Visible actions on multiplicity-free spaces *

笹木 集夢 (Atsumu SASAKI)
早稲田大学理工学術院 基幹理工学部数学科

1 Introduction

V を $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，$G_{\mathbb{C}}$ を連結な複素簡約リー群とする．正則表現 $\varpi : G_{\mathbb{C}} \to GL_{\mathbb{C}}(V)$ を与える．このとき，V 上の多項式環 $\mathbb{C}[V]$ 上に $G_{\mathbb{C}}$ の表現 π が

$$[\pi(g)f](v) = f(\varpi(g)^{-1}v) \ (g \in G_{\mathbb{C}}, v \in V, f \in \mathbb{C}[V])$$

によって定義される．この表現 π が無重複表現であるとき，V を $G_{\mathbb{C}}$ の**無重複空間**という．簡単のために，これを $(G_{\mathbb{C}}, V)$ と表すことにする．無重複空間の分類は，V への作用が既約なとき (既約な無重複空間) は Kac [8] によって，既約ではないとき (可約な無重複空間) は Benson–Ratcliff [1] と Leahy [14] によって独立に与えられた．また，表現 π の既約分解や不変式の研究が，Howe, 梅田, Benson–Ratcliff, Knop などによって行われている ([1, 2, 6, 9] など).

本記録集では，無重複空間を複素幾何における**強可視的作用** (定義 2.1 参照) の立場から捉えることができることについて解説する．$(G_{\mathbb{C}}, V)$ を無重複空間とし，G_u を $G_{\mathbb{C}}$ の極大コンパクト部分群とする．このとき，次の定理が成り立つ．

定理 1.1 ([15, 16]). 次の 2 条件は同値である．

(MF) (表現論) $(G_{\mathbb{C}}, V)$ は無重複空間である．

(SV) (複素幾何) G_u の V における作用は強可視的である．

§2 で強可視的作用の定義および無重複表現との関連を説明した後，§3 で定理 1.1 の解説を行う．

さて，コンパクト群 G_u は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 V に正則表現 ϖ として作用する．特に，この作用は正則である．さらに，V に G_u-不変なケーラー計量を入れることによって，等長的 (リーマン幾何) でかつシンプレクティック自己同型 (シンプレクティック幾何) として作用する．リーマン幾何には **polar 作用**という概念があり (§2.3 参照)，シンプレクティック幾何には **coisotropic 作用**という概念が知られている (§2.2 参照)．よって，コンパクト群 G_u の V への作用において，

(Po) (リーマン幾何) G_u の V における作用は polar である．

(Co) (シンプレクティック幾何) G_u の V における作用は coisotropic である．

*研究集会「部分多様体幾何とリー群作用」(東京理科大学森戸記念館：2009 年 9 月 7 日–8 日) の記録集.

および (SV) の 3 つの異なる概念を比較することができる[1]．定理 1.1 およびこれまでの研究結果を合わせると次の系を得る．

系 1.2 ([7, 11, 15, 16])**.** $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 V における連結な複素簡約リー群 $G_{\mathbb{C}}$ の正則表現に対して，

(1) 3 つの概念 (MF), (SV), (Co) は互いに同値である．

(2) (Po) は他の 3 つよりも真に強い概念である．

§2 で強可視的作用，coisotropic 作用，polar 作用の定義を復習し，これまでに知られている事実を紹介した後，系 1.2 に関連する事実を紹介する．

なお，本記録集に関する内容は，論文 [15, 16] に詳細を述べた．また，日本語での解説 [17] も参考にしていただきたい．

2 Preliminaries

2.1 複素多様体における強可視的作用と無重複表現

まず，本記録集で用いる強可視的作用の概念について説明しよう．(強) 可視的作用は小林俊行氏によって導入された ([10])．

定義 2.1 ([11, Definition 3.3.1])**.** 連結な複素多様体 D におけるリー群 H の正則な作用に対して，次の 2 条件を満たす D の実部分多様体 S と D 上の反正則微分同相 σ が存在するとき，この作用を**強可視的**であるという：

$$D' := H \cdot S \text{ は } D \text{ の開集合,} \tag{V.1}$$

$$\sigma|_S = \mathrm{id}_S, \tag{S.1}$$

$$\sigma \text{ は } D' \text{ 内の各 } H\text{-軌道を保存する.} \tag{S.2}$$

このとき，上の S を**スライス**という．スライスは自動的に全実部分多様体になる，つまり $T_xS \cap J_x(T_xS) = \{0\}$ が任意の $x \in S$ に対して成り立つ ([11, Remark 3.3.2])．ただし，J は複素多様体 D の複素構造を表す．

