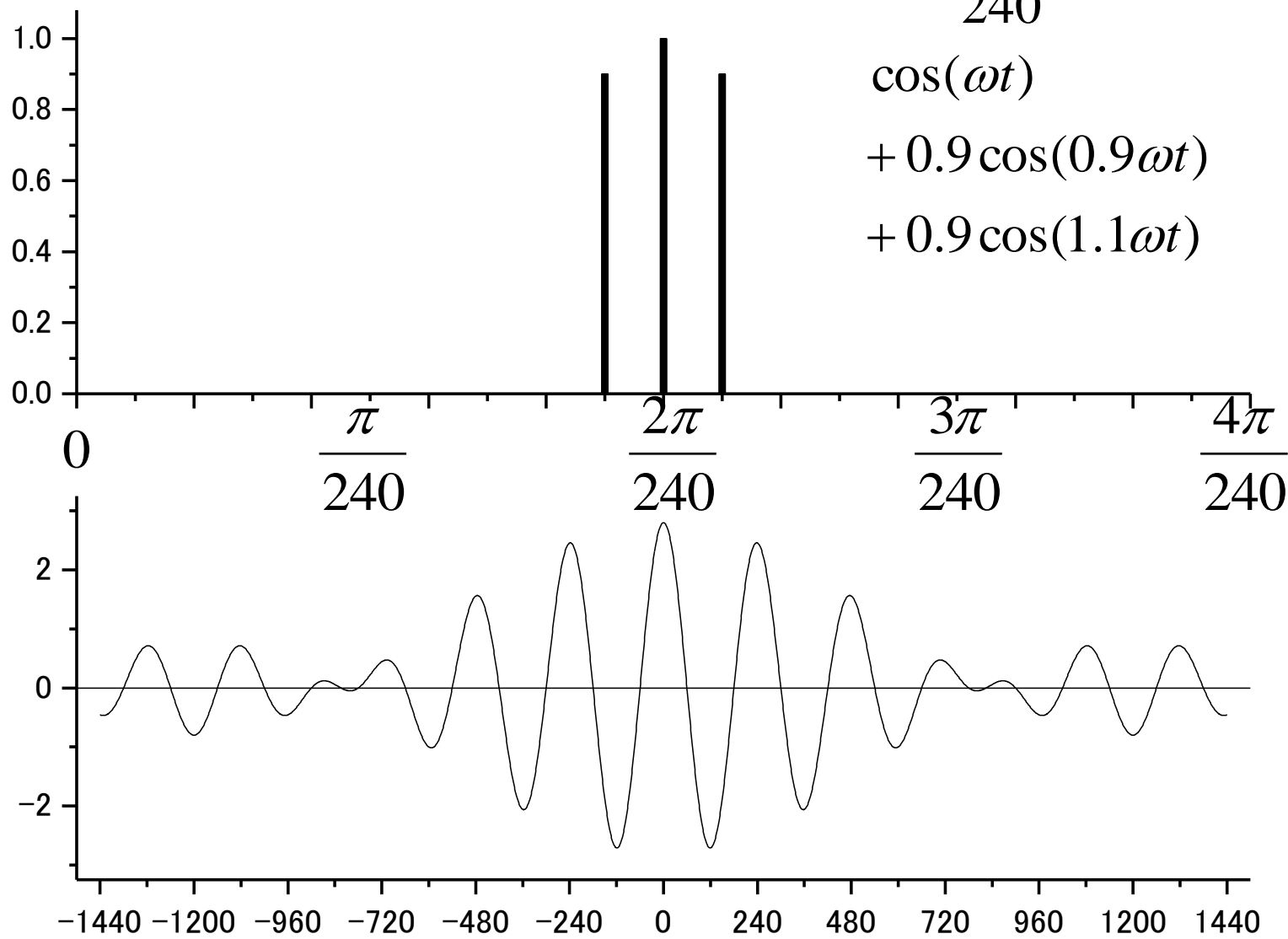


$$\omega = \frac{2\pi}{240}$$

$$\cos(\omega t)$$

$$+ 0.9 \cos(0.9\omega t)$$

$$+ 0.9 \cos(1.1\omega t)$$



$$\omega = \frac{2\pi}{240}$$

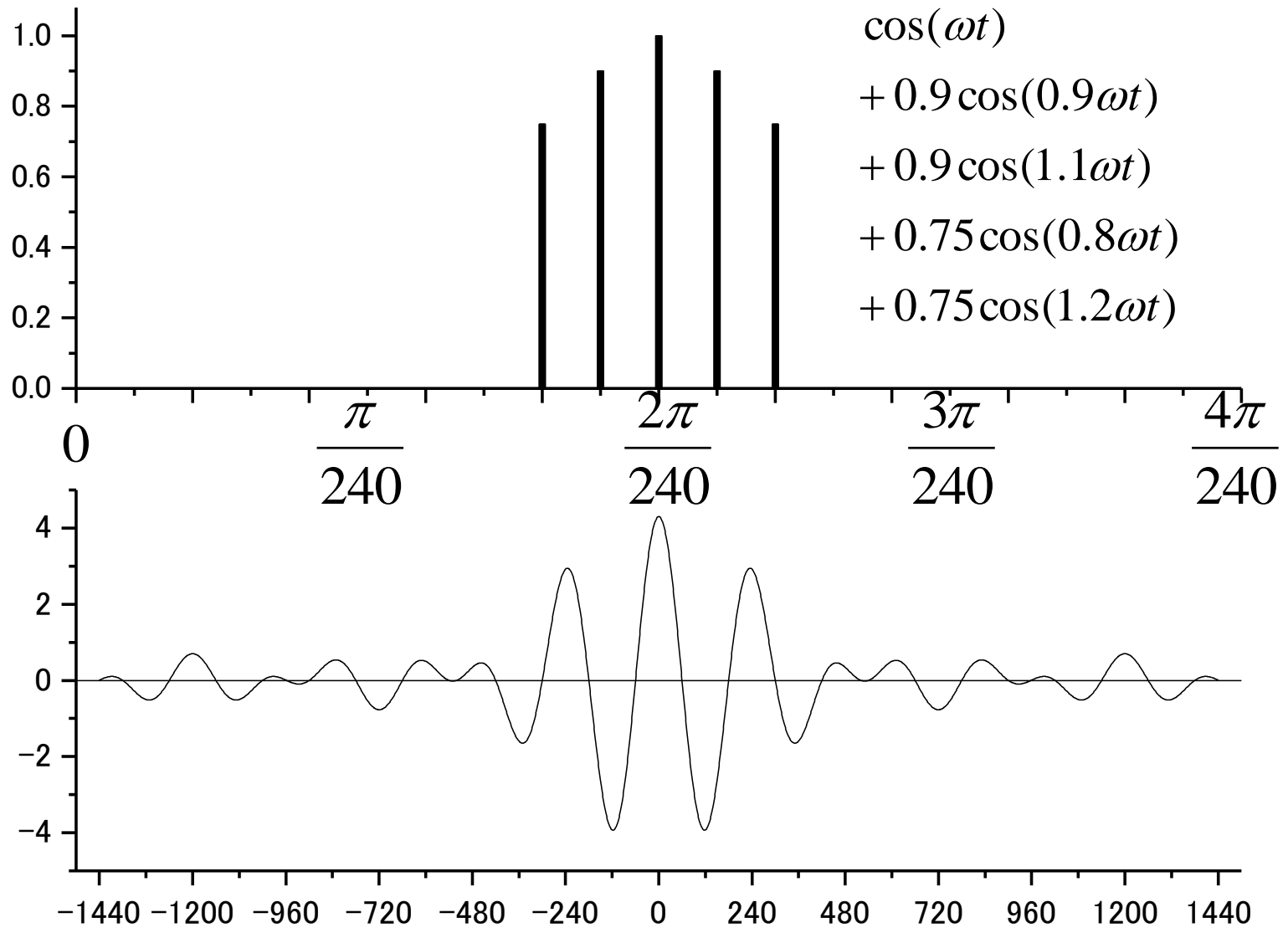
$$\cos(\omega t)$$

$$+ 0.9 \cos(0.9\omega t)$$

$$+ 0.9 \cos(1.1\omega t)$$

$$+ 0.75 \cos(0.8\omega t)$$

$$+ 0.75 \cos(1.2\omega t)$$



$$\omega = \frac{2\pi}{240}$$

$$\cos(\omega t)$$

$$+ 0.9 \cos(0.9\omega t)$$

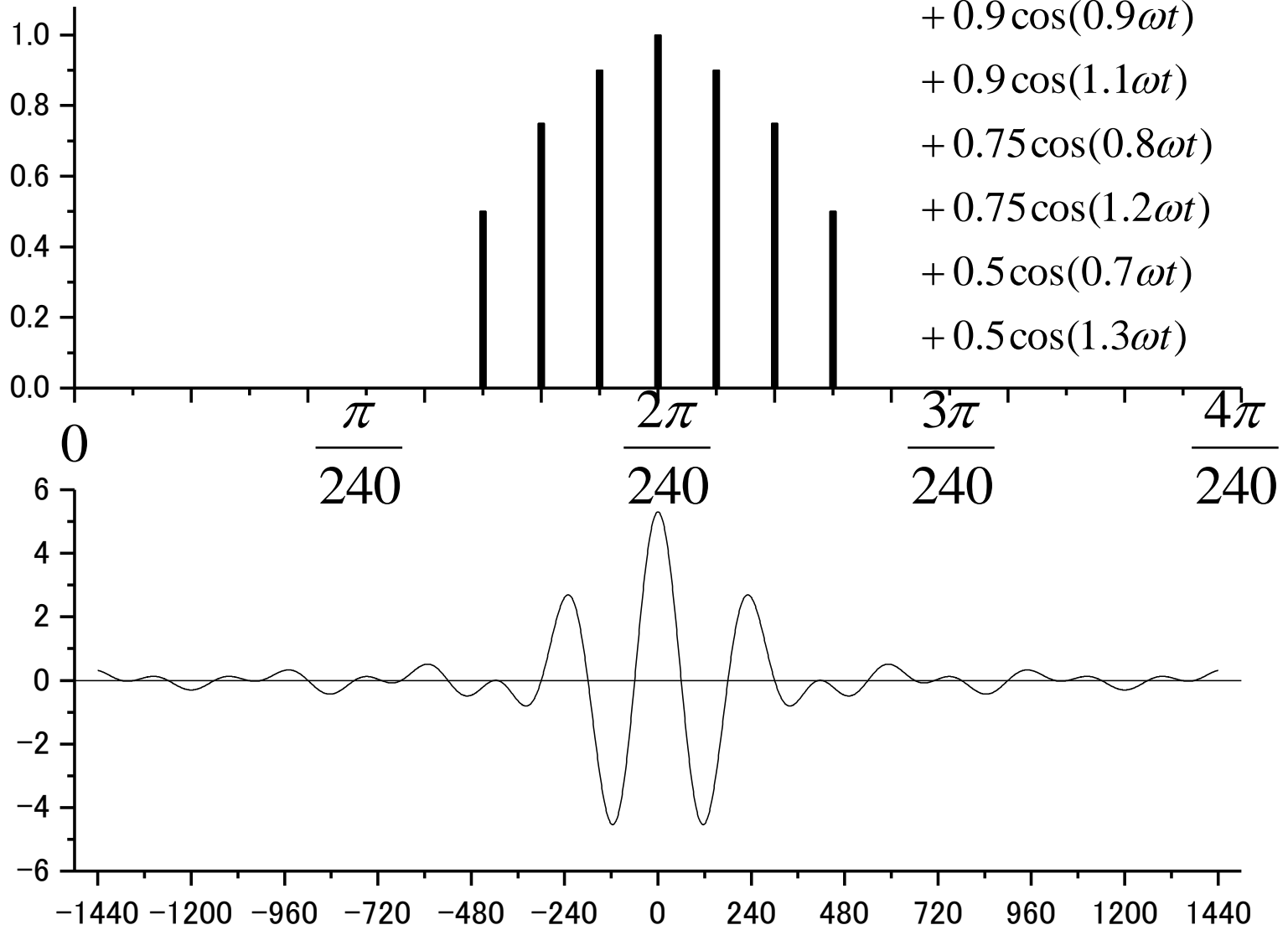
$$+ 0.9 \cos(1.1\omega t)$$

$$+ 0.75 \cos(0.8\omega t)$$

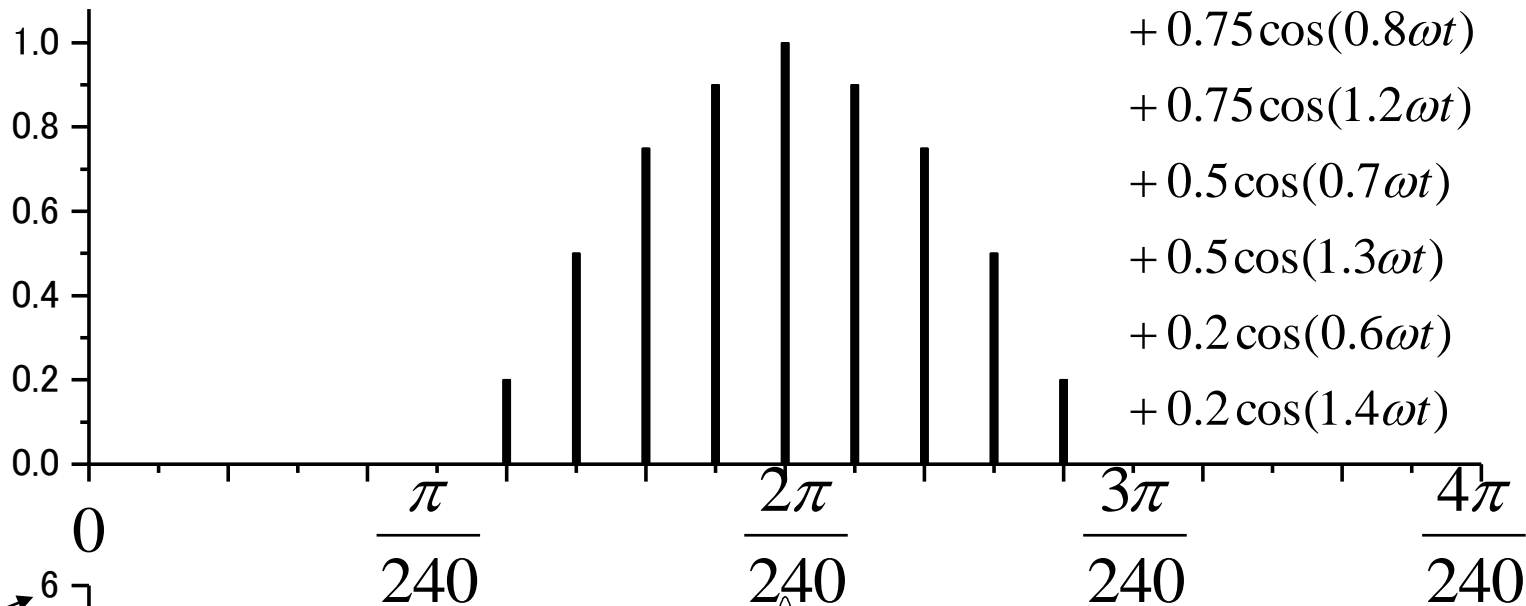
$$+ 0.75 \cos(1.2\omega t)$$

$$+ 0.5 \cos(0.7\omega t)$$

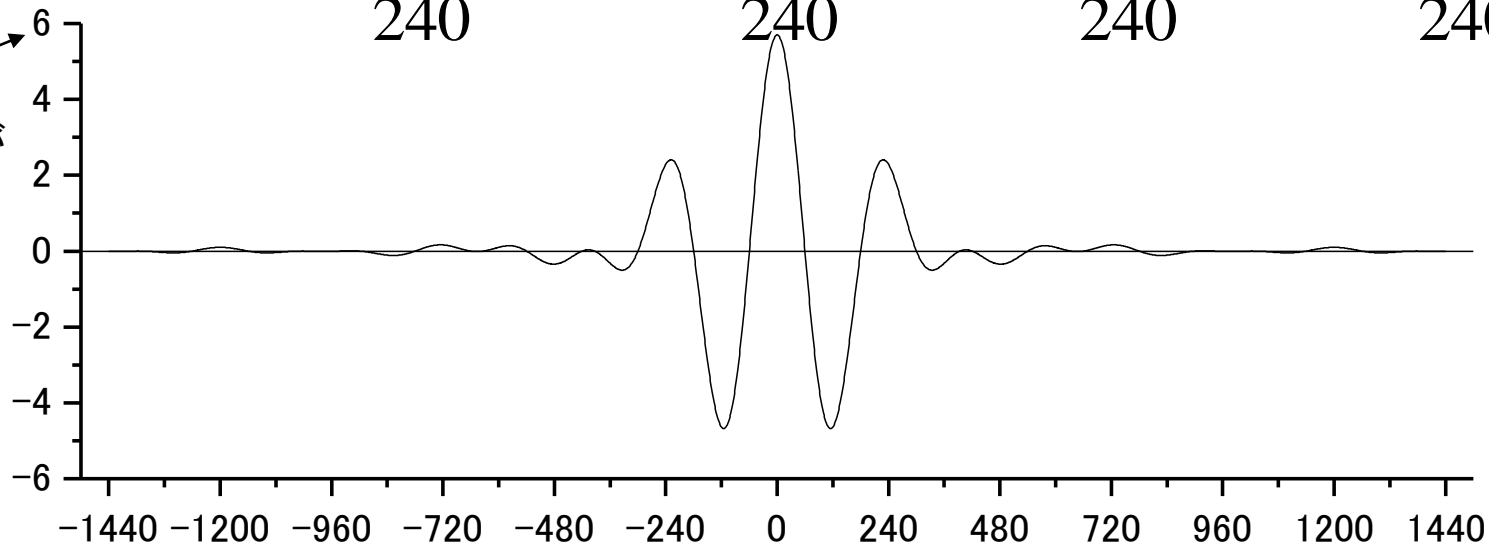
$$+ 0.5 \cos(1.3\omega t)$$



$$\begin{aligned}
 &\cos(\omega t) \\
 &+ 0.9 \cos(0.9\omega t) \\
 &+ 0.9 \cos(1.1\omega t) \\
 &+ 0.75 \cos(0.8\omega t) \\
 &+ 0.75 \cos(1.2\omega t) \\
 &+ 0.5 \cos(0.7\omega t) \\
 &+ 0.5 \cos(1.3\omega t) \\
 &+ 0.2 \cos(0.6\omega t) \\
 &+ 0.2 \cos(1.4\omega t)
 \end{aligned}$$



