対称空間上のベクトル束、等径関数とラドン変換

長友康行
九州大学大学院数理学研究院

1. Introduction

本稿の最初の目的はコンパクト型の対称空間上で組織的に等径関数を構成することにある。そのために、対称空間 G/K 上のベクトル束と切断を利用する。ベクトル束と切断を指定するために G の既約表現 W で、その主軌道が W 内の余次元 1 の球面となっているものを選ぶ。この表現を K に制限することにより、等質ベクトル束を得る。Frobenius の相互律により、W はこのベクトル束の切断のなす空間とみなせるので、W の元をひとつ固定して、ベクトル束の切断を得る。このとき、この切断の固定部分群として $H \subset G$ を得るが、仮定から G の H による商空間は球面となることに注意する。

G はコンパクトであるので、W の不変内積を利用して、指定された切断のノルムの 2 乗を関数 $f : G/K \to \mathbf{R}$ とみなす。f の零点集合は G/K の全測地的部分多様体となることが示される。

H の G/K への作用が余等質性 1 であるときには、f は等径関数となることがわかる。この場合、ベクトル束とその切断を利用した対称空間内の部分多様体の幾何学を構築し、ベクトル束の第 2 基本形式と切断が等径関数の正則等位面（等径超曲面）の形作用素と関係することを示す。その結果、等径超曲面の平均曲率や主曲率を求めることができる。平均曲率は統一的に記述されるが、主曲率の記述においては対称空間の個性が反映される。また、等径超曲面の族内にただ一つ極小超曲面が存在することがわかる。

余等質性が 1 より大きいときには、f は等径関数ではないことが示される。しかし、新たな関数を導入することによって $\mathbf{R}^k$ 値等径関数が得られる（k は作用の余等質性を表す）。さらに、新しい等径関数 $\tilde{f}$ を構成できる。この $\tilde{f}$ は f よりも大きな対称性を持つ。すなわち $H \subset \tilde{H} \subset G$ をみたす部分群 $\tilde{H}$ が存在し、$\tilde{H}$ は $\tilde{f}$ を不変にする。この $\tilde{f}$ と $\tilde{H}$ の出現を、W と関連した表現、ベクトル束とその切断を使って代数的、幾何学的に説明する。なお、副産物として、H-軌道は等焦点部分多様体ではないことも示される。

最後に、ラドン変換 $R : C^\infty(G/K) \to C^\infty(H\backslash G)$ を定義し、ここで得られた対称空間 G/K の等径関数のラドン変換を考察する。等径関数のラドン変換は球面上の等径関数となり、その等径超曲面の異なる主曲率の個数は H の G/K への作用の余等質性により異なる。余等質性が 1 であれば、得られた球面内の等径超曲面の相異なる主曲率の数は 2 となり、それ以外の場合には、4 となる。特に、尾関 - 竹内 [10] により得られた非等質な等径超曲面に対応する等径関数が得られる。

本研究は久留米高専の高橋正郎氏との共同研究 [8] である。

2. 準備

2.1. **等径関数.**

定義 2.1. リーマン多様体 (M,g) 上の $\mathbf{R}^k$ 値関数 $f : M \to \mathbf{R}^k$ が**等径関数**であるとは、$f=(f_1,\cdots,f_k)$ とおいたときに、

(1) $\langle df_i, df_j\rangle = F_{ij}(f_1,\cdots,f_k)$
(2) $\Delta f_i = G_i(f_1,\cdots,f_k)$

となる関数 $F_{ij}, G_i : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ が存在することである。

正則値に対する f の等位面は**等径部分多様体**といわれる。
球面上の等径関数の例を挙げる。球面上の等径超曲面の主曲率は定数であることが知られており、異なる主曲率の数を g とすれば、$g=1,2,3,4,6$ となる [5]。