なお，リー群 H の連結な複素多様体 D における作用が**可視的**であるとは，(V.1) を満たす D の全実部分多様体 S が存在して，任意の $x \in S$ に対して $J_x(T_xS) \subset T_x(H \cdot x)$ を満たすときをいう ([10, Definition 2.3])．強可視的作用は可視的であることが知られている ([11, Theorem 4])．

例 2.2. 1 次元トーラス $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ の $\mathbb{C}$ への標準的な作用は強可視的である．

複素平面において，この作用による各軌道は原点を中心とする円か原点自身である．特に，$\mathbb{T} \backslash \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}_+ \sqcup \{0\}$ である．よって，$S = \mathbb{R}_+$ とおくと，$\mathbb{T} \cdot S = \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} - \{0\}$ となりこれは $\mathbb{C}$ の開集合である．また，$\sigma(z) := \overline{z}$ ($z \in \mathbb{C}^\times$) とおくと明らかに $\sigma|_S = \mathrm{id}_S$ を満たし，さらに $\sigma(tr) = \bar{t}r$ ($\forall t \in \mathbb{T}$, $\forall r > 0$) が成り立つ．ゆえに，σ は各 $\mathbb{T}$-軌道を保存する．

[1] [11, Section 4] では，ケーラー多様体 M においてこれら 3 つの概念の関係を明らかにしている．

例 2.3. $\mathcal{H}$ を複素上半平面とする．特殊線型群 $G = SL(2,\mathbb{R})$ は $\mathcal{H}$ に 1 次分数変換として作用する[2]．リー群 $SL(2,\mathbb{R})$ は複素リー群ではないが，$\mathcal{H}$ への作用は正則であることに注意する．

この作用を部分群 $K = SO(2)$ に制限したものを考えると，それは強可視的である．実際に，$SO(2)$-軌道は複素平面内で虚軸に中心をもつ円か，単一軌道 $\{\sqrt{-1}\}$ である．よって，$S := \{\sqrt{-1}r : 0 < r < 1\}$, $\sigma(z) := -\overline{z}$ $(x \in \mathcal{H})$ とすればよい[3].

複素上半平面 $\mathcal{H}$ は対称空間 $G/K = SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$ と複素多様体として同型である．この例において，特に $\mathcal{H} = K \cdot \sqrt{-1}\mathbb{R}$ と分解されることより，$G/K = K \cdot (AK/K)$ と分解される．このことは G のカルタン分解 $G = KAK$ を複素多様体への群作用による軌道分解の観点から捉えたことに他ならない．

連結な複素多様体 D 上の H-同変な正則ベクトル束 $\mathcal{V} \to D$ において，底空間 D への作用がスライス S をもつ強可視的作用であるとき，ファイバー $\mathcal{V}_x$ $(\forall x \in S)$ 上の等方部分群 H_x のユニタリ表現の無重複性が，正則な切断全体の空間 $\mathcal{O}(D,\mathcal{V})$ 上の H の連続表現に伝播することが示された (**無重複性の伝播定理**，[11, 12]) [4]．無重複表現とは，表現を既約分解した際に各既約成分が高々1 回しか現れない表現のことをいう．古典的によく知られているフーリエ変換，テーラー展開をはじめ，球面調和関数などはある無重複表現の既約分解と解釈できる例である．逆に，新たな無重複表現を発見することはフーリエ変換のような‘よい’表現空間を発見することにつながる．

一方で，これまでに発見された強可視的作用の例の多くは，その証明にカルタン分解や岩澤分解などの古典的な分解定理や軌道分解定理が用いられ，スライスを記述する鍵となった ([11, 13, 15]，例 2.3 参照)．逆に，強可視的作用自身の研究はこれらの概念の一般的な拡張につながるものと期待される．講演者はこれらを研究の動機として，強可視的作用のもつ幾何構造について研究を，スライスの観点から行い，またスライスの構成に関する一般論の構築を目指している．