ピークの高さが  
 高くなっている  
 ことに注目



# Mode locking 位相同期法

一つのレーザー共振器からレーザー発振するさまざまな波長成分の光の位相をそろえる技術

超短パルスの生成

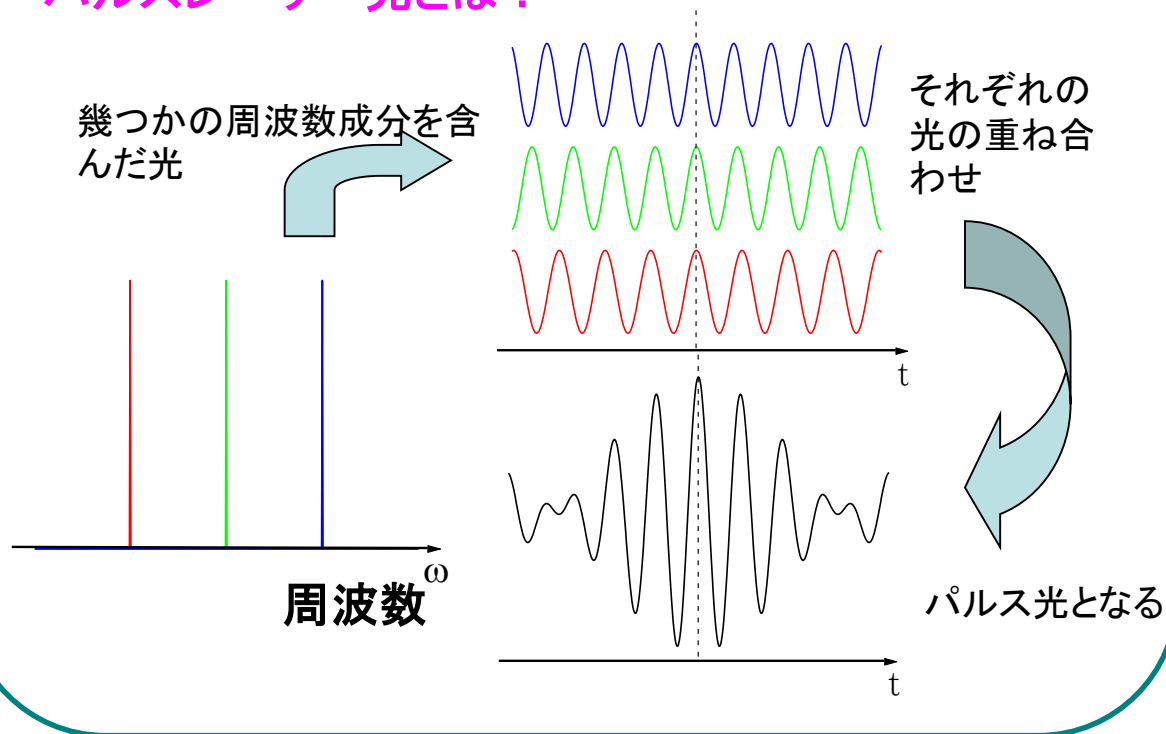
エネルギーが短い時間に集中 さまざまな利用価値がある

# フェムト秒パルス

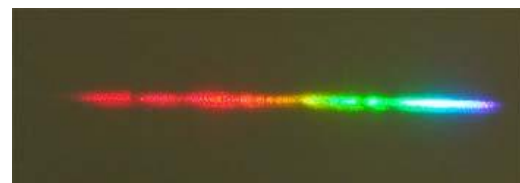
可視光パルスでは**世界最短のサブ5fs**の超短パルス

1フェムト秒(1fs)・・・ $10^{-15}$ s

## パルスレーザー光とは？



広帯域の可視光を用いて、パルスを作る。



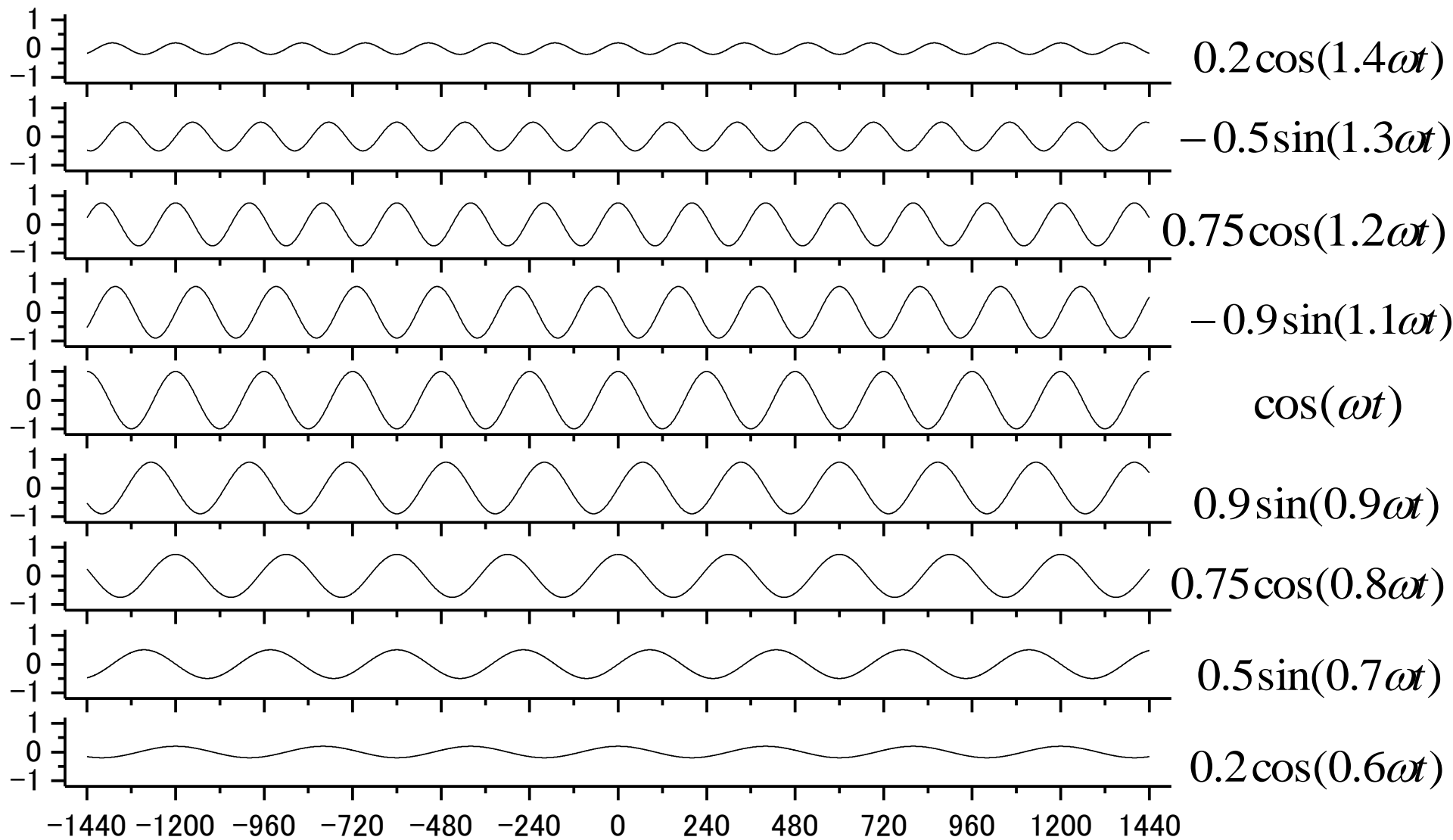
時間軸では、2,3周期の振動しかパルスの中に含まない。



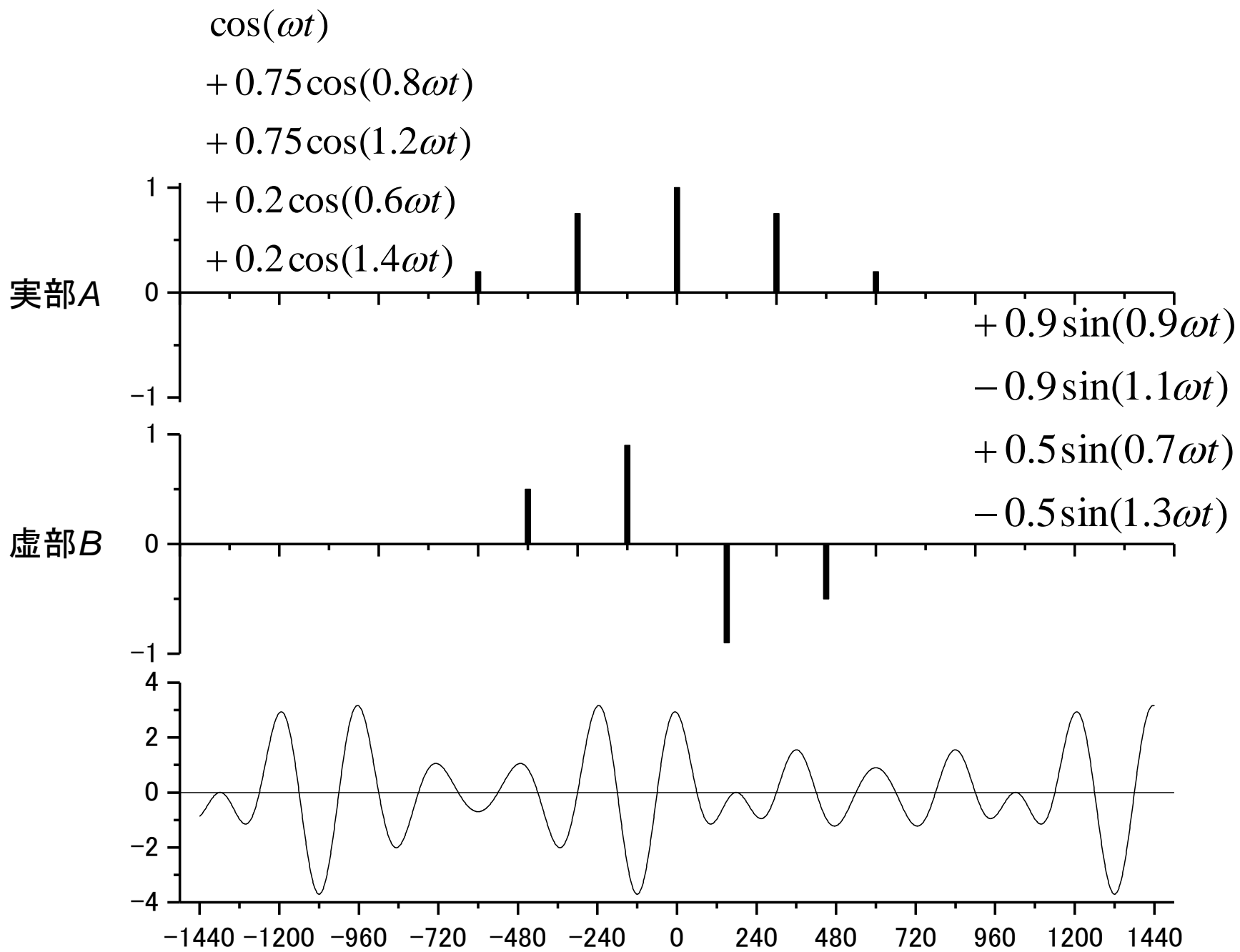
可視光パルスでは**世界最短**である**サブ5fs**の超短パルスを実現！

東大(電通大)小林<sub>孝</sub>研究室

# 位相がそろわないと？







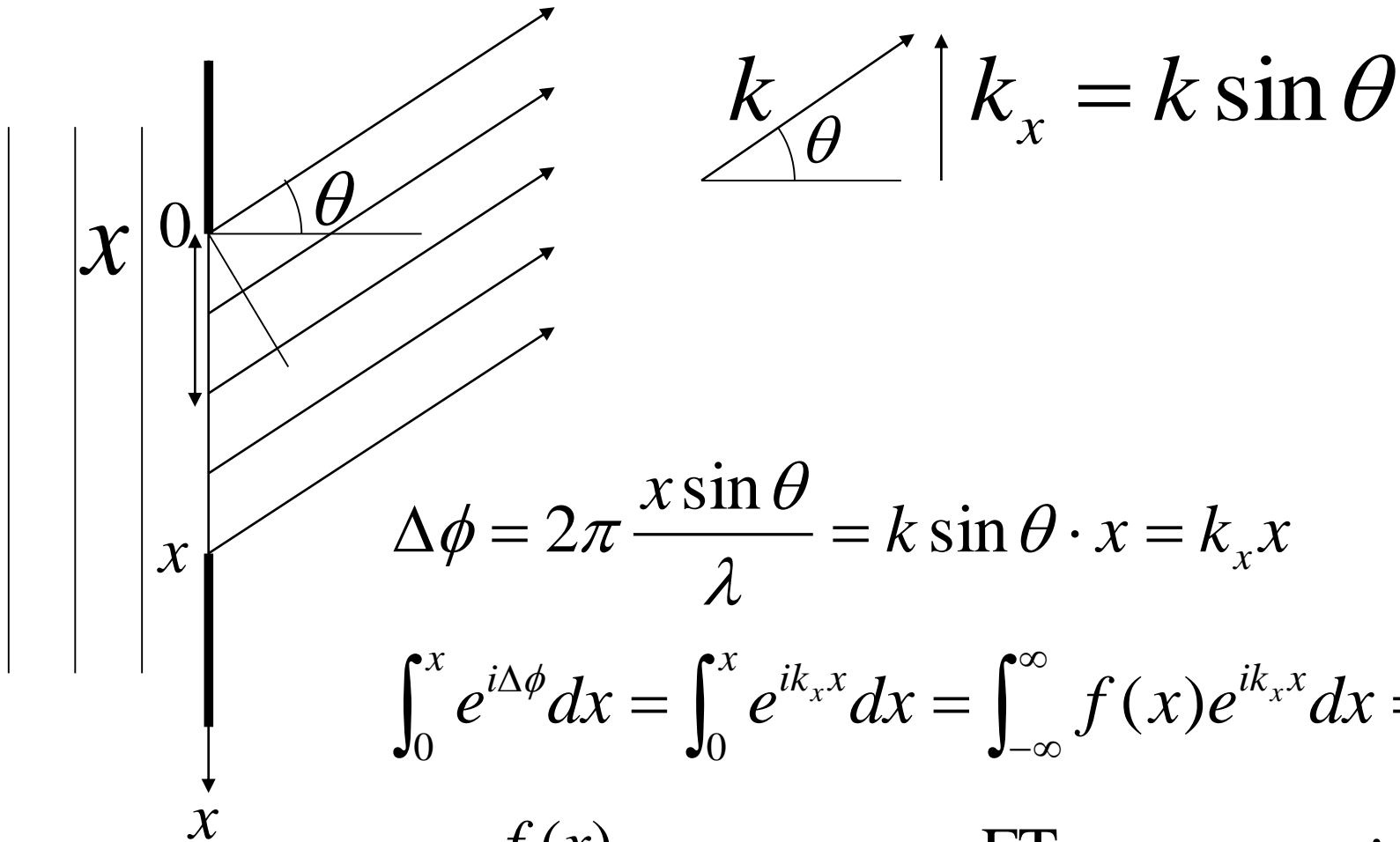
$$F(\omega) = A(\omega) + iB(\omega)$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega) + iB(\omega)] [\cos \omega t + i \sin \omega t] d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \{ [A(\omega) \cos \omega t - B(\omega) \sin \omega t] + i [A(\omega) \sin \omega t + B(\omega) \cos \omega t] \} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega) \cos \omega t - B(\omega) \sin \omega t] d\omega \quad \text{実関数} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \delta(\omega - \omega_0) \\ &\quad + 0.75\delta(\omega - 0.8\omega_0) \\ &\quad + 0.75\delta(\omega - 1.2\omega_0) \\ &\quad + 0.2\delta(\omega - 0.6\omega_0) \\ &\quad + 0.2\delta(\omega - 1.4\omega_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(\omega) &= -0.9\delta(\omega - 0.9\omega_0) \\ &\quad + 0.9\delta(\omega - 1.1\omega_0) \\ &\quad - 0.5\delta(\omega - 0.7\omega_0) \\ &\quad + 0.5\delta(\omega - 1.3\omega_0) \end{aligned}$$

# 回折とフーリエ変換



$f(x)$

$0$

$x$

$x$

FT

$x e^{ik_x x/2} \frac{\sin(k_x x/2)}{k_x x/2}$

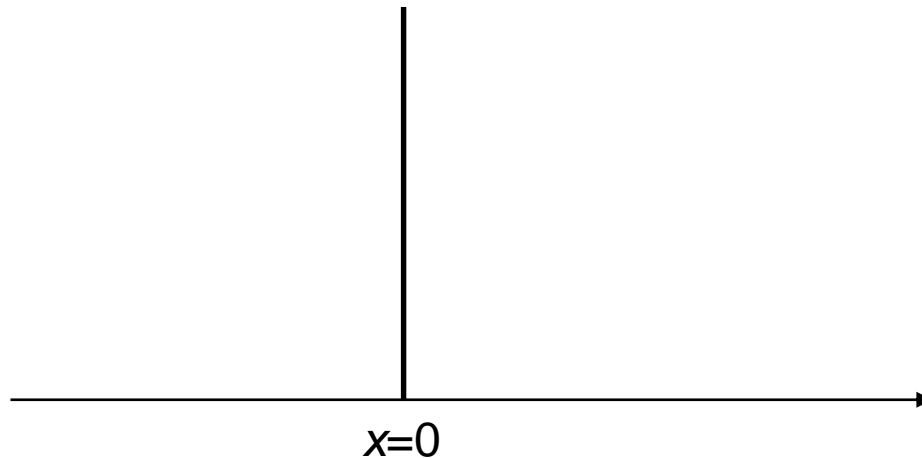
# デルタ関数

物理数学2

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ \infty & (x = 0) \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a)$$



# 回折格子による回折では、 回折格子から横方向運動量を受け取ると見なせる

周期 $d$ の回折格子

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nd)$$

$$f(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - nd) e^{-ikx} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-indk} = \frac{2\pi}{d} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(k - \frac{2\pi}{d}m)$$

$$k_d = \frac{2\pi}{d} \text{ とすると、} \delta(k - mk_d)$$

周期 $d$ の細かい開口の回折格子は、空間周波数 $mk_d$ の波より構成されている

$$d \sin \theta = m\lambda$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta = m \frac{2\pi}{d}$$

$$k \sin \theta = mk_d$$

# 回折格子から横方向運動量を受け取る

→ 回折格子を含めて運動量保存  
(入射光運動量 + 回折格子運動量 → 回折光運動量)

入射光と回折光の運動量のみ注目すると、  
回折格子の存在で横方向の一様性がない

→ 横方向運動量が保存されない とも見ることができる

$d$ を小さく( $\lambda$ を大きく)した場合、屈折の法則に帰着した  
どのように解釈できるだろうか？

# たたみこみ積分

物理数学2