例. $(g=2)$ S^{N-1} を $\mathbf{R}^N$ 内の単位球面とする。$(x_1,\cdots,x_N)$ を $\mathbf{R}^N$ の標準的な座標関数とする。このとき、

$$\frac{1}{N}\left\{q\sum_{i=1}^{p} x_i^2 - p\sum_{\alpha=1}^{q} x_\alpha^2\right\}$$

は等径関数である。ただし、$2 \leqq p \leqq N-2$, $p+q=N$ とする。等径超曲面は $S^{p-1}\times S^{q-1}$ と同一視される。

この例では等径超曲面は球面の等長変換群の軌道となっている。このような等径超曲面は等質であるといわれる。$g=1,2,3$ の場合には、等径超曲面はすべて等質であることが知られている。また、等質な等径超曲面は [3] の結果を利用することにより、高木 - 高橋により分類されている [11]。しかし、$g=4$ の場合には非等質な等径超曲面が存在する。
まず、野水による $g=4$ である等径関数の例を紹介する [9]。

例. S^{2N-1} を $\mathbf{C}^N$ $(N \geqq 3)$ 内の単位球面であるとする。$(x_1+iy_1,\cdots,x_N+iy_N)$ を $\mathbf{C}^N$ の標準的な座標関数とする。このとき、

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^2 + 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2$$

は等径関数である。この例でも等径超曲面は等質である。

非等質な等径超曲面の例は、尾関 - 竹内により発見された [10]。後に Ferus, Karcher と Münzner が組織的に非等質等径超曲面を構成した [1]。これらの等径関数は OT-FKM 型といわれる。

3. 関数の構成

(G,K) をコンパクト型の既約対称対であるとする。ただし、コンパクトリー群 G は単連結であり、その閉部分群 K は連結であるとする。コンパクト対称空間 G/K 上のベクトル束とその切断を利用して、以下のように関数を構成する。
まず、W を G 不変スカラー積をもつ、主軌道が余次元 1 の球面となる G の既約表現とする。このような表現は以下の表現に限る [2]。

● Table 3.1

G	$\mathrm{SU}(n)$	$\mathrm{Spin}(n)$	$\mathrm{Spin}(7)$	$\mathrm{Spin}(9)$	$\mathrm{Sp}(n)$
W	$\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^{n^*}$	$\mathbb{R}^n$	S_7	S_9	$\mathbb{C}^{2n} \cong \mathbb{C}^{2n^*}$

G	$\mathrm{Spin}(8)$	G_2
S_M	S_8^+, S_8^-	$\mathbf{R}^7$

この表において, S_n は $\mathrm{Spin}(n)$ のスピン表現であり、$S_n^{\pm}$ は $\mathrm{Spin}(n)$ の半スピン表現である。

次にその表現を部分群 K に制限して得られる K 表現を考え、W を K 既約表現に分解する。

$$W = U_0 \oplus V_0, \quad \dim U_0 = p, \dim V_0 = q.$$

（W 自身が K 既約表現となる場合も存在するが、このような場合は除く。）等質ベクトル束を $U := G \times_K U_0$, $V := G \times_K V_0$ とおく。Frobenius の相互律により、$W \subset \Gamma(U), \quad \Gamma(V)$ とみなせる。

このとき、$(V \to G/K, W)$ による誘導写像 [7]

$$i : G/K \to Gr_p(W), \quad i(gK) = gU_0 \subset W$$

が等長写像となるように G/K の計量 g を定める。ただし、$Gr_p(W)$ 上では W のスカラー積から導入される Fubini-Study 型のリーマン計量を考えることにする。すると、$i : G/K \to Gr_p(W)$ は全測地的部分多様体となる [7]。