2.2 シンプレクティック多様体における coisotropic 作用

次に，シンプレクティック幾何における coisotropic 作用について簡単に紹介しよう．

(M,ω) をシンプレクティック多様体とする．M の部分多様体 N が任意の $x \in N$ に対して $(T_xN)^{\perp\omega} \subset T_xN$ を満たすとき，部分多様体 N を coisotropic であるという．ただし，$(T_xN)^{\perp\omega} := \{X \in T_xM : \omega(X,Y) = 0\ (\forall Y \in T_xN)\}$ である．

コンパクトリー群 K が M にシンプレクティック自己同型として作用しているとする．主軌道が M の coisotropic な部分多様体であるとき，この作用を coisotropic であるという (Guillemin–Sternberg [5], Huckleberry–Wurzbacher [7])．

[2] この作用は線型ではない．

[3] 複素上半平面 $\mathcal{H}$ はポアンカレ円板 $\{z \in \mathbb{Z} : |z| < 1\}$ と微分同相である．$SL(2,\mathbb{R})$ はポアンカレ円板に 1 次分数変換で作用する．[11, Example 5.4.1] ([13, Example 1.4]) では $SO(2)$ のポアンカレ円板における作用に関する軌道の様子が示されている．

[4] 例 2.2 で述べた強可視的作用から，$\mathbb{T}$ 上の 2 乗可積分関数全体のなすヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{T})$ が $\mathbb{T}$ の正則表現として無重複表現であることが説明できる．実際に，フーリエ級数展開 $L^2(\mathbb{T}) \simeq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}e^{\sqrt{-1}nx}$, $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{\sqrt{-1}nx}$ はこの正則表現の既約分解と解釈することができ，各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して調和振動子 $e^{\sqrt{-1}nx}$ に対する係数 $\widehat{f}(n)$ がただ 1 つに決まるという点で無重複表現であることが分かる．

M 上の正則関数全体の空間を $\mathcal{O}(M)$ で表すとき，$\mathcal{O}(M)$ 上に K の表現が自然に定まる．このとき，Huckleberry–Wurzbacher は次を証明した：

事実 2.4 ([7, §7])**.** K の M への作用が coisotropic であるとき，$\mathcal{O}(M)$ 上に自然に定義される K の表現は無重複である．

2.3　リーマン多様体における polar 作用

(M, g) をリーマン多様体とし，コンパクトリー群 K が M に等長に作用しているとする．M に固有に埋め込まれた部分多様体 S が $M = K \cdot S$ かつ $T_xS \perp T_x(K \cdot x)$ $(\forall x \in S)$ を満たすとき，この作用を polar であるという (Palais, Podestà, Thorbergsson, Dadok, Heintze など)．また，この S をスライスという．

Dadok は [4] において，M が $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $W_\mathbb{R}$ の場合に polar に作用する $(K, W_\mathbb{R})$ の分類を行った．

事実 2.5 ([4])**.** $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $W_\mathbb{R}$ への K の作用が polar であるための必要十分条件は，ある対称空間 G/G_u が存在して，次のいずれかを満たす：

(a) K は G_u と局所同型で G/K に対する等方表現と K の $W_\mathbb{R}$ への作用が同型である．

(b) K は G_u の部分群で G/K に対する等方表現の K への制限による軌道が，K の $W_\mathbb{R}$ への作用による軌道と一致する[5]．

これより，K の作用が polar ならば，部分多様体 S はベクトル空間である[6]．また，K の $W_\mathbb{R}$ への作用が既約でないときは polar ではないことも分かる．

2.4　系 1.2 について

これまでに述べた事実から，我々の設定で明らかになったことをまとめておこう．

まず，$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間はケーラー構造をもつので，事実 2.4 によって (Co) $\Rightarrow$ (MF) が成り立つことが分かる．次に，事実 2.5 から，(Po) は (MF) よりも真に強い条件であることが分かる[7]．

さらに，coisotropic 作用と強可視的作用には次のような関係が成り立つことが知られている．

事実 2.6 (cf. [11, Theorem 7])**.** 連結なケーラー多様体 M にコンパクトリー群 K が正則かつ等長に作用しているとする．この作用が強可視的作用ならば，それは coisotropic である．

上の事実は (SV) $\Rightarrow$ (Co) が成り立つことを示している．

以上より，定理 1.1 が示されれば系 1.2 が証明されたことなる．

---

[5] 例えば，$Spin(7)$ の $\mathbb{R}^8$ への作用は，対称空間 $SO(8,1)/SO(8)$ に対する $SO(8)$ の等方表現を $Spin(7)$ に制限したものと同一視される．$SO(8)$ の作用における軌道空間は $Spin(7)$ のそれと一致する．例 3.3 も参照．