$$f(x) \otimes g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')g(x-x')dx'$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} [f(x) \otimes g(x)]e^{-ikx} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x')g(x-x')dx' \right] e^{-ikx} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x')g(x-x')e^{-ikx'-ik(x-x')} dx' dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{-ikx'} dx' \int_{-\infty}^{\infty} g(x-x')e^{-ik(x-x')} dx \\ &= f(k) \int_{-\infty}^{\infty} g(X)e^{-ikX} dX \quad X = x - x' \quad dX = dx \\ &= f(k)g(k)\end{aligned}$$

$$f(x) \otimes g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(k)g(k)e^{ikx} dk$$

# 回折格子3の回折像の フーリエ解析



# δ関数のフーリエ級数

$-d \leq x \leq d$ で定義された関数(この区間外では周期 $2d$ で繰り返す)

$$\begin{aligned}\delta(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{d} + b_n \sin \frac{n\pi x}{d} \right) \\ &= \frac{1}{2d} + \frac{1}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi x}{d} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{d} + \frac{2}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi x}{d} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\cos \frac{n\pi x}{d} + i \sin \frac{n\pi x}{d}) \right) \\ &= \frac{1}{2d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i \frac{n\pi x}{d}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2md)\end{aligned}$$

$$k_n = n \frac{\pi}{d} = n \frac{2\pi}{2d} \quad \Delta k = k_{n+1} - k_n = \frac{\pi}{d} \quad \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta k e^{ik_n x} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - m \frac{2\pi}{\Delta k}) \quad d \rightarrow \infty (\Delta k \rightarrow 0) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} = \delta(x)$$

∴ 周期 $2d$

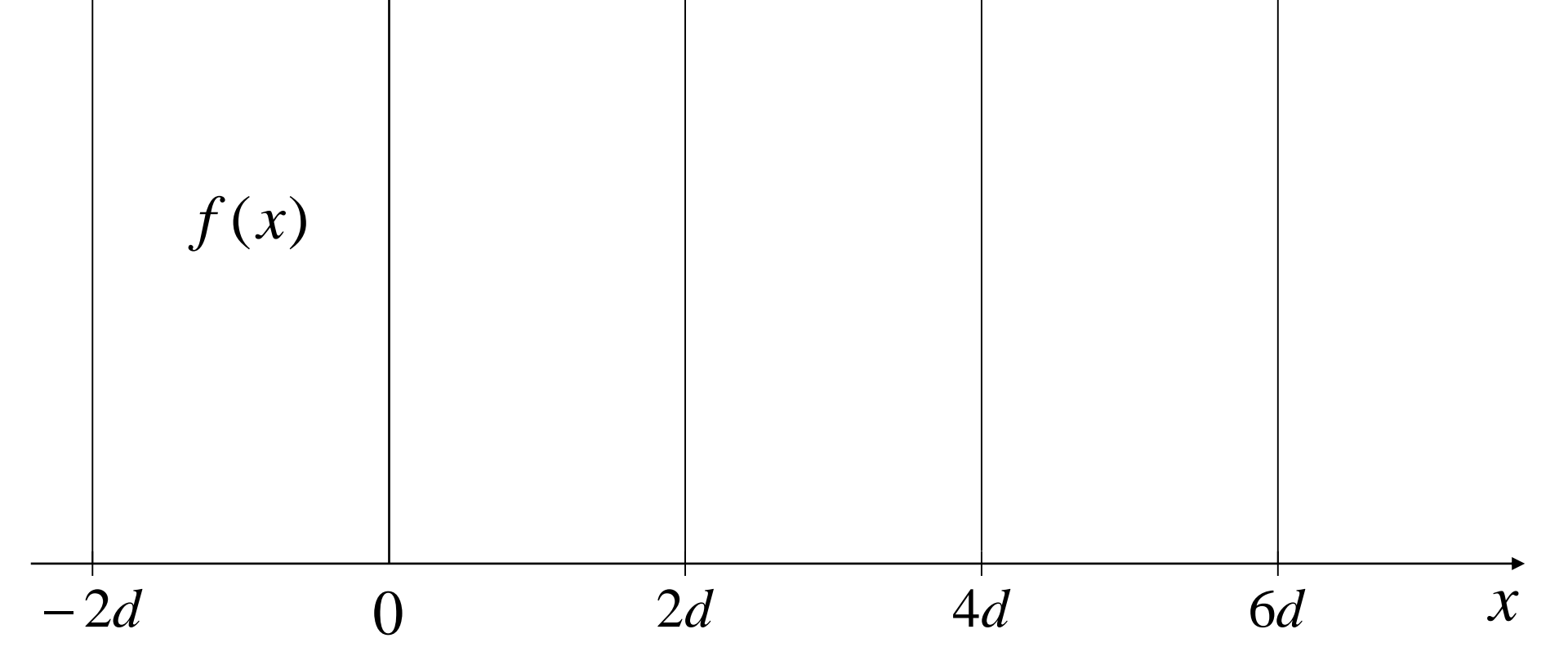
$$a_n = \frac{1}{d} \int_{-d}^d \delta(x) \cos \frac{n\pi x}{d} dx = \frac{1}{d} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{d} \int_{-d}^d \delta(x) \sin \frac{n\pi x}{d} dx = 0 \quad n = 1, 2, \dots$$

$$f(x) = \frac{1}{2d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i \frac{n\pi x}{d}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2md) \text{で } x \rightarrow k, d \rightarrow \frac{\pi}{d} \text{ とする}$$

$$\frac{d}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{indk} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(k - \frac{2\pi m}{d})$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i \frac{n\pi x}{d}} \right) e^{-ikx} dx = \frac{\pi}{d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k - \frac{n\pi}{d})x} dx = \frac{\pi}{d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(k - \frac{n\pi}{d}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2md) \right] e^{-ikx} dx = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-ik2md}\end{aligned}$$



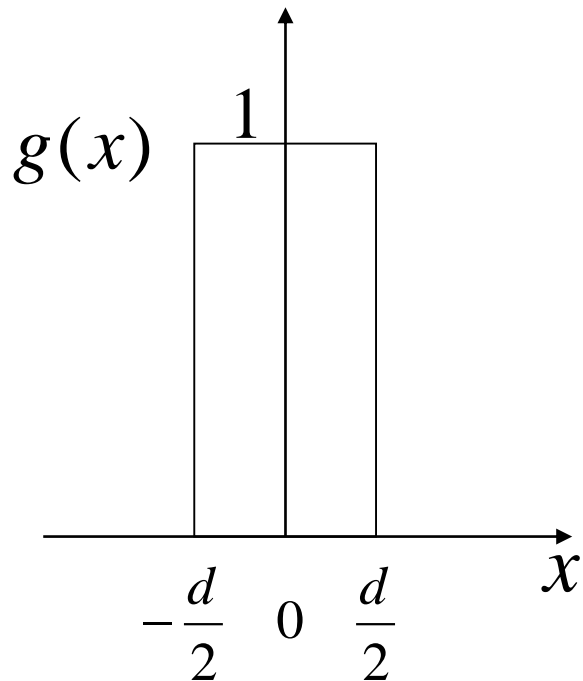
$f(x)$

$-2d$        $0$        $2d$        $4d$        $6d$        $x$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2nd)$$