さらに次の定理が成り立つ。ここで、$n = \dim G/K$ とする。

定理 3.1. W が G の実表現であれば、任意の $s \in W \subset \Gamma(U)$ と $t \in W \subset \Gamma(V)$ に対して、

$$\Delta s = \frac{n}{p} s, \quad \Delta t = \frac{n}{q} t$$

が成り立つ。

W が G の複素表現であれば、任意の $s \in W \subset \Gamma(U)$ と $t \in W \subset \Gamma(V)$ に対して、

$$\Delta s = \frac{n}{2p} s, \quad \Delta t = \frac{n}{2q} t$$

が成り立つ。

そこで、$w \in W$ ($|w| = 1$) に対応する $U \to G/K$, $V \to G/K$ の切断をそれぞれ、$s \in \Gamma(U)$, $t \in \Gamma(V)$ とおく。$w \in W$ の固定部分群を $H \subset G$ とおく。

関数 $|s|^2 : G/K \to \mathbf{R}$ が考察の対象である。

定理 3.1 から、次の結果が得られる。ここで、$N := \dim W$ である。

定理 3.2. W が G の実表現であれば、

$$\Delta |s|^2 = \frac{2nN}{pq} \left(|s|^2 - \frac{p}{N} \right),$$

が成り立つ。

W が G の複素表現であれば、

$$\Delta |s|^2 = \frac{nN}{pq} \left(|s|^2 - \frac{p}{N} \right),$$

が成り立つ。

したがって、関数 $|s|^2 : G/K \to \mathbf{R}$ は等径関数の定義内の条件 (2) を満たすことがわかる。しかし、一般には条件 (1) は満たされない。

4. 臨界部分多様体

G/K の二つの部分集合を以下のように定義する。

$$S_0 := \left\{x \in G/K \mid |s|^2 = 0\right\}, \quad S_M := \left\{x \in G/K \mid |s|^2 = 1\right\}$$

定理 4.1. (*cf.* [6]) 関数 $|s|^2 : G/K \to \mathbf{R}$ の臨界点のなす集合は $S_0 \cup S_M$ となる。S_0, S_M ともに H-軌道であり、G/K の全測地的部分多様体となる。また、$|s|^2 : G/K \to \mathbf{R}$ は *Morse-Bott* 関数である。

• Table 3.2

G/K	W	H	$U_0 \oplus V_0$	S_0, S_M
$\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO}(n)$	$\mathbf{C}^n$	$\mathrm{SU}(n-1)$	$\mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}^n$	$\mathrm{SU}(n-1)/\mathrm{SO}(n-1)$
$Gr_p(\mathbf{C}^n)$	$\mathbf{C}^n$	$\mathrm{SU}(n-1)$	$\mathbf{C}^p \oplus \mathbf{C}^q$	$Gr_p(\mathbf{C}^{n-1})$, $G_{p-1}(\mathbf{C}^{n-1})$
$Gr_p(\mathbf{R}^n)$	$\mathbf{R}^n$	$\mathrm{Spin}(n-1)$	$\mathbf{R}^p \oplus \mathbf{R}^q$	$Gr_p(\mathbf{R}^{n-1})$, $G_{p-1}(\mathbf{R}^{n-1})$
S^{n-1}	$\mathbf{R}^n$	$\mathrm{Spin}(n-1)$	$\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}^{n-1}$	S^{n-1}, 2points
$Gr_4(\mathbf{R}^7)$	S_7	G_2	$\mathbf{R}^4 \oplus \mathbf{R}^4$	$G_2/\mathrm{SO}(4)$, $G_2/\mathrm{SO}(4)$
$Gr_4(\mathbf{R}^8)$	$S_8^{\pm}$	$\mathrm{Spin}(7)$	$\mathbf{R}^4 \oplus \mathbf{R}^4$	$Gr_4(\mathbf{R}^7)$, $Gr_3(\mathbf{R}^7)$
$Gr_4(\mathbf{R}^9)$	S_9	$\mathrm{Spin}(7)$	$\mathbf{R}^8 \oplus \mathbf{R}^8$	$Gr_4(\mathbf{R}^7)$, $Gr_3(\mathbf{R}^7)$
$\mathrm{Sp}(n)/\mathrm{U}(n)$	$\mathbf{C}^{2n}$	$\mathrm{Sp}(n-1)$	$\mathbf{C}^n \oplus \mathbf{C}^{n^*}$	$\mathrm{Sp}(n-1)/\mathrm{U}(n-1)$
$Gr_p(\mathbf{H}^n)$	$\mathbf{H}^n$	$\mathrm{Sp}(n-1)$	$\mathbf{H}^p \oplus \mathbf{H}^q$	$Gr_p(\mathbf{H}^{n-1})$, $G_{p-1}(\mathbf{H}^{n-1})$
$G_2/\mathrm{SO}(4)$	$\mathbf{R}^7$	$\mathrm{SU}(3)$	$\mathbf{R}^4 \oplus \mathbf{R}^3$	$\mathrm{SU}(3)/\mathrm{SO}(3)$, $\mathbf{C}P^2$