[6] Polar 作用におけるスライス S が平坦であるとき，hyperpolar という．$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間の場合，polar 作用は常に hyperpolar である．

[7] $n \geq 2$ のとき $(GL(3,\mathbb{C}) \times Sp(n,\mathbb{C}), \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^{2n})$ は (既約な) 無重複空間であるが，$U(3) \times Sp(n)$ の $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^{2n}$ への作用は polar ではない (例 3.2 参照)．一方で，(Po) $\Rightarrow$ (MF) は成り立つ．

3 Proof of our main theorem

この章では，定理 1.1 の証明の概略について述べる．$G_{\mathbb{C}}$ を連結な複素簡約リー群とし，V を $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間とする．V 上に $G_{\mathbb{C}}$ の正則表現 ϖ を与える．

3.1 (SV) ⇒ (MF) について

(SV) ⇒ (MF) は無重複性の伝播定理の特別な場合である ([11, 12] 参照)．$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 V に連結な複素簡約リー群 $G_{\mathbb{C}}$ の極大コンパクト部分群 G_u が強可視的に作用しスライス S をもつと仮定する．$\mathcal{V} := V \times \mathbb{C} \to V$ の正則な切断の空間 $\mathcal{O}(V, \mathcal{V})$ は V 上の正則関数全体の空間 $\mathcal{O}(V)$ と同一視される．ファイバーは 1 次元なので，ファイバー上の表現は既約である．よって無重複性の伝播定理より，$\mathcal{O}(V)$ 上の G_u の表現は無重複である．V 上の多項式環 $\mathbb{C}[V]$ は $\mathcal{O}(V)$ の稠密な部分集合である．特に $\mathbb{C}[V]$ は G_u の無重複表現である．

3.2 (MF) ⇒ (SV) について

(MF) ⇒ (SV) は具体的にスライス S と反正則微分同相 σ を求めることで証明を与える．一方で，無重複性の伝播定理の対偶によって，(MF) ⇒ (SV) の証明は無重複空間の分類に対して行えばよい．既約な無重複空間は 14 種類 (無限系列 9 種類，散在型 5 種類)，可約な無重複空間は 12 種類 (無限系列 11 種類，散在型 1 種類) に分類されている．[15, 16] ではスライスの構成法の観点から，既約な無重複空間を 3 つの型に，可約な無重複空間を 2 つの型に分けている．

本報告集では無重複空間を既約な場合のみを扱うことにし，スライスの構成法を具体例を通して見ることにする．

3.2.1 Type 1

まずは，K の V への作用がエルミート対称空間の等方表現として実現できる場合を考えよう．

例 3.1 ([15, §3])**.** 既約な無重複空間 $(G_{\mathbb{C}}, V)$ の中で，極大コンパクト部分群 G_u の作用がある既約な非コンパクトエルミート対称空間 G/G_u の等方表現と表現同値なものが存在する[8]．この場合を Type 1 と呼ぼう．Type 1 に属する無重複空間は，以下のように証明を与えることができる．

G, G_u のリー環をそれぞれ $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{k}_0$ とおく．対応するカルタン分解を $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ とおくとき，等方表現は G_u の $\mathfrak{p}_0$ における随伴作用と同一視できる．$\mathfrak{p}_0$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}_0$ をとると，$\mathfrak{p}_0 = G_u \cdot \mathfrak{a}_0$ と分解される．この作用はスライス $\mathfrak{a}_0$ をもつ強可視的作用であ

[8] 例えば，$(GL(p, \mathbb{C}) \times GL(q, \mathbb{C}), M(p, q\,; \mathbb{C}))$ の場合，$U(p) \times U(q)$ の $(p \times q)$-複素行列全体のなすベクトル空間 $M(p, q\,; \mathbb{C})$ への作用は AIII 型のエルミート対称空間 $U(p, q)/(U(p) \times U(q))$ の等方表現と同一視できる．その他の例として，$(GL(n, \mathbb{C}), \mathrm{Sym}(n, \mathbb{C}))$ は DIII 型 $SO^*(2n)/U(n)$ が，$(E_6(\mathbb{C}) \times GL(1, \mathbb{C}), \mathbb{C}^{27})$ は EVII 型 $E_{7(-25)}/(E_6 \cdot \mathbb{T})$ が対応する ([15, Table 2] 参照).