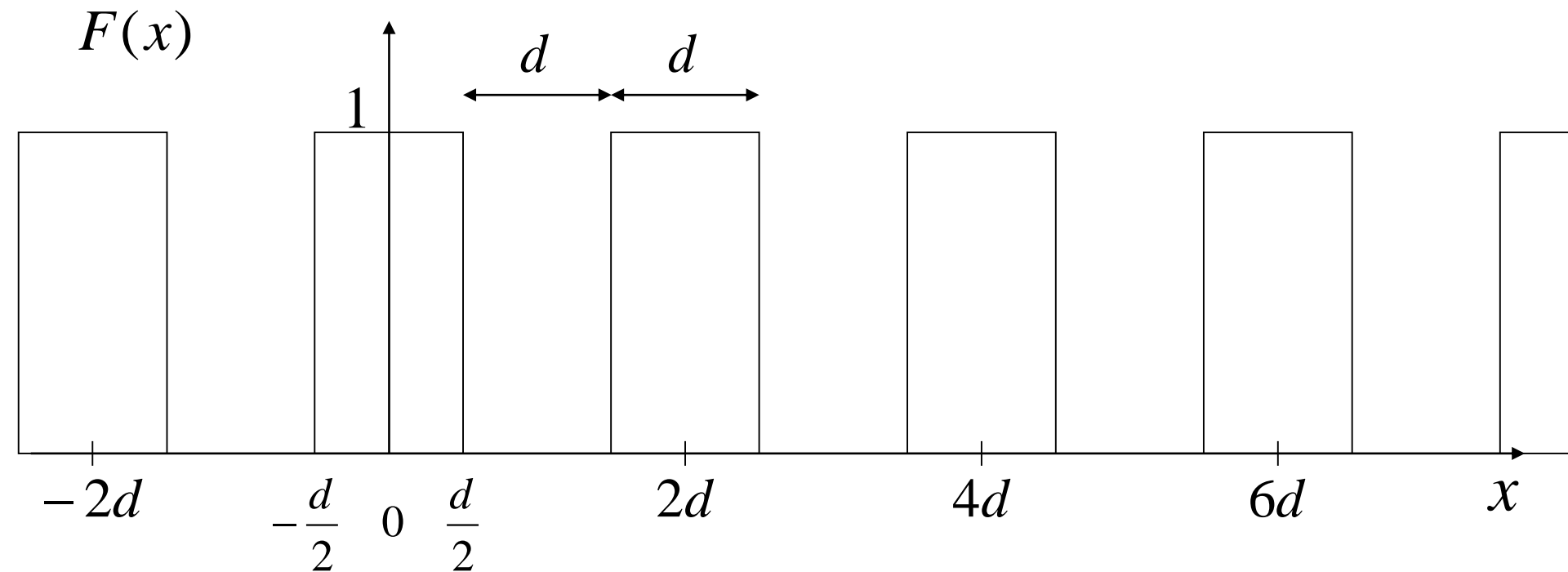
$$f(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - 2nd) e^{-ikx} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i2ndk} = \frac{\pi}{d} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(k - \frac{\pi}{d}m\right)$$



$$g(k) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-ikx} dx$$

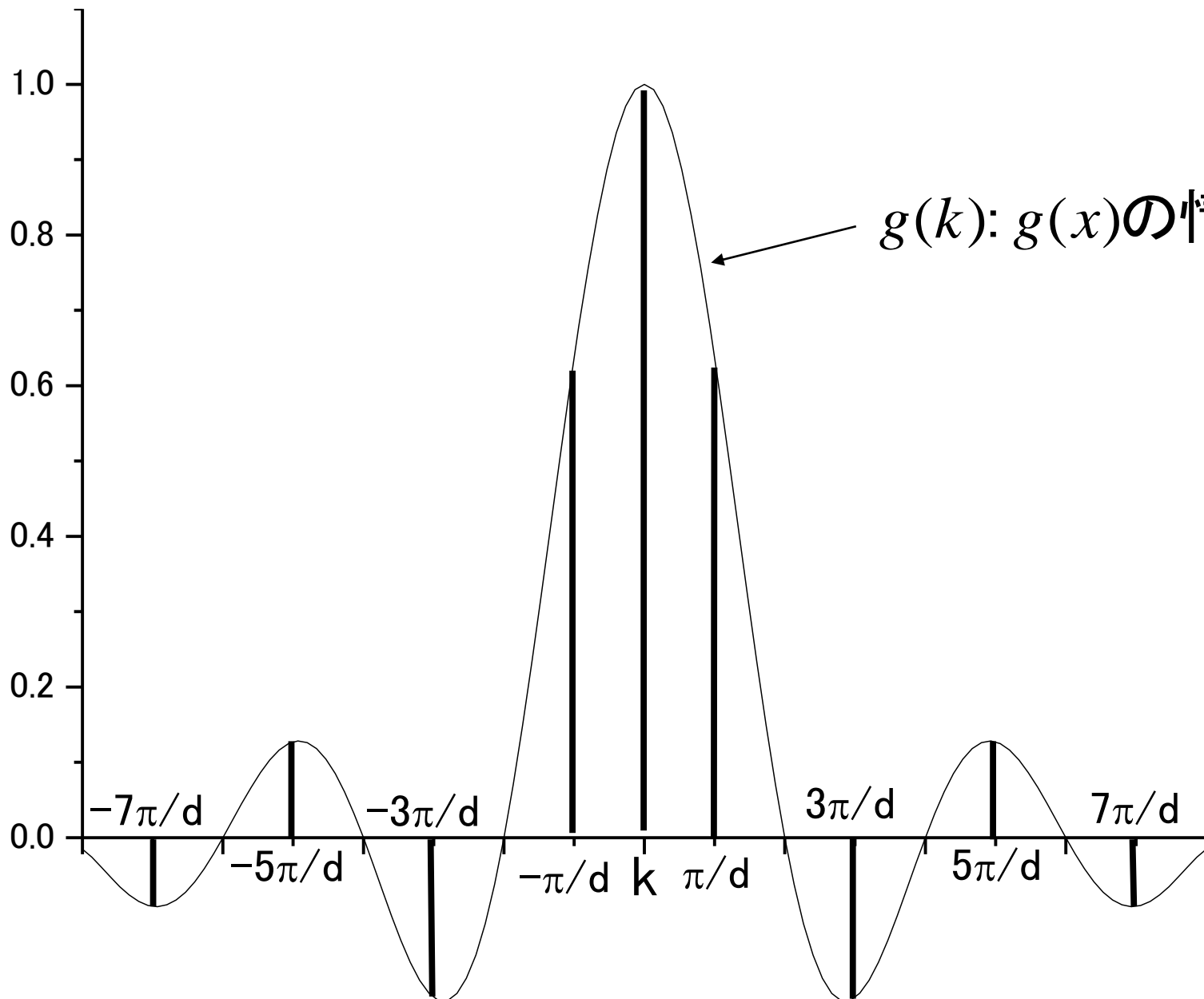
$$= \int_{-d/2}^{d/2} e^{-ikx} dx = \left[ \frac{e^{-ikx}}{-ik} \right]_{-d/2}^{d/2} = d \frac{e^{-ik \frac{d}{2}} - e^{ik \frac{d}{2}}}{-ikd} = d \frac{\sin \frac{kd}{2}}{\frac{kd}{2}}$$



$$F(x) = f(x) \otimes g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') g(x - x') dx' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(x - 2nd)$$

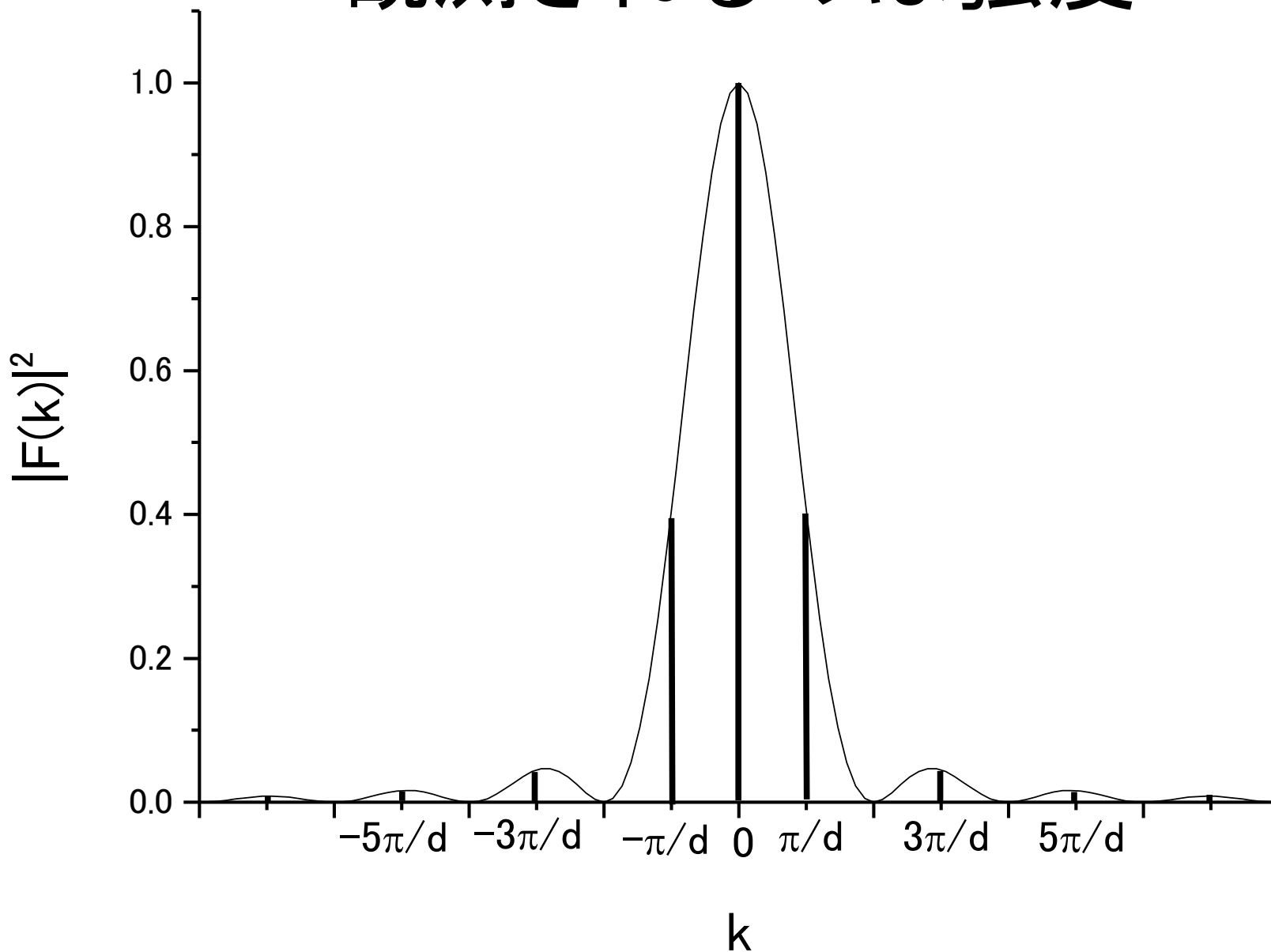
$$F(k) = f(k) g(k) = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(k - \frac{\pi}{d} n) \frac{\sin \frac{kd}{2}}{\frac{kd}{2}} = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{2}}{\frac{\pi n}{2}} \delta(k - \frac{\pi}{d} n)$$

F(k) (規格化)



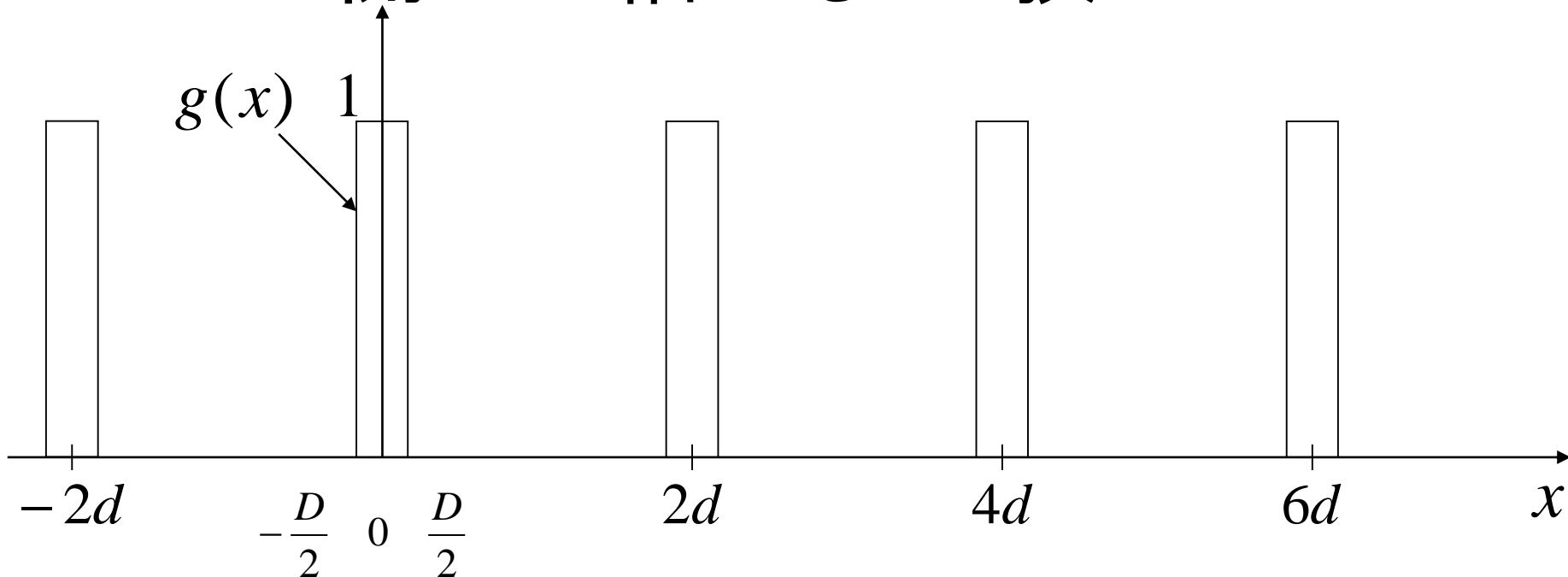
$g(k): g(x)$ の情報

# 観測されるのは強度



# 回折格子1, 2の回折像の フーリエ解析

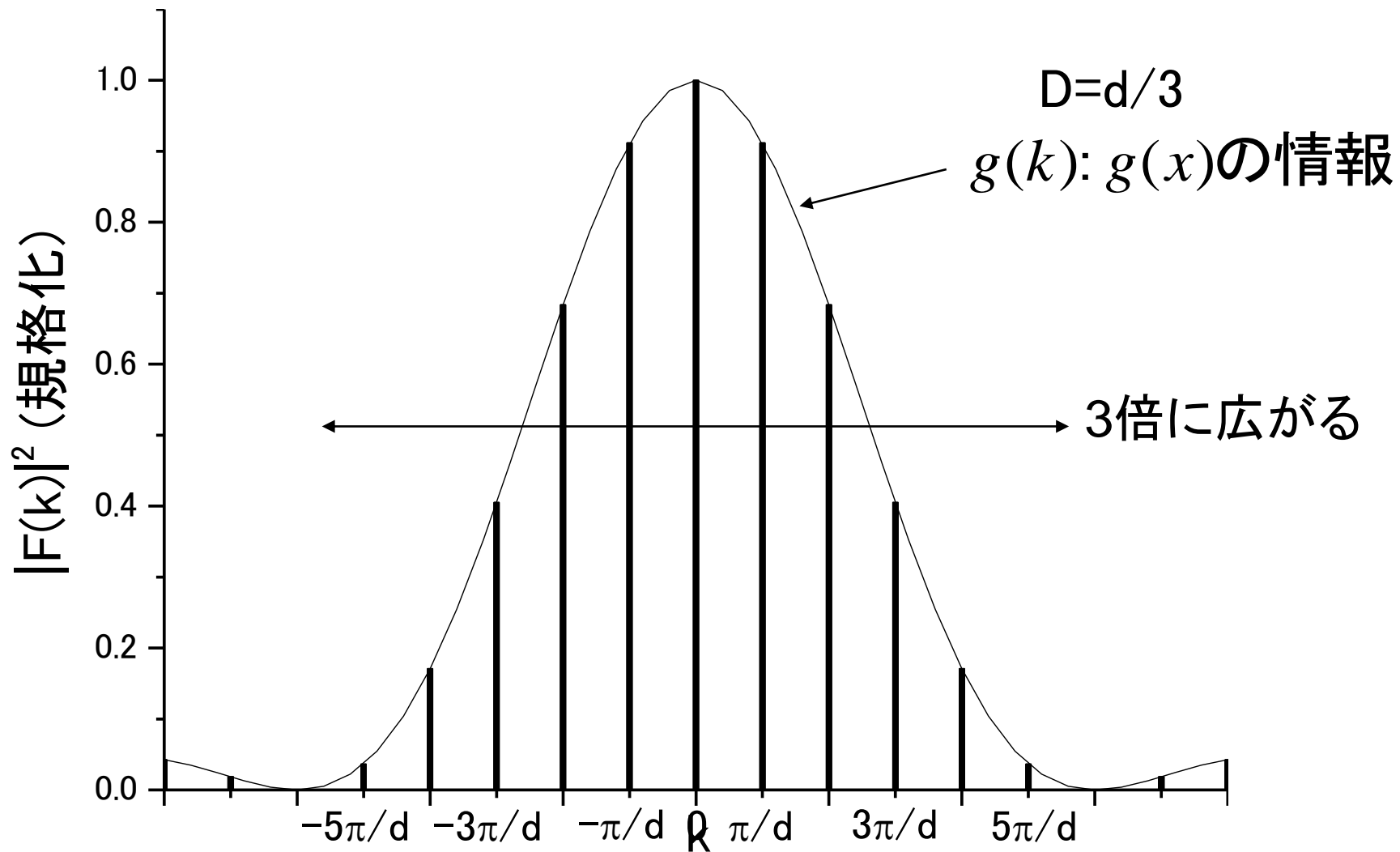
# 開口の幅がもっと狭いと



$$F(x) = f(x) \otimes g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') g(x - x') dx' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(x - 2nd)$$