5. 等径関数

補題 5.1. c を関数 $|s|^2 : G/K \to \mathbf{R}$ の正則値とする。以下の 3 つの場合を除いて、$S_c := \left(|s|^2\right)^{-1}(\{c\})$ も H-軌道となる。(したがって H の G/K への作用は余等質次元 1 の作用となる。)

$$(G/K, W) : (\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO}(n), \mathbf{C}^n), \quad \left(\mathrm{Sp}(n)/\mathrm{U}(n), \mathbf{C}^{2n}\right), \quad \left(Gr_4(\mathbf{R}^9), S_9\right).$$

それぞれの H 作用の主軌道の余次元は $2, 3, 2$ となる。

ここで、余等質次元が 1 である場合と他の場合を分けて考察することにする。

5.1. **余等質次元 $= 1$ の場合.**

補題 5.2. H の G/K への作用が余等質次元 1 の場合には、$|s|^2$ は等径関数となる。

$|s|^2$ の正則点において、S_c の単位法ベクトル $\mathbf{n}$ を

$$\mathbf{n} = \frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|}$$

と定める。また、切断 s, t とベクトル束の第 2 基本形式 I, J を利用して、G/K の接ベクトル束の準同型 $\tilde{I}$ と $\tilde{J}$ を次のように定める。

$$g(\tilde{I}X, Y) = \frac{1}{2}\left\{g_V\left(I_X s, I_Y s\right) + g_V\left(I_Y s, I_X s\right)\right\}$$

$$g(\tilde{J}X, Y) = \frac{1}{2}\left\{ g_U\left(J_X t, J_Y t\right) + g_U\left(J_Y t, J_X t\right)\right\}.$$

$\tilde{I}$ と $\tilde{J}$ は H 不変な対称作用素となる。

このとき、S_c の形作用素を $A_{\mathbf{n}}$ とおけば、

$$A_{\mathbf{n}} = \frac{2}{|df|}\left(\tilde{I} - \tilde{J}\right).$$

が成り立つ。$\tilde{I}$ と $\tilde{J}$ の固有空間分解および固有値は完全に決定できるので、S_c の平均曲率および主曲率を求めることができる。

定理 5.3. $\operatorname{grad}|s|^2$ のノルムは以下のようになる。

$$\left|\operatorname{grad}|s|^2\right| = \begin{cases} 2|s||t|\sqrt{\frac{n}{pq}}, & W: \text{実表現}, \\ |s||t|\sqrt{\frac{n}{pq}}, & W: \text{複素表現}. \end{cases}$$

定理 5.4. S_c の平均曲率 m は

$$m = \begin{cases} \frac{1}{|s||t|}\sqrt{\frac{n}{pq}}\left\{|s|^2(q-1) - |t|^2(p-1)\right\}, & W: \text{実表現}, \\ \frac{1}{2|s||t|}\sqrt{\frac{n}{pq}}\left\{|s|^2(2q-1) - |t|^2(2p-1)\right\}, & W: \text{複素表現} \end{cases}$$