る ([11, Theorem 18] 参照). V の部分空間 S を，$V \simeq \mathfrak{p}_0$ を経由して $S \simeq \mathfrak{a}_0$ を満たすものとする．これにより，

$$V = G_u \cdot S$$

が成り立つ．特に，$\dim S = \operatorname{rank} G/G_u$ と表される．

なお，事実 2.5 よりこの作用は polar である．

3.2.2　Type 2

次に，連結な複素簡約リー群 $G_{\mathbb{C}}$ が $GL(m, \mathbb{C}) \times Sp(n, \mathbb{C})$ と局所同型な場合の結果を紹介しよう．この場合を Type 2 と呼ぼう．

例 3.2 (cf. [15, Lemma 4.2]). 既約な無重複空間 $(G_{\mathbb{C}}, V) = (GL(3,\mathbb{C}) \times Sp(2,\mathbb{C}), M(3,4;\mathbb{C}))$ の場合，極大コンパクト部分群 $G_u \simeq U(3) \times Sp(2)$ の作用は，6 次元の $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間

$$S := \left\{ X(r_1, \ldots, r_6) := \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & r_3 & 0 \\ 0 & r_4 & r_5 & r_6 \end{pmatrix} : r_1, \ldots, r_6 \in \mathbb{R} \right\}$$

をスライスにもつ強可視的作用である．特に，

$$M(3,4;\mathbb{C}) = (U(3) \times Sp(2)) \cdot S$$

が成り立つ[9]．なお，G_u の作用は polar ではない．

3.2.3　Type 2

最後に，上の 2 つに属さない場合 (Type 3) を紹介しよう．この証明の鍵は，$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 W_j 内の単位球面 $S(W_j)$ とそれに推移的に作用するコンパクトリー群 K_j の部分列を構成することである．

例 3.3 ([15, Lemma 5.9]). 既約な無重複空間 $(G_{\mathbb{C}}, V)) = (Spin(7,\mathbb{C}) \times GL(1,\mathbb{C}), \mathbb{C}^8)$ を考えよう．$\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_8$ を $\mathbb{C}^8$ の標準基底とし，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ を $\mathbb{R}^8 \simeq \mathbb{R}\text{-span}\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_8\}$ の標準内積とする．$Spin(7,\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}^8$ にスピン表現として作用する[10]．$G_{\mathbb{C}}$ の極大コンパクト部分群 G_u は $Spin(7) \times \mathbb{T}$ と同型である．

2 次元の $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 S を

$$S = \mathbb{R}\vec{e}_1 + \sqrt{-1}\mathbb{R}\vec{e}_2 \tag{3.1}$$

---

[9] 5 次元の多様体 $S' := \{X(r_1, \ldots, r_6) : r_1, \ldots, r_4, r_6 > 0, r_5 < 0, r_2 r_4 + r_3 r_5 = 0\}$ をとると，$(U(3) \times Sp(2)) \cdot S'$ は $M(3,4;\mathbb{C})$ の稠密な開集合となる ($M(3,4;\mathbb{C})$ に一致しない)．証明の詳細は [15, Lemma 4.2] 参照．

[10] [15, Lemma 5.9] では，$\mathbb{C}^8$ を複素ケーリー代数 $\mathfrak{C}_{\mathbb{C}}$ と考え，リー群 $Spin(7,\mathbb{C})$ を $SO(8,\mathfrak{C}_{\mathbb{C}}) \times SO(8,\mathfrak{C}_{\mathbb{C}}) \times SO(8,\mathfrak{C}_{\mathbb{C}})$ の部分群として実現することで，作用およびスライスを具体的に与えている．

とおくと,

$$\mathbb{C}^8 = (Spin(7) \times \mathbb{T}) \cdot S \tag{3.2}$$

と分解される．以下，この証明の概略を見ていこう．

まず，$Spin(7)$ の $\mathbb{C}^8 = \mathbb{R}^8 + \sqrt{-1}\mathbb{R}^8$ への作用を考える．次の事実が知られている：