$$F(k) = f(k) g(k) = \pi \frac{D}{d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(k - \frac{\pi}{d} n) \frac{\sin \frac{kD}{2}}{\frac{kD}{2}} = \pi \frac{D}{d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n D}{2d}}{\frac{\pi n D}{2d}} \delta(k - \frac{\pi}{d} n)$$





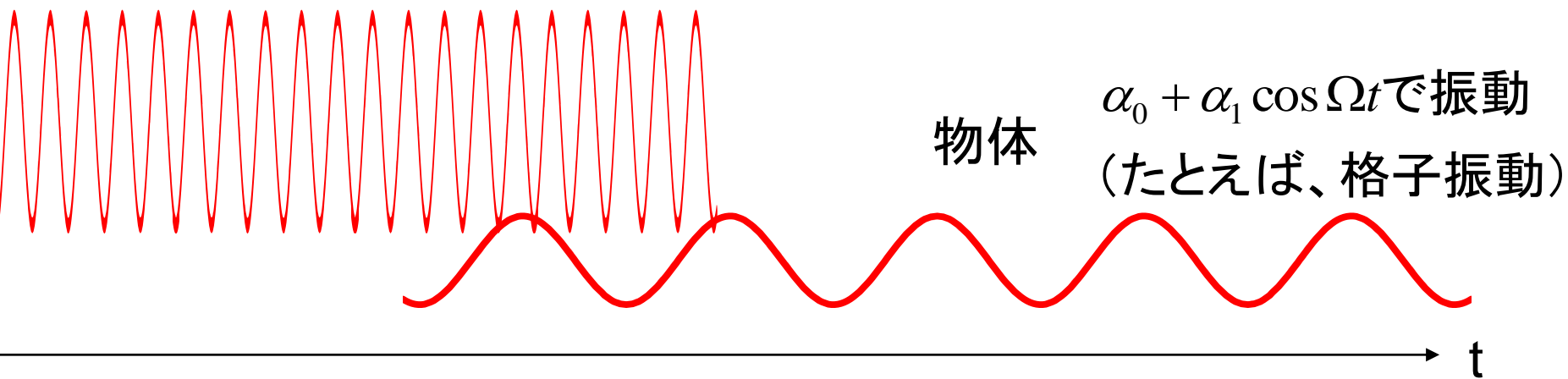
反射、屈折、回折のとき、  
周波数 $\omega$ はなぜ変化しない？

光子のエネルギー保存  
(時間の一様性から)

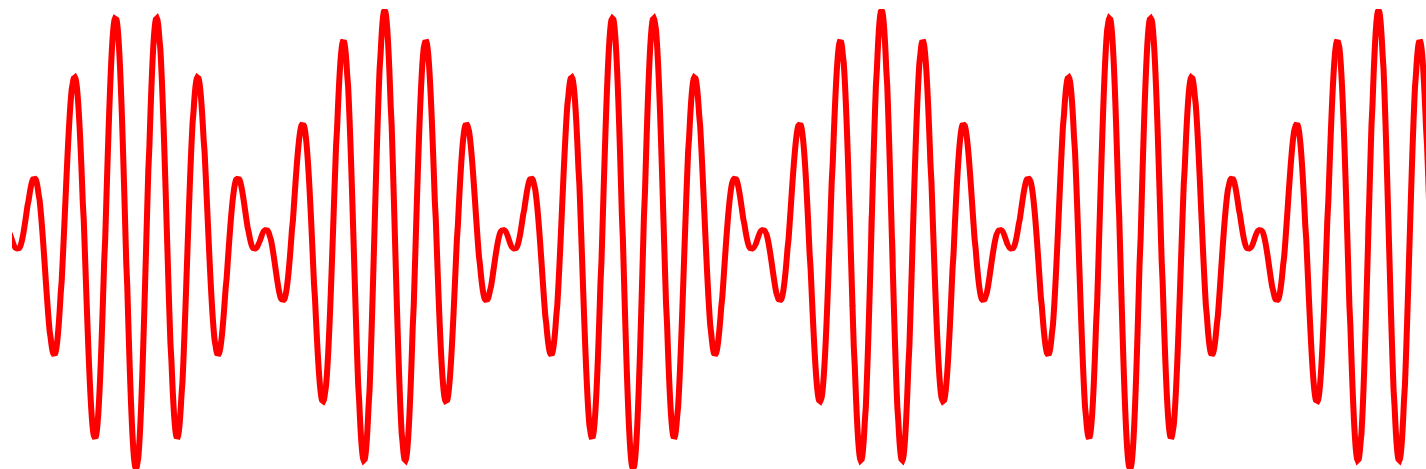
$\omega$ が変化する場合を見れば、  
 $\omega$ が変化しない理由がわかる

# 媒質が時間変化していたら

入射光  $E \cos \omega t$



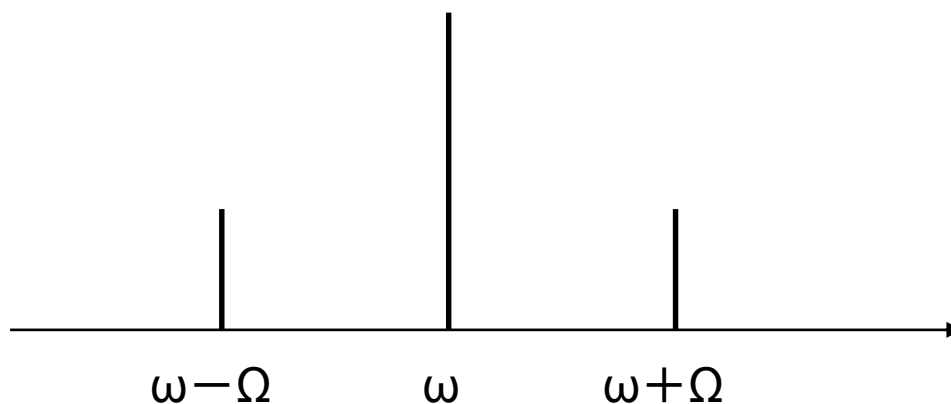
出射光



$$E \cos \omega t (\alpha_0 + \alpha_1 \cos \Omega t)$$

$$= \frac{E}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \left[ \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{2} (e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}) \right]$$

$$= \frac{E}{2} \left[ \alpha_0 (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) + \frac{\alpha_1}{2} (e^{i(\omega+\Omega)t} + e^{-i(\omega+\Omega)t} + e^{i(\omega-\Omega)t} + e^{-i(\omega-\Omega)t}) \right]$$



ラマン散乱

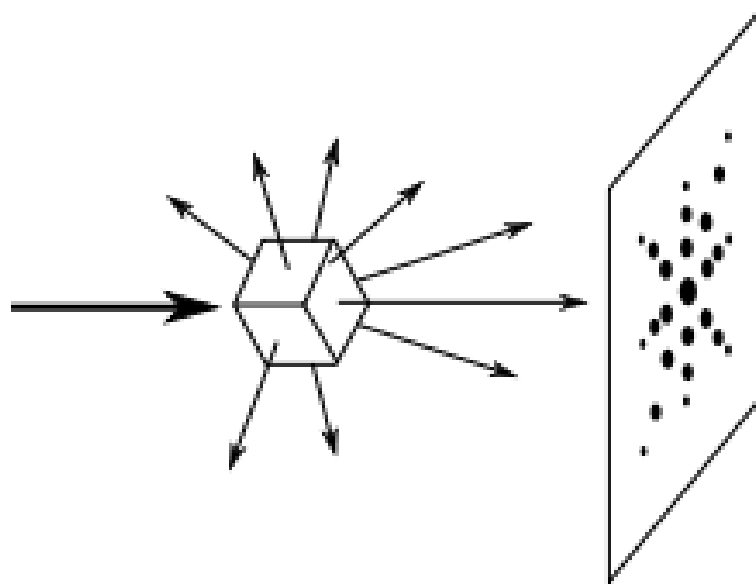
入射光と散乱光のみに注目すると、  
時間の一様性が満たされない  
→エネルギーが保存されない

あるいは

媒質も含めて考えると、  
格子振動のエネルギーを受け取って  
前後の全エネルギーは保存される

# X線回折

3年実験



X線を結晶に照射すると、ブラッグの法則を満たした方向にのみX線が回折され、結晶構造を反映したパターンが生じる。

回折パターンから結晶構造を推定する

可視光でなくX線を使う理由は？

結晶の格子間隔はどのくらいだろうか？

ホログラフィーとの違いは？

構造因子とは？

X線回折の位相問題とは？

# ホログラフィー

理学部第一部応用物理学科 石井行弘先生 作成

<http://www.rs.kagu.tus.ac.jp/y.ishii/index.html>



# ホログラフィーとは？ 写真との違いは？

Wikipedia

ホログラフィーはホログラムの製造技術のことで、ホログラムとは3次元像を記録した写真のことである。

白黒の写真は光強度(単位面積あたりの光のエネルギー)が記録された点の集まりで、どの点も光強度という1つの情報しかない。しかし、ホログラムでは光の電場の振幅や波長の情報だけでなくそれに位相の情報が加わる。