となる。特にただひとつの $c \in (0,1)$ に対して、S_c は極小超曲面であることがわかる。

主曲率は統一的には記述されず、多様体と表現 W の個性が反映される結果となっている。なお、$|s|^2 = c$ であるが、切断を尊重し、$|s|$, $|t|$ を用いて主曲率を記述する。

定理 5.5. $\left(Gr_p(\mathbf{R}^N), \mathbf{R}^N\right)$ の場合、S_c の主曲率は

$$\frac{|s|}{|t|}, \quad -\frac{|t|}{|s|}, \quad 0,$$

となり、その重複度はそれぞれ $q-1$, $p-1$, $(p-1)(q-1)$ となる。

定理 5.6. $\left(Gr_p(\mathbf{C}^N), \mathbf{C}^N\right)$ の場合、S_c の主曲率は

$$\frac{1}{\sqrt{2}|s||t|}(|s|^2 - |t|^2), \quad \frac{|s|}{\sqrt{2}|t|}, \quad -\frac{|t|}{\sqrt{2}|s|}, \quad 0,$$

となり、その重複度はそれぞれ 1, $2(q-1)$, $2(p-1)$, $2(p-1)(q-1)$ となる。

定理 5.7. $\left(Gr_p(\mathbf{H}^N), \mathbf{H}^N\right)$ の場合、S_c の主曲率は

$$\frac{1}{2|s||t|}(|s|^2 - |t|^2), \quad \frac{|s|}{2|t|}, \quad -\frac{|t|}{2|s|}, \quad 0,$$

となり、その重複度はそれぞれ 3, $4(q-1)$, $4(p-1)$, $4(p-1)(q-1)$ となる。

定理 5.8. $(Gr_4(\mathbf{R}^7), S_7)$ の場合、S_c の主曲率は

$$\frac{\sqrt{3}}{12}\frac{1}{|s||t|}\left\{3(|s|^2 - |t|^2) \pm \sqrt{9 - 4|s|^2|t|^2}\right\}, \quad 0,$$

となり、その重複度はそれぞれ 3, 3, 5 となる。

定理 5.9. $(G_2/\mathrm{SO}(4), \mathbf{R}^7)$ の場合、S_c の主曲率は

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{|s||t|}\left\{(|s|^2-|t|^2)\pm\sqrt{1-|s|^2|t|^2}\right\},\quad -\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{|t|}{|s|},\quad 0,$$

となり、その重複度はそれぞれ $2,\ 2,\ 1,\ 2$ となる。

なお、ここで、

$$\tilde{f}=|s|^2-\frac{p}{N}$$

と定義する。このとき、$\tilde{f}$ は固有関数となる。もちろん、等径関数である。

5.2. **余等質次元 >1 の場合.** 例外的な 3 つの場合には、$|s|^2$ は等径関数ではないことが示される。しかし、さらに関数を定義することによって、$\mathbf{R}^k$ 値等径関数を構成できる（k はそれぞれの余等質次元を表す）。なお、これらの場合、主軌道は等焦点部分多様体ではないことも示すことができる。

- $(\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO}(n), \mathbf{C}^n)$ $(n \geqq 3)$

補題 5.10. $\mathbf{R}^2$ に値をとる関数 F を以下のように定義する。

$$F:=\left(|s|^2-|t|^2, 2g_U(s,t)\right).$$

このとき、F は等径関数となる。

さらに $\tilde{f}=|F|^2=(|s|^2-|t|^2)^2+4g_U(s,t)^2$ と定める。

定理 5.11. $\tilde{f}$ は対称空間 $\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO}(n)$ 上の等径関数となる。