補題 3.4. (1) $Spin(7)$ は $\mathbb{R}^8$ 内の単位球面 S^7 に推移的に作用する．

(2) $Spin(7)$ の $v \in S^7$ における等方部分群は例外型コンパクト単純リー群 G_2 と同型である．

(3) G_2 は $\mathbb{R}^7$ 内の単位球面 S^6 に推移的に作用する．

(1) から $\mathbb{R}^8 = Spin(7) \cdot \mathbb{R}\vec{e}_1$ を得る．$\mathbb{R}^8 = \mathbb{R}\vec{e}_1 + \mathbb{R}\text{-span}\{\vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_8\} \simeq \mathbb{R}\vec{e}_1 \oplus \mathbb{R}^7$ と直和分解したとき，(3) から $\mathbb{R}^7 = G_2 \cdot \mathbb{R}\vec{e}_2$ が成り立つから，$\mathbb{R}^8 = \mathbb{R}\vec{e}_1 + G_2 \cdot \mathbb{R}\vec{e}_2 = G_2 \cdot (\mathbb{R}\vec{e}_1 + \mathbb{R}\vec{e}_2)$ となる．よって，

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^8 &= Spin(7) \cdot \mathbb{R}\vec{e}_1 + \sqrt{-1}(G_2 \cdot (\mathbb{R}\vec{e}_1 + \mathbb{R}\vec{e}_2)) \\ &= Spin(7) \cdot (\mathbb{R}\vec{e}_1 + \sqrt{-1}(\mathbb{R}\vec{e}_1 + \mathbb{R}\vec{e}_2)). \end{aligned} \tag{3.3}$$

上の証明に際し，$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 W_j 内の単位球面 $S(W_j)$ とそれに推移的に作用するコンパクトリー群 K_j の部分列として $(Spin(7), S^7) \supset (G_2, S^6)$ を用いた．

次に，$\mathbb{T}$ の作用を考える．

補題 3.5 ([15, Lemma 5.6])**.** 任意の $v \in \mathbb{C}^8$ に対して，$\alpha \in \mathbb{T}$ を，αv の実部 $(\alpha v)_R$ と虚部 $(\alpha v)_I$ の $\mathbb{R}^8$ における標準内積 $\langle (\alpha v)_R, (\alpha v)_I \rangle$ が 0 となるように選ぶことができる．

上の α に対し，$v' := \alpha v$ とおき，(3.3) にしたがって $v' = g \cdot (r_1\vec{e}_1 + \sqrt{-1}(r_2\vec{e}_1 + r_3\vec{e}_2))$ と表す ($g \in Spin(7)$，$r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$)．このとき，$\langle v'_R, v'_I \rangle = 0$ から $r_2 = 0$ とすることができる．よって，$v' = g \cdot (r_1\vec{e}_1 + \sqrt{-1}r_3\vec{e}_2)$ を得る．

以上より，任意の $v = \alpha^{-1}v'$ は $(Spin(7) \times \mathbb{T}) \cdot S$ の元である．つまり，$V \subset (Spin(7) \times \mathbb{T}) \cdot S$ が示された．逆の包含関係は明らかである．

注意 3.6. $\mathbb{C}^8$ を $M(8,2;\mathbb{R})$ と $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間として同一視される．$M(8,2;\mathbb{R})$ はエルミート対称空間 $SO_0(8,2)/(SO(8) \times SO(2))$ の原点 $o \in SO_0(8,2)/(SO(8) \times SO(2))$ における接空間 $T_o(SO_0(8,2)/(SO(8) \times SO(2)) \simeq \mathfrak{p}_0$ と同一視される．$SO(8) \times SO(2)$ のリー環 $\mathfrak{k}_0 := \mathfrak{so}(8) \oplus \mathfrak{so}(2)$ は 1 次元の中心をもつ．$Z = E_{10,9} - E_{9,10} \in M(10,\mathbb{R})$ とし $J := \mathrm{ad}(Z)$ とおくと，J は $\mathfrak{p}_0$ の複素構造を定める．ただし，$E_{i,j} \in M(10,\mathbb{R})$ は (i,j)-成分のみ 1 でそれ以外は 0 の行列を表す．したがって，$\mathbb{C}^8$ と $M(8,2;\mathbb{R})$ は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間として同型である．