写真では位相の情報は失われるが、ホログラムにおいては光の電場の振幅と位相が記録される。

像が再生される時にできる放射光は完全な3次元像となる。

ホログラフィーと写真の違いはここにある。

振幅と位相が記録されれば  
なぜ3次元像になるのか？？？

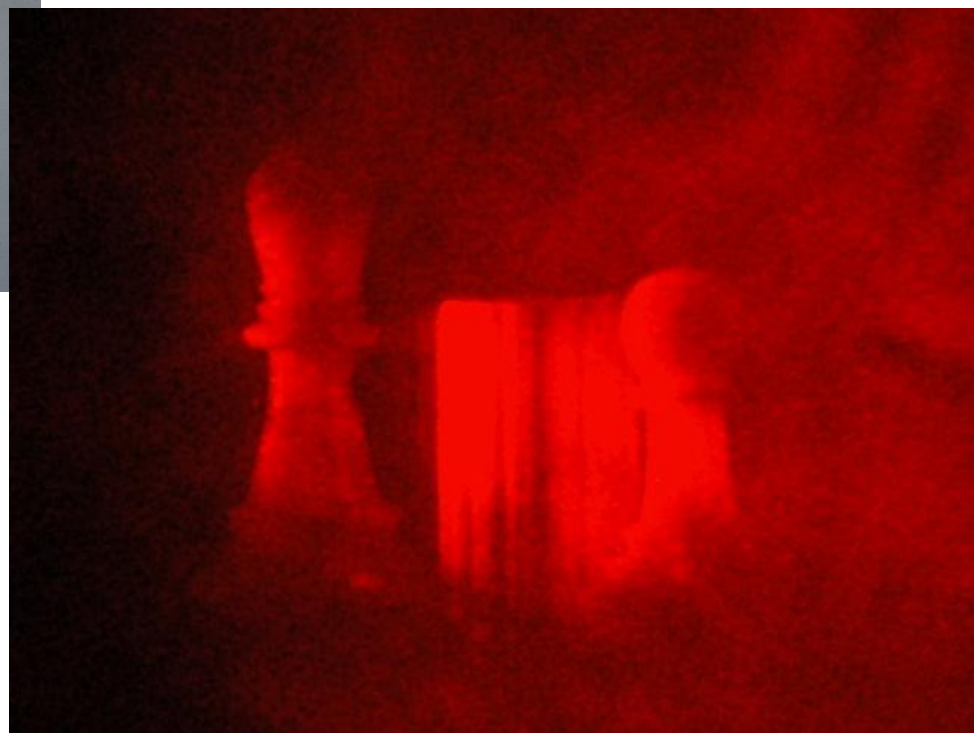
# ホログラフィー

3年実験

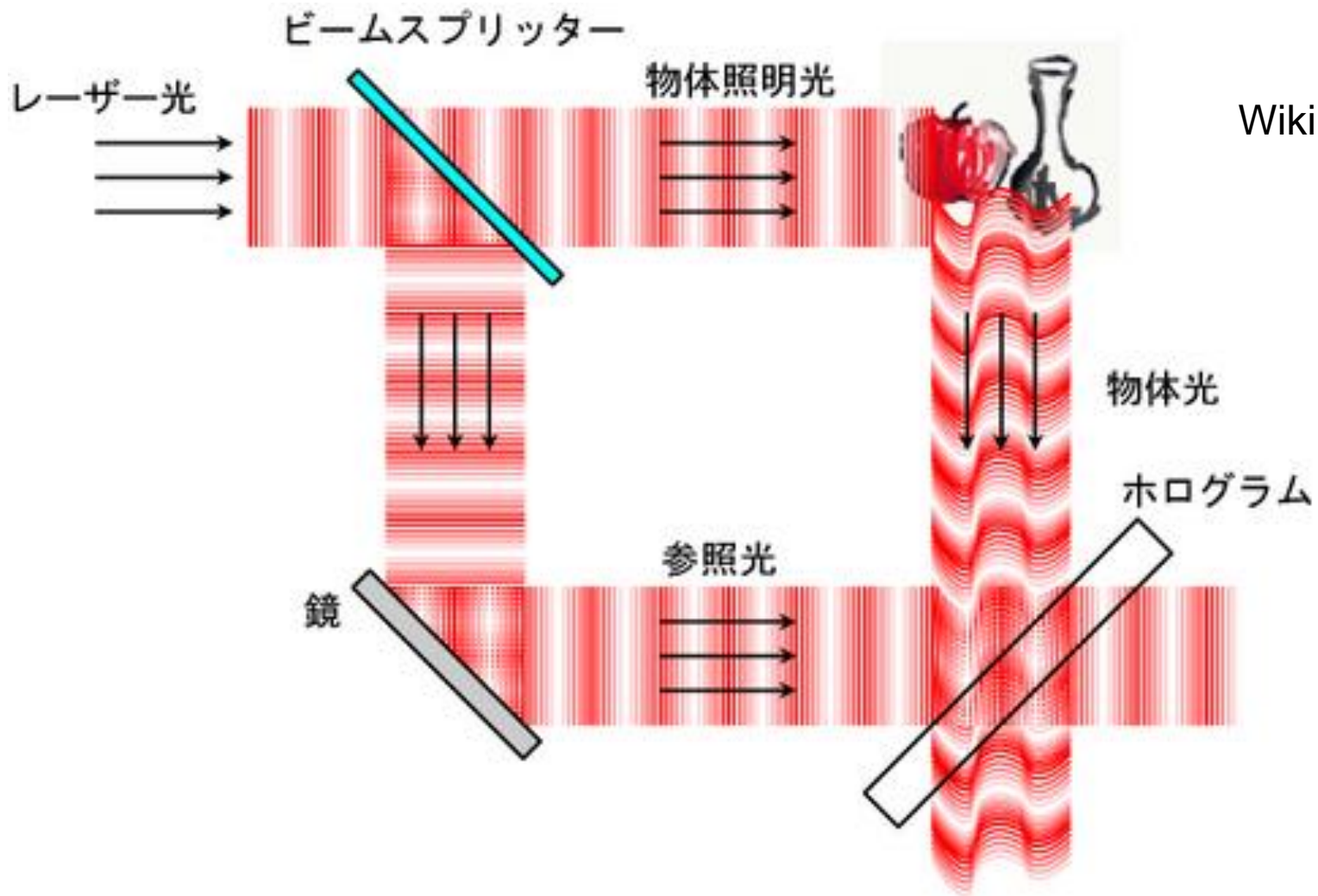
ホログラフィーを作成することで、  
レーザー光の位相、コヒーレンス、  
干渉について理解する。

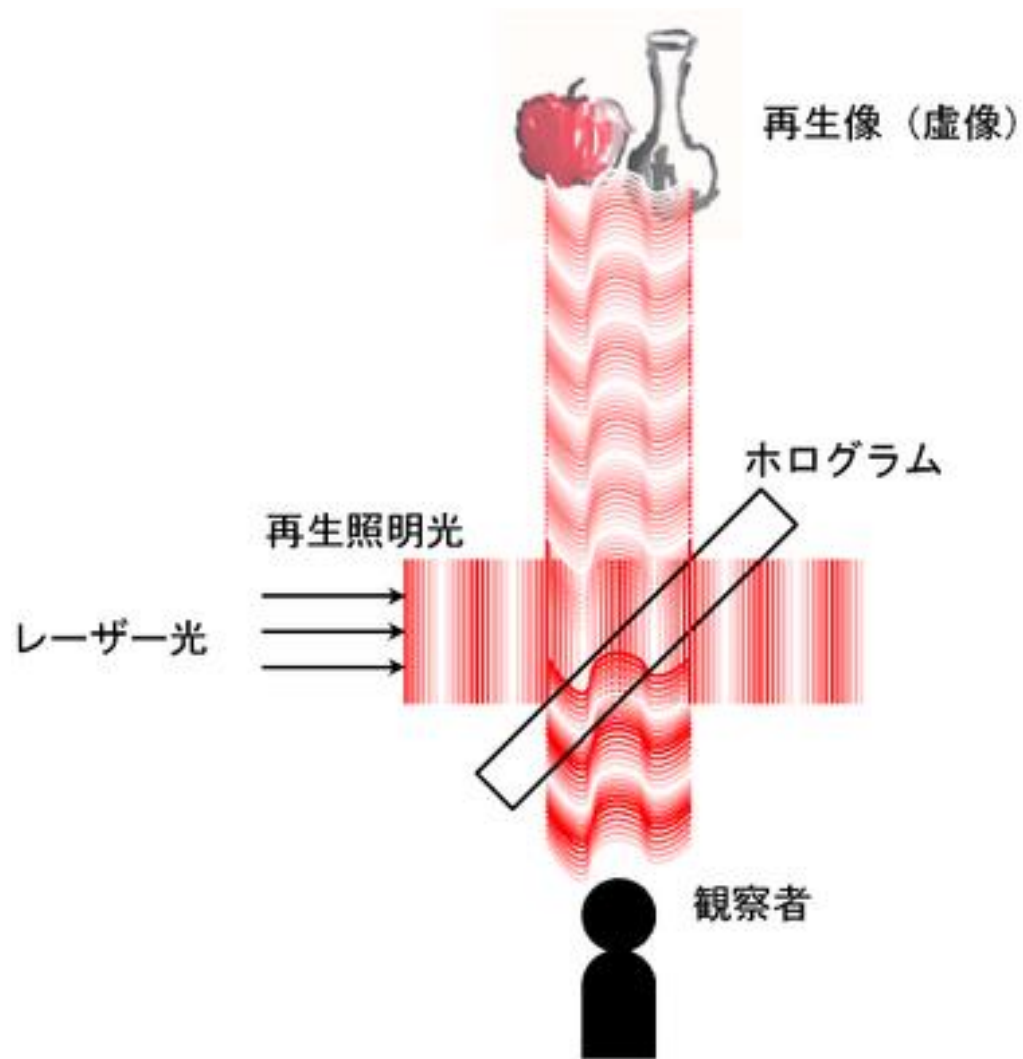
→レーザー光の特徴と他の光との違い

→ホログラフィーとは



光学実験系の調整技術の会得  
乾板現像技術





$$\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z) \quad \mathbf{r} = (x, y, z)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

物体光  $E_O = E_1 \cos(\omega t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} + \phi)$

参照光  $E_R = E_2 \cos(\omega t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})$

$$(E_O + E_R)^2 = [E_1 \cos(\omega t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} + \phi) + E_2 \cos(\omega t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})]^2$$

$$\begin{aligned}
(E_O + E_R)^2 &= [E_1 \cos(\omega t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} + \phi) + E_2 \cos(\omega t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})]^2 \\
&= \left[ \frac{E_1}{2} (e^{i(\omega t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} + \phi)} + e^{-i(\omega t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} + \phi)}) + \frac{E_2}{2} (e^{i(\omega t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})} + e^{-i(\omega t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})}) \right]^2 \\
&= \left( \frac{E_1}{2} \right)^2 (e^{i(\omega t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} + \phi)} + e^{-i(\omega t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} + \phi)})^2 + \left( \frac{E_2}{2} \right)^2 (e^{i(\omega t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})} + e^{-i(\omega t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})})^2 \\
&\quad + 2 \frac{E_1}{2} \frac{E_2}{2} (e^{i(\omega t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} + \phi)} + e^{-i(\omega t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} + \phi)}) (e^{i(\omega t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})} + e^{-i(\omega t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})}) \\
&= \left( \frac{E_1}{2} \right)^2 (e^{i2(\omega t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} + \phi)} + 2 + e^{-i2(\omega t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} + \phi)}) + \left( \frac{E_2}{2} \right)^2 (e^{i2(\omega t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})} + 2 + e^{-i2(\omega t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})}) \\
&\quad + 2 \frac{E_1}{2} \frac{E_2}{2} (e^{i[2\omega t - (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} + \phi]} + e^{-i[2\omega t - (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} + \phi]} + e^{i[(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} - \phi]} + e^{-i[(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} - \phi]})
\end{aligned}$$

時間平均  $\Rightarrow \frac{1}{2} (E_1^2 + E_2^2 + E_1 E_2 e^{i[(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} - \phi]} + E_1 E_2 e^{-i[(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} - \phi]}) = T$  回折格子

波数ベクトル  $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$  が記録される

$$E_1 E_2(x, y) \cos((\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} - \phi(x, y)) = A(x, y) \cos \Phi(x, y)$$

$$\text{時間平均} \Rightarrow \frac{1}{2}(E_1^2 + E_2^2 + E_1E_2e^{i[(k_1-k_2)\cdot r-\phi]} + E_1E_2e^{-i[(k_1-k_2)\cdot r-\phi]}) = T \quad \text{回折格子}$$

$$\text{再生光} \quad E_R = E_2 \cos(\omega t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}) = \frac{E_2}{2}(e^{i(\omega t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})} + e^{-i(\omega t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})})$$

$$E_RT = \frac{E_2}{2}(e^{i(\omega t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})} + e^{-i(\omega t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})}) \frac{1}{2}(E_1^2 + E_2^2 + E_1E_2e^{i[(k_1-k_2)\cdot r-\phi]} + E_1E_2e^{-i[(k_1-k_2)\cdot r-\phi]})$$

$$\rightarrow \frac{E_2}{2} \frac{E_1E_2}{2} (e^{i(\omega t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} + \phi)} + e^{-i(\omega t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} + \phi)}) \quad \text{物体光(虚像)}$$

$$+ \frac{E_2}{2} \frac{E_1E_2}{2} (e^{i[\omega t - (2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{r} - \phi]} + e^{-i[\omega t - (2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{r} - \phi]}) \quad \text{複素共役光(実像)}$$

$$\mathbf{k}_2 + (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$$

$$\mathbf{k}_2 - (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$$

の波が発生



# 光強度

光検出器 光のエネルギーを検出  
光の振動数で変化する速い変化に追従できない  
サイクル平均が測定される

$$\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \quad \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

$I \equiv |\bar{\mathbf{S}}|$  サイクル平均光強度

$$|\mathbf{S}| = E_0 H_0 \cos^2(\omega t - kz) = E_0 H_0 \frac{1 + \cos 2(\omega t - kz)}{2}$$

$$(\text{サイクル平均強度}) = \frac{E_0 H_0}{2} = \frac{E_0}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 = \frac{1}{2} \epsilon_0 |E_0|^2 c \text{ [J/(m}^2 \cdot \text{s)]} \propto |E_0|^2$$

したがって複素表示  $E = E_0 e^{-i(\omega t - kz)}$  で表して  $I \propto EE^*$  でよい

# 干渉縞の計算

$$E_1 = E_0 \cos(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \omega t)$$

$$E_2 = E_0 \cos(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} - \omega t + \phi)$$

$$(E_1 + E_2)^2 = E_0^2 \frac{1 + \cos 2(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \omega t)}{2} + E_0^2 \frac{1 + \cos 2(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} - \omega t + \phi)}{2} \\ + E_0^2 \{ \cos[(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x} - 2\omega t + \phi] + \cos[(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x} - \phi] \}$$

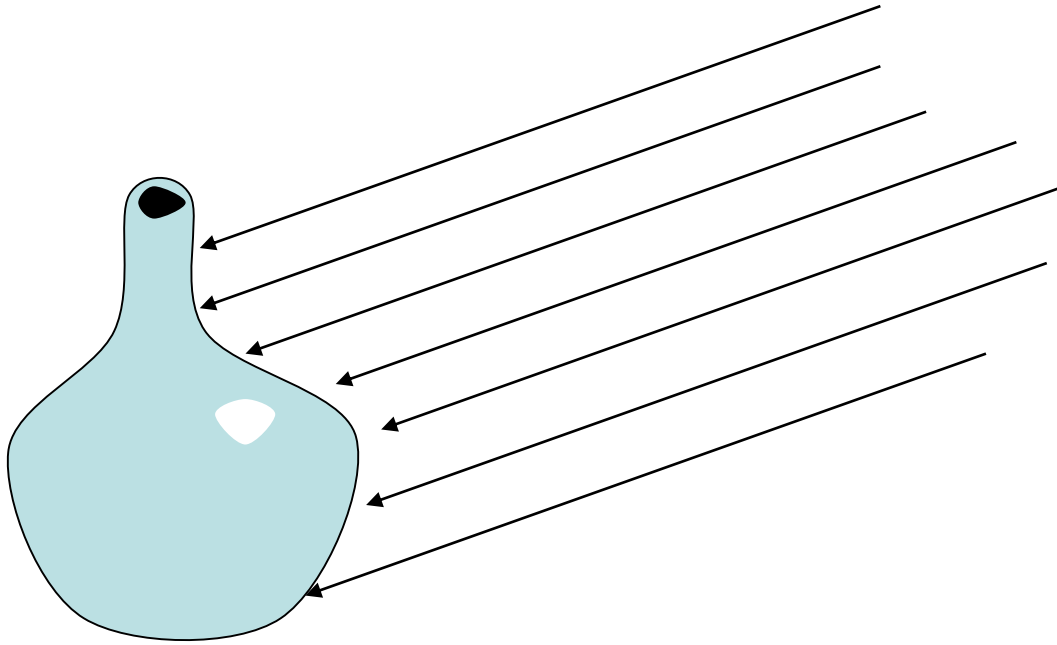
$$(\text{サイクル平均}) = E_0^2 + E_0^2 \cos[(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x} - \phi]$$