$w\in W$ と $\tilde{f}$ の関係を説明する。h を $W\cong\mathbf{C}^n$ の不変エルミート積とすれば、$\tilde{w}:=iw\otimes h(\cdot,w)-\frac{i}{n}I_n\in W\otimes W^*$ は $\mathfrak{su}(n)$ の元とみなせる。すると $\mathfrak{su}(n)$ の標準分解 $\mathfrak{su}(n)=\mathfrak{so}(n)\oplus\mathfrak{m}$ に応じて、$\tilde{w}$ はホロノミー束 $\mathrm{SU}(n)\times_{\mathrm{SO}(n)}\mathfrak{so}(n)$ の切断 $\tilde{s}$ を誘導する。このとき、

$$2|\tilde{s}|^2=4\left(|s|^2|t|^2-g_U(s,t)^2\right)=1-\left\{\left(|s|^2-|t|^2\right)^2+4g_U(s,t)^2\right\}=1-\tilde{f}$$

が成り立つ。$\tilde{w}$ は $\tilde{H}:=S(U(1)\times U(n-1))$ の作用で不変であるので、次の結果が成り立つ。

補題 5.12. 等径関数 $\tilde{f}$ は $\tilde{H}$ の作用の下で不変である。

$\tilde{H}$ の $\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO}(n)$ への作用は余等質性 1 である。

補題 5.13. $\tilde{f}$ の臨界点の集合は $\tilde{f}^{-1}(0)$ と $\tilde{f}^{-1}(1)$ からなる。

補題 5.14. $F^{-1}(0)$ は $\tilde{f}^{-1}(0)$ と一致し、$\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO}(n)$ の極小部分多様体となる。

定理 5.15. $\tilde{f}^{-1}(1)$ は $\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO}(n)$ の全測地的部分多様体となる。

- $(\mathrm{Sp}(n)/\mathrm{U}(n), \mathbf{C}^n)$

補題 5.16. $\mathbf{R}^3$ に値をとる関数 F を以下のように定義する。

$$F := \left(|s|^2 - |t|^2, 2(s,t)\right).$$

このとき、F は等径関数となる。ただし、(s,t) は $U \to \mathrm{Sp}(n)/\mathrm{U}(n)$ と $V \to \mathrm{Sp}(n)/\mathrm{U}(n)$ との双対関係を利用した $\mathbf{C}$ 値関数である。

さらに $\tilde{f} = |F|^2 = (|s|^2 - |t|^2)^2 + 4\,|(s,t)|^2$ と定める。

定理 5.17. $\tilde{f}$ は対称空間 $\mathrm{Sp}(n)/\mathrm{U}(n)$ 上の等径関数となる。

$w \in W$ と $\tilde{f}$ の関係を説明する。ω を $W \cong \mathbf{C}^{2n}$ の不変シンプレクティック形式とする。$\mathrm{Sp}(n)$ 既約分解 $\wedge^2\mathbf{C}^{2n} = \wedge_0^2\mathbf{C}^{2n} \oplus \mathbf{C}\omega$ を考え、$w \wedge jw \in \wedge^2\mathbf{C}^{2n}$ の $\wedge_0^2\mathbf{C}^{2n}$ 成分を $\tilde{w}$ とおく。$\mathrm{U}(n)$ 表現として、$\wedge_0^2\mathbf{C}^{2n} = \wedge^2\mathbf{C}^n \oplus \wedge^2\mathbf{C}^{n^*} \oplus \mathfrak{su}(n)^{\mathbf{C}}$ と既約分解されるので、$\tilde{w}$ が実構造で不変であることを考慮すれば、$\tilde{w}$ はベクトル束 $\mathrm{Sp}(n) \times_{\mathrm{U}(n)} \left(\wedge^2\mathbf{C}^n \oplus \wedge^2\mathbf{C}^{n^*}\right)^{\mathbf{R}}$ の切断 $\tilde{s}$ を誘導する。このとき、

$$2|\tilde{s}|^2 = 4\left(|s|^2|t|^2 - |(s,t)|^2\right) = 1 - \left\{\left(|s|^2 - |t|^2\right)^2 + 4|(s,t)|^2\right\} = 1 - \tilde{f}$$

が成り立つ。$w \wedge jw$ は $\tilde{H} := \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n-1)$ で不変であるので、次の結果が成立する。