コンパクトリー群 $SO(8) \times SO(2)$ の $M(8,2;\mathbb{R})$ への作用は，$SO_0(8,2)/(SO(8) \times SO(2))$ に対する等方表現に同型である．例 3.1 と同様の手法により，$T = \mathbb{R}E_{1,1} + \mathbb{R}E_{2,2}$ を用いて $M(8,2;\mathbb{R}) = (SO(8) \times SO(2)) \cdot T$ と分解される．

リー群 $Spin(7)$ は $SO(8)$ の部分群であり，T は同型 $\mathbb{C}^8 \simeq M(8,2;\mathbb{R})$ を通して (3.1) で定義した S と同型である．したがって，例 3.3 より $\mathbb{C}^8$ における $Spin(7) \times \mathbb{T}$ の作用によ

る軌道は $SO(8)\times\mathbb{T}$ の作用による軌道と一致することが分かる．また，このことにより，$Spin(7)\times\mathbb{T}$ の $\mathbb{C}^8$ への作用は polar であることも分かる．

既約な無重複空間 $(G_2(\mathbb{C})\times GL(1,\mathbb{C}),\mathbb{C}^7)$ の場合もこの手法で説明することができる[11]．

定理 1.1 の (MF) $\Rightarrow$ (SV) の証明をみると，次の系が成り立つことが分かる．

系 3.7. 既約な無重複空間 $(G_{\mathbb{C}},V)$ に対し，極大コンパクト部分群 G_u の V への作用がスライス S をもつ polar 作用ならば，この作用は同じ S をスライスにもつ強可視的作用である．

参考文献

[1] C. Benson and G. Ratcliff, A classification of multiplicity free actions, *J. Algebra* **181** (1996), 152–186.

[2] C. Benson and G. Ratcliff, Rationality of the generalized binomial coefficients for a multiplicity free action, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **68** (2000), 387–410.

[3] C. Benson and G. Ratcliff, On multiplicity-free actions, *Representations of real and p-adic groups* (eds. E.-C. Tan and C.-B Zhu), Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci. Natl. Univ. Singap. **2**, Singapore Univ. Press, Singapore (2004) 221–304.

[4] J. Dadok, Polar coordinates induced by actions of compact Lie groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **288** (1985), 125–137.

[5] V. Guillemin and S. Sternberg, Multiplicity-free spaces, *J. Differential Geom.*, **19** (1984), 31–56.

[6] R. Howe and T. Umeda, The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions, *Math. Ann.* **290** (1991), 565–619.

[7] A. Huckleberry and T. Wurzbacher, Multiplicity-free complex manifolds, *Math. Ann.*, **286** (1990), 261–280.

[8] V. Kac, Some remarks on nilpotent orbits, *J. Algebra* **64** (1980), 190–213.

[9] F. Knop, Some remarks on multiplicity-free spaces, *Representation Theories and Algebraic Geometry*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. **514** (1998), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 301–317.

[10] T. Kobayashi, Geometry of multiplicity-free representations of $GL(n)$, visible actions on flag varieties, and triunity, *Acta. Appl. Math.* **81** (2004), 129–146.

[11] T. Kobayashi, Multiplicity-free representations and visible actions on complex manifolds, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **41** (2005), 497–549, special issue commemorating the fortieth anniversary of the founding of RIMS.

[11] 既約な無重複空間 $(Spin(9,\mathbb{C})\times GL(1,\mathbb{C}),\mathbb{C}^{16})$ は，Type 1 にも Type 2 にも属さず，注意 3.6 にある手法で説明することができない．

[12] T. Kobayashi, Propagation of multiplicity-free property for holomorphic vector bundles, math.RT/0607004.

[13] T. Kobayashi, Visible actions on symmetric spaces, *Transform. Groups* **12** (2007), 671–694.

[14] A. Leahy, A classification of multiplicity free representations, *J. Lie Theory* **8** (1998), 367–391.

[15] A. Sasaki, Visible actions on irreducible multiplicity-free spaces, *Int. Math. Res. Not.* (2009) 3445–3466, doi: 10.1093/imrn/rnp060.

[16] A. Sasaki, Visible actions on reducible multiplicity-free spaces, *preprint.*

[17] A. Sasaki, Linear visible actions, *accepted for publication in RIMS Kôkyûroku Bessatsu.*

Atsumu SASAKI

Department of Mathematics
Faculty of Science and Engineering
Waseda University
3-4-1, Okubo, Shinjuku-ku, Tokyo
169-8555, Japan
E-mail: atsumu@aoni.waseda.jp