---

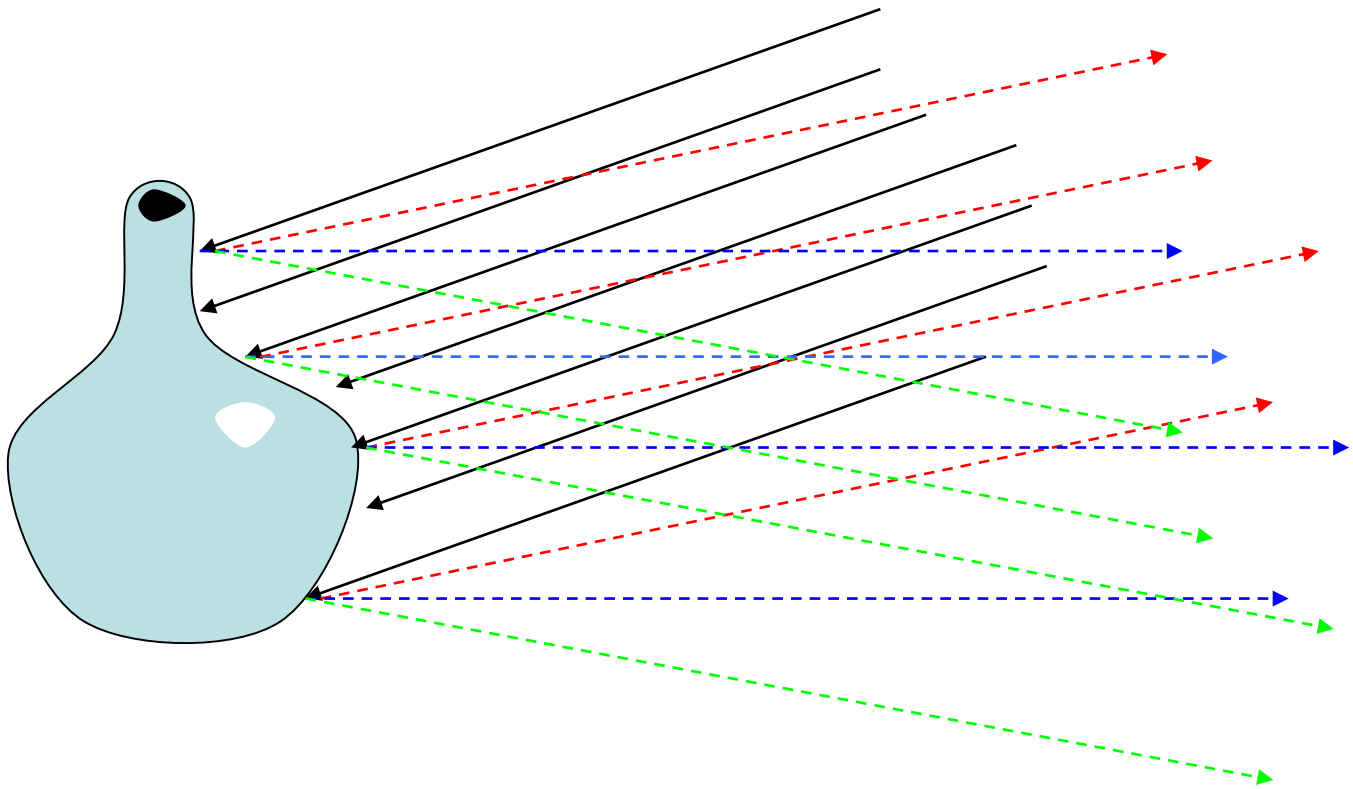
## 複素表示を使う方法

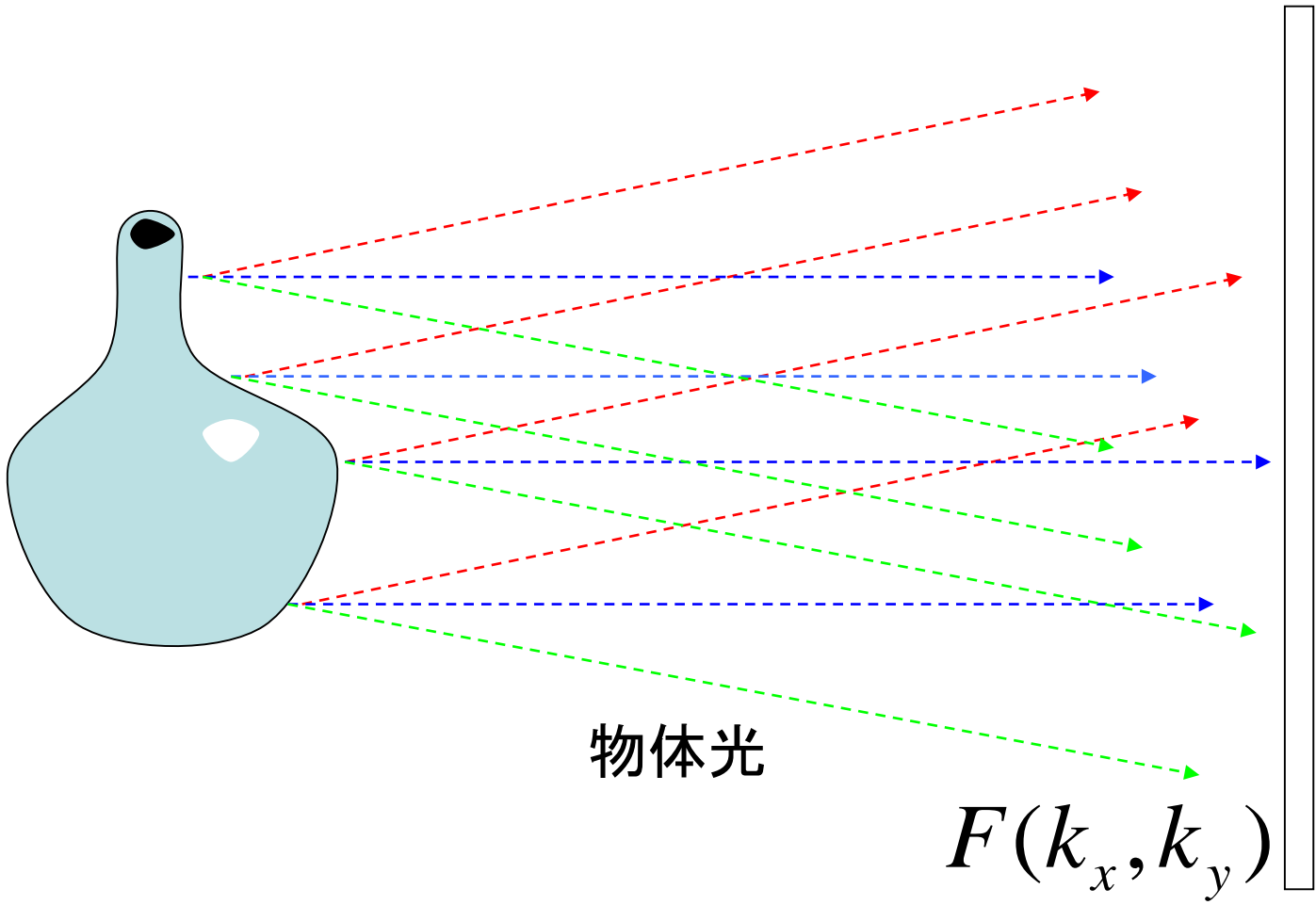
$$E_1 = E_0 e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad E_2 = E_0 e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} - \omega t + \phi)}$$

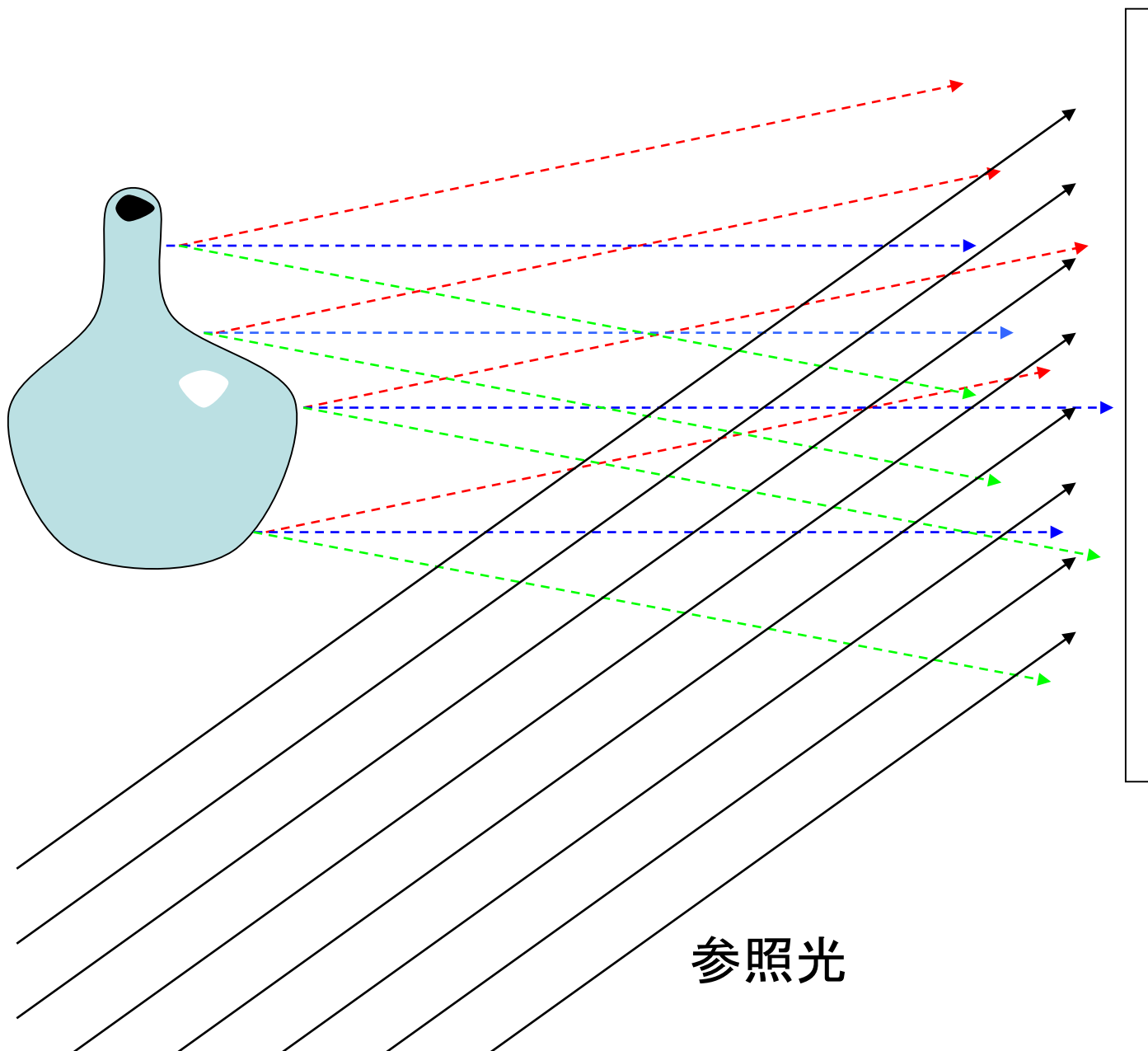
$$|E_1 + E_2|^2 = (E_0 e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \omega t)} + E_0 e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} - \omega t + \phi)})(E_0 e^{-i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \omega t)} + E_0 e^{-i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} - \omega t + \phi)}) \\ = E_0^2 + E_0^2 + E_0^2 e^{i[(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x} - \phi]} + E_0^2 e^{-i[(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x} - \phi]} \\ = 2E_0^2 \{1 + \cos[(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x} - \phi]\}$$



$f(x, y)$







参照光

# 参照光がなければ

記録されるのは  $|F(k_x, k_y)|^2$

参照光があれば

$$|F(k_x, k_y) + E_R|^2$$

$$= |F(k_x, k_y)|^2 + |E_R|^2 + F(k_x, k_y)E_R^* + F^*(k_x, k_y)E_R$$

# 写真と変わらず2次元像(2次元情報) の記録なのに なぜ3次元像が再生されるのか？

フラウンホーファ回折    ⇔    フレネル回折    光学

スクリーンが十分遠方  
回折光が平面波とみなせる  
～フーリエ変換

スクリーンが近くて  
回折光が平面波でない  
フレネル変換

ヒント:フレネルレンズ  
3次元情報とは？



# 光子のエネルギーと運動量の間関係

$$E = \hbar\omega$$

$$p = \hbar k$$

$$E = pv \quad v = \frac{c}{n}$$

普通の粒子の運動量とエネルギーの関係

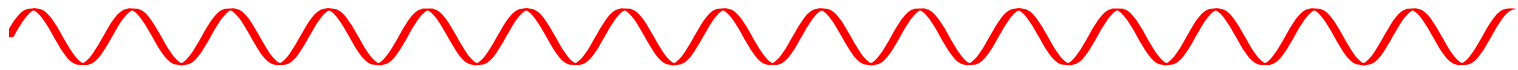
$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2}pv \quad p = mv$$

この違いはなぜか？

# 光子の運動量

$$p = \hbar k = \frac{h}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{h}{\lambda} \quad 1.33 \times 10^{-27} \text{ kg} \cdot \text{m/s} @ 500\text{nm}$$

光は圧力を持つ



鏡の上の50kgの人を持ち上げるには

$$490 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

=毎秒  $1.9 \times 10^{29}$  個の光子( $\because$  反射による運動量変化  $2p$ )

$$=7.6 \times 10^{10} \text{ W}$$

# 光の粒子性？

レーザー光の指向性（弾丸のように直進する）

光の圧力　光が運動量を持つこと

これらは光の粒子性を支持する現象といえるか？

# レーザー光の指向性

$d \sin\theta = \lambda$   $\theta \ll 1$  のとき

ビームの広がりの角  $\theta \sim \lambda/d$     order の評価

$\lambda = 500\text{nm} = 5 \times 10^{-4}\text{mm}$

$d = 1\text{mm}$     $\theta \sim 5 \times 10^{-4}\text{rad}$    10m で 5mm

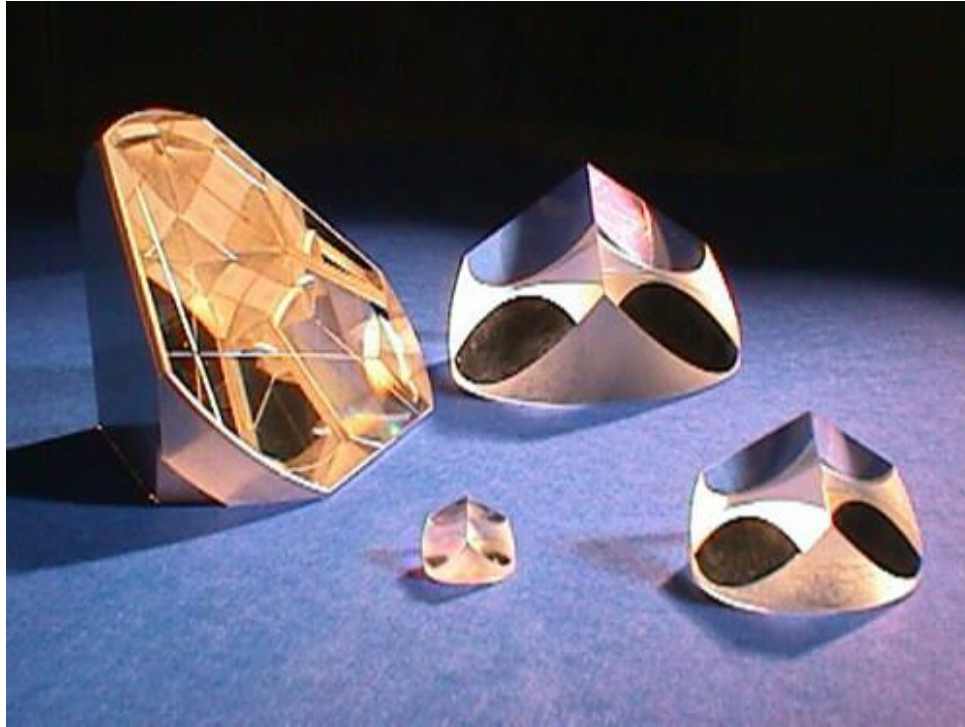
$d = 10\text{mm}$     $\theta \sim 5 \times 10^{-5}\text{rad}$    1000m で 50mm

$d = 100\text{mm}$     $\theta \sim 5 \times 10^{-6}\text{rad}$    100000m で 500mm

$d = 1000\text{mm}$     $\theta \sim 5 \times 10^{-7}\text{rad}$    10000000m で 5000mm