補題 5.18. 等径関数 $\tilde{f}$ は $\tilde{H}$ の作用の下で不変である。

注意. $\mathrm{Sp}(n)/\mathrm{U}(n)$ はエルミート対称空間なので、$\tilde{H}$ の部分群 $\mathrm{Sp}(1)$ 作用に対する運動量写像 $\mu : \mathrm{Sp}(n)/\mathrm{U}(n) \to \mathfrak{sp}(1)$ を考えることができる。この運動量写像が等径関数 F である。

$\tilde{H}$ の $\mathrm{Sp}(n)/\mathrm{U}(n)$ への作用は余等質性 1 である。

補題 5.19. $\tilde{f}$ の臨界点の集合は $\tilde{f}^{-1}(0)$ と $\tilde{f}^{-1}(1)$ からなる。

補題 5.20. $F^{-1}(0)$ は $\tilde{f}^{-1}(0)$ と一致し、$\mathrm{Sp}(n)/\mathrm{U}(n)$ の極小部分多様体となる。

定理 5.21. $\tilde{f}^{-1}(1)$ は $\mathrm{Sp}(n)/\mathrm{U}(n)$ の全測地的部分多様体となる。

- $(Gr_4(\mathbf{R}^9), S_9)$

まずスピン表現 S_9 の 2 次の対称積 S^2S_9 の既約分解を考える。

$$S^2S_9 = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}^9 \oplus \wedge^4\mathbf{R}^9.$$

$\Pi : S^2S_9 \to \mathbf{R}^9$ を直交射影とすれば、$\mathrm{Spin}(9)$ 同変写像 $\alpha : S_9 \to \mathbf{R}^9$ を

$$\alpha(w) = \Pi(w \otimes w)$$

と定義することができる。

また、$\mathrm{Spin}(4) \times \mathrm{Spin}(5)$ 表現空間として、$U_0 = S_4^+ \otimes S_5$, $V_0 = S_4^- \otimes S_5$ なので, 既約分解

$$U_0 \otimes V_0 = \mathbf{R}^4 \otimes \left(\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}^5 \oplus \mathfrak{so}(5)\right)$$

を得る。そこで、直交射影 $\pi_0 : U_0 \otimes V_0 \to \mathbf{R}^4$ を利用して、同語反復束 $S \to Gr_4(\mathbf{R}^9)$ の切断 $\pi_0(s \otimes t)$ を得る。

このとき、$\alpha(w)$ の誘導する切断が $\pi_0(s \otimes t)$ であることがわかる。これは $\mathbf{R}^9$ の元が誘導する同語反復束 $S \to Gr_4(\mathbf{R}^9)$ の切断であるから、$(Gr_4(\mathbf{R}^9), \mathbf{R}^9)$ の場合に帰着され、次の結果を得る。

定理 5.22. $\tilde{f} := |\pi_0(s \otimes t)|^2$ は $\tilde{H} := \mathrm{Spin}(8)$ の作用で不変な等径関数である。

なお、この場合も $\mathbf{R}^2$ 値等径関数を得る。

補題 5.23. $\mathbf{R}^2$ に値をとる関数 F を以下のように定義する。

$$F := \left(|s|^2 - |t|^2, \tilde{f}\right).$$

このとき、F は等径関数となる。

補題 5.24. $F^{-1}\left(0, \frac{1}{8}\right) = \tilde{f}^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)$ は $Gr_4(\mathbf{R}^9)$ の全測地的部分多様体となる。

注意. $F^{-1}\left(0, \frac{1}{8}\right) = \tilde{f}^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)$ から、次のよく知られた等質空間としての表示を得る。

$$\mathrm{Spin}(7)/\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1) \cong Gr_3(\mathbf{R}^8).$$

6. ラドン変換

最後に二つのファイブレーション $\pi_1 : G \to H\backslash G, \pi_2 : G \to G/K$ を利用して、**ラドン変換** $R : C^\infty(G/K) \to C^\infty(H\backslash G)$ を以下のように定義する。すなわち、$f \in C^\infty(G/K)$ に対して、H の正規化された Haar 測度 $d\mu$ を利用して、$R(f) \in C^\infty(H\backslash G)$ を

$$R(f)(x) = \int_{\pi_1^{-1}(\{x\})} \pi_2^* f d\mu$$

と定義する。

定理 6.1. H の G/K への作用が余等質次元 1 の場合には、$|s|^2$ のラドン変換は球面 $S^{N-1} \subset W$ 上の主曲率が 2 種類の等径関数となる。

実際に、W が実表現であるときには、

$$g^{-1}w = x_1e_1 + \cdots + x_Ne_N$$

という座標を用意すると、

$$R(\tilde{f}) = \frac{1}{N}\left\{q\sum_{i=1}^{p} x_i^2 - p\sum_{\alpha=1}^{q} x_\alpha^2\right\}$$

となる。

定理 6.2. $\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO}(n)$ $(n \geqq 3)$ 上の等径関数 $\tilde{f}$ のラドン変換は、野水により定義された $\mathbf{C}^n$ の単位球面上の等径関数となる。

定理 6.3. $\mathrm{Sp}(n)/\mathrm{U}(n)$ 上の等径関数 $\tilde{f}$ のラドン変換は球面 $S^{4n-1} \subset \mathbf{C}^{2n}$ 上の主曲率が 4 種類の等径関数となる。

ここまでの例では、ラドン変換で得られた等径関数は球面内の等質な等径超曲面に対応する等径関数であるが、$(Gr_4(\mathbf{R}^9), S_9)$ の場合には非等質な等径超曲面に対応する等径関数が得られる。この結果は [1], [10] を参照することにより示され、尾関 - 竹内により得られた等径関数であることがわかる。

定理 6.4. $Gr_4(\mathbf{R}^9)$ 上の等径関数 $\tilde{f}$ のラドン変換は、スピン表現 S_9 内の単位球面 S^{15} 上の主曲率が 4 種類の等径関数となる。この等径超曲面は等質ではない。

References

[1] D.Ferus, H.Karcher and H.-F.Münzner, *Cliffordalgebren und neue isoparametrische Hyperflächen*, Math. Z. **177** (1981), 479-502

[2] W.C Hsiang and W.Y. Hsiang, *Differential actions of compact connected classical groups: II*, Ann. of Math. **92** (1970), 189–223

[3] W.Y.Hsiang and H.B.Lawson, *Minimal Submanifolds of Low Cohomogeneity*, J. Diff. Geom. **5** (1971), 1–38

[4] S.Kobayashi, "Differential Geometry of Complex Vector Bundles", Iwanami Shoten and Princeton University Press, Tokyo (1987)

[5] H.F.Münzner, *Isoparametrische Hyperflächen in Sphären. I*, Math.Ann. **251** (1980), 57–71

[6] Y.Nagatomo, *Twistor sections on the Wolf spaces*, Trans. A.M.S, **360**, (2008), 4497-4517

[7] Y.Nagatomo, *Harmonic maps into Grassmannian manifolds*, a preprint

[8] Y.Nagatomo and M.Takahashi, Vector bundles, isoparametric functions and Radon transforms on symmetric spaces, a preprint

[9] K.Nomizu, *Some Results in E.Cartan's Theory of Isoparametric Families of Hypersurfaces*, Bull.A.M.S. **79** (1973), 1184–1188

[10] H.Ozeki and M.Takeuchi, *On some types isoparametric hypersurfaces in spheres. I*, Tôhoku Math.J. **27** (1975), 515-559

[11] R.Takagi and T.Takahashi, *On the principal curvatures of homogeneous hypersurfaces in a sphere*, Differential Geometry, in Honor of K.Yano, Kinokuniya, Tokyo (1972), 468-481

819-0395 福岡市西区元岡 744

E-mail address: nagatomo@math.kyushu-u.ac.jp