**月と地球**の間の**距離**は38万4400km、

**地球**の直径は1万2756km、**月**の直径は3474km



**Corner Cube Prisms (retroreflectors)**

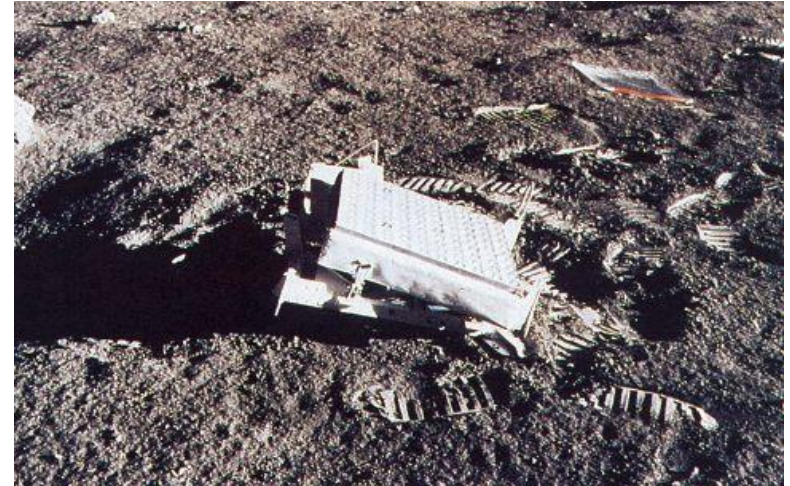
# Lunar Retroreflectors

Apollo 14

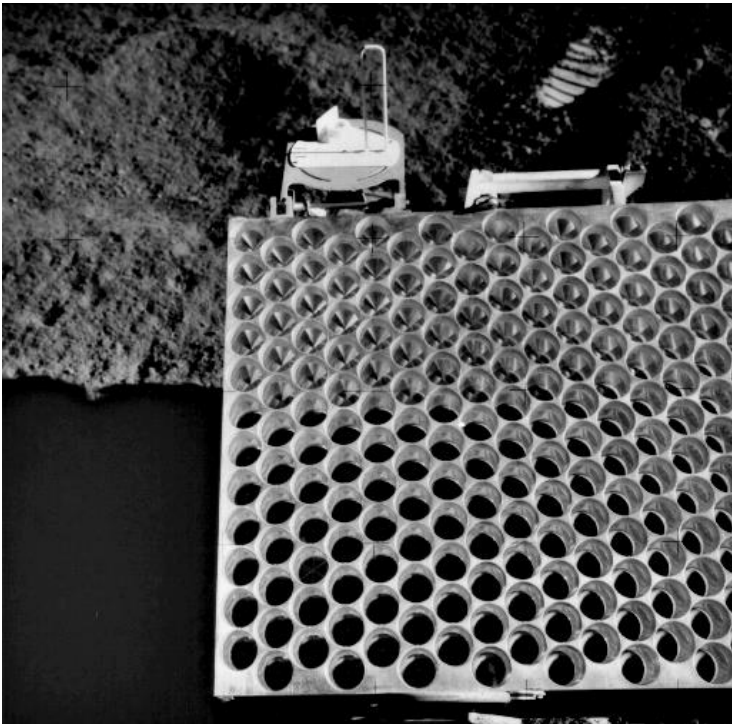
Apollo 11



The Apollo 11 retroreflector array, consisting of 100 corner-cube prisms in a  $10 \times 10$  array. Each corner cube is made of fused silica (quartz) and is 3.8 cm in diameter.



The Apollo 14 retroreflector array is very much like the Apollo 11 array in design: 100 3.8 cm reflectors in a  $10 \times 10$  square pattern.



Apollo 15

A close-up of the Apollo 15 array, which has 300 3.8 cm corner cubes in a hexagonal array.



Location of the reflector landing sites

# Laser Ranging Retroreflector

*The Laser Ranging Retroreflector experiment was deployed on Apollo 11, 14, and 15. It consists of a series of corner-cube reflectors, which are a special type of mirror with the property of always reflecting an incoming light beam back in the direction it came from. These reflectors can be illuminated by laser beams aimed through large telescopes on Earth. The reflected laser beam is also observed with the telescope, providing a measurement of the round-trip distance between Earth and the Moon. This is the only Apollo experiment that is still returning data from the Moon.*

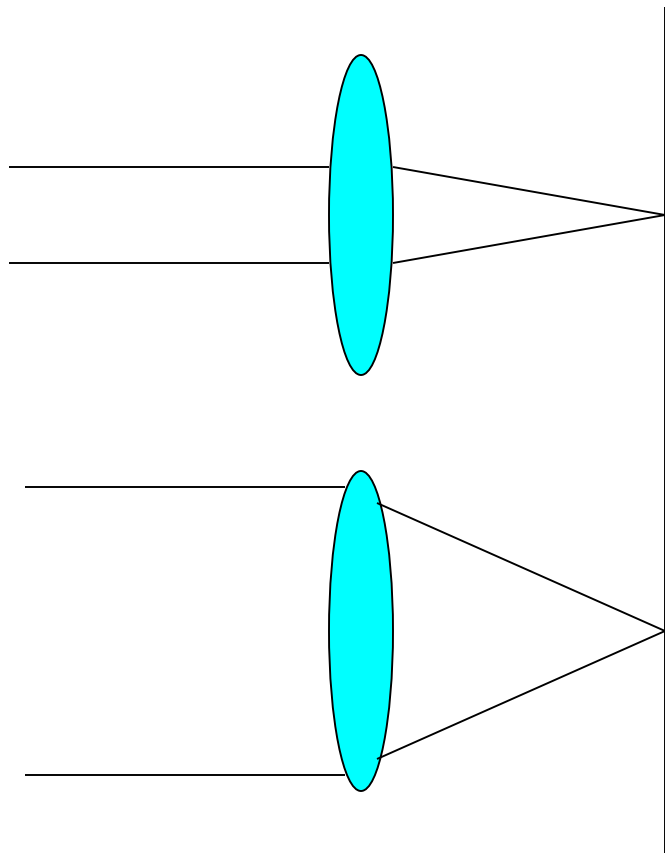
Laser beams are used because they remain tightly focused for large distances. Nevertheless, **there is enough dispersion of the beam that it is about 7 kilometers in diameter when it reaches the Moon and 20 kilometers in diameter when it returns to Earth.** Because of this very weak signal, observations are made for several hours at a time. By averaging the signal for this period, the distance to the Moon can be measured to an accuracy of about 3 centimeters (the average distance from the Earth to the Moon is about 385,000 kilometers).

The Laser Ranging Retroreflector experiment has produced many important measurements. These include an improved knowledge of the Moon's orbit and **the rate at which the Moon is receding from Earth (currently 3.8 centimeters per year)** and of variations in the rotation of the Moon.

These measurements have also improved our knowledge of changes of the Earth's rotation rate and the precession of its spin axis and have been used to test Einstein's theory of relativity.



# 光学顕微鏡の空間分解能(回折限界) どちらがスポット径が小さい？



空間コヒーレンスの良い単色レーザー光  
(理想的平面波)  
ビーム径が異なる

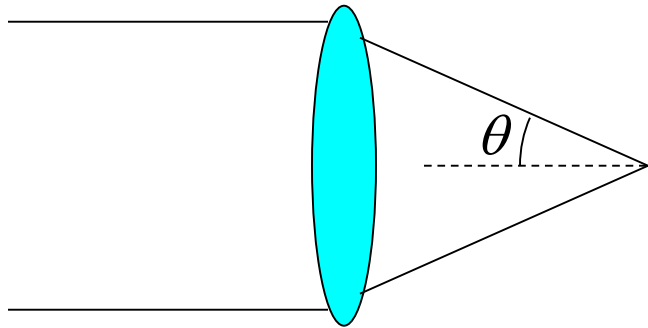
同じ焦点距離、  
収差のない理想的レンズ  
(顕微鏡対物レンズ)

# 空間分解能

$$\text{resolution} = A \frac{\lambda}{n \sin \theta} \quad A \sim 1 \quad \lambda: \text{光の波長}$$

$n$ : 媒質の屈折率 (油浸、水浸レンズ)

$n \sin \theta$ : 開口数 Numerical Aperture NA



対物レンズの分解能を決めるのは  
倍率ではなくNA

分解能が、光の波長、NAの逆数で制限されるのはなぜだろうか？

電子顕微鏡とは？ なぜ分解能が高いのか？

# 不思議なこと

光子は質量ゼロの素粒子(boson) スピン 1 or -1

光は真空中を $c = 3 \times 10^8 \text{m/s}$ で進む 宇宙の制限速度  
(1秒間に地球を7.5周できる速さ)

光速度 $c$ で走っている光子は歳をとらない  
(もし、宇宙誕生以来消えないで真空中を走り続けた  
光子がいたとしたら、その光子の年齢は0歳！)

アインシュタインの相対性理論

# 光子1個の明るさとは？

1cm<sup>2</sup>あたり光子数

10μm × 10μm

快晴の日の地上

10<sup>18</sup> /秒

10<sup>12</sup> /秒

満月の夜

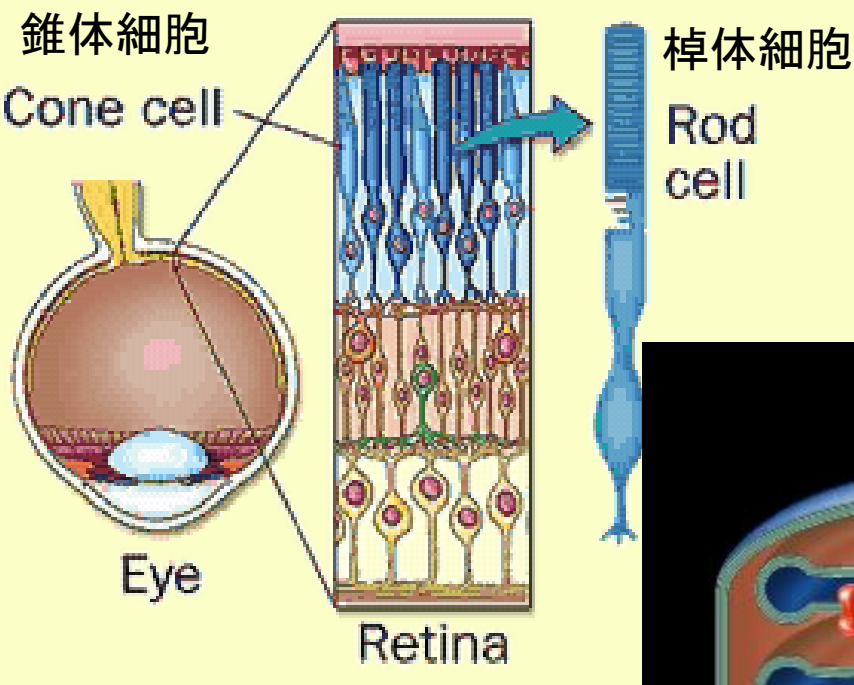
10<sup>12</sup> /秒

10<sup>6</sup> /秒

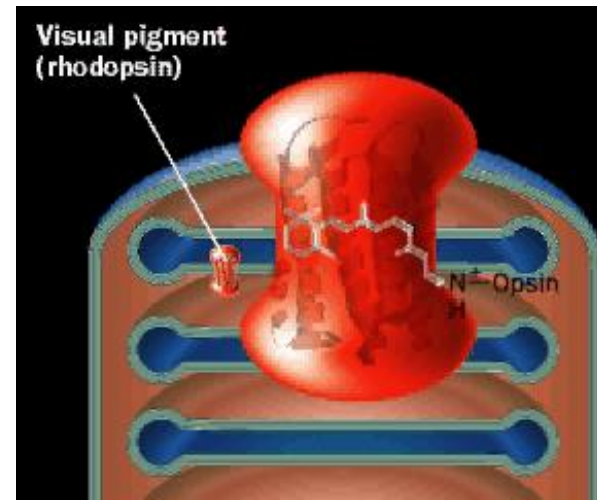
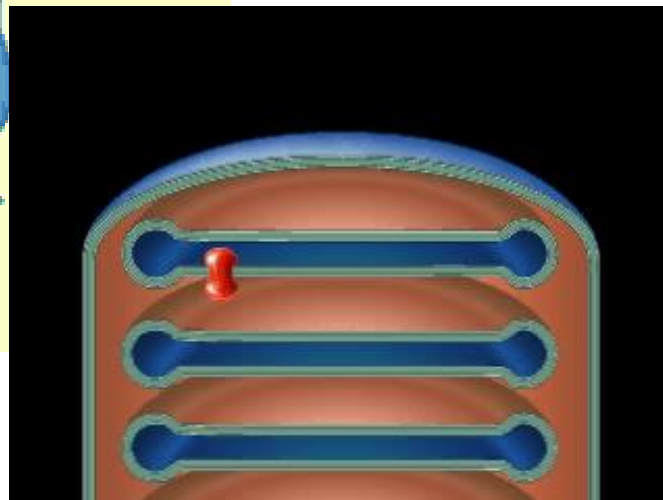
星明かりの下

10<sup>9</sup> /秒

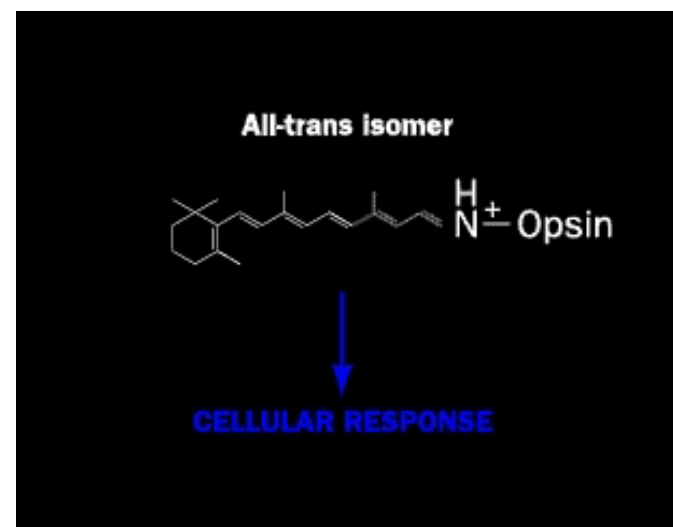
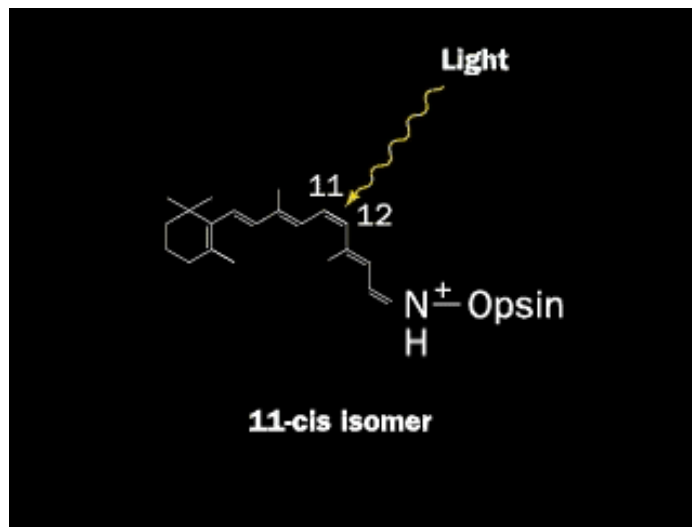
10<sup>3</sup> /秒



ロドプシン 蛋白質立体構造の  
 中にレチナール分子



レチナール  
 cis-trans異性化



終わり