複素7次元球面のコンパクトClifford-Klein形について

吉野 太郎 (東京工業大学)
yoshino@math.titech.ac.jp

Abstract

与えられた対称空間にコンパクト商が存在するか、という問題に答えることは一般には容易でない。実際、既約な対称空間に限ってさえも、コンパクト商が存在するか否かを決定出来ていない例が多くある。このような中、複素7次元球面 $S^7_{\mathbb{C}}$ がコンパクト商を持つことが新たに分かったので報告したい。

1 主結果

M を完備局所対称空間とすると、その普遍被覆多様体 $\tilde{M}$ は対称空間となる。逆に対称空間 $\tilde{M} = G/H$ が与えられたとき、それを普遍被覆多様体とする**コンパクトな**完備局所対称空間は存在するか、という問題が小林俊行氏によって提起されている。これは換言すると、与えられた対称空間 G/H に対し、そのコンパクト商 $\Gamma\backslash G/H$ の存在を問う。

H がコンパクトであるとき、対称空間 G/H はリーマン対称空間と呼ばれ、常にコンパクト商を持つことが知られている ([Bo63])。また、$G' \times G'/\mathrm{diag}G'$ の形の対称空間は群多様体と呼ばれ、やはりコンパクト商が常に存在する。一方、それ以外の対称空間でコンパクト商を持つ例は、それ程多くない (と思われる)。以下は1996年までに知られていた全リストである。

Fact 1 (小林)**.** 次の対称空間は、コンパクト商を持つ。($n = 1, 2, 3, \cdots$).

	G/H
1	$SU(2,2n)/Sp(1,n)$
2	$SU(2,2n)/U(1,2n)$
3	$SO(2,2n)/U(1,n)$
4	$SO(2,2n)/SO(1,2n)$
5	$SO(4,4n)/SO(3,4n)$
6	$SO(4,4)/SO(4,1) \times SO(3)$
7	$SO(4,3)/SO(4,1) \times SO(2)$
8	$SO(8,8)/SO(7,8)$
9	$SO^*(8)/U(3,1)$
10	$SO^*(8)/SO^*(6) \times SO^*(2)$

当時、このような例は上記で全てであろうと信じられていたが、最近、ほぼ10年ぶりに新しい空間が加わった。

Theorem 2 (小林・吉野 [KoY05])**.** *複素7次元球面 $O(8,\mathbb{C})/O(7,\mathbb{C})$ はコンパクト商を持つ。*

但し、複素 n 次元球面とは次で定義される複素多様体であり、自然に $O(n+1,\mathbb{C})/O(n,\mathbb{C})$ と同形となる。

$$S^n_{\mathbb{C}} := \left\{ z \in \mathbb{C}^{n+1} \ : \ z_1^2 + \cdots + z_{n+1}^2 = 1 \right\}.$$

特に $S^1_{\mathbb{C}}$ がリーマン対称空間、$S^3_{\mathbb{C}}$ が群多様体であることに注意すると、次が分かる。

Corollary 3. 複素 n 次元球面 $S^n_{\mathbb{C}}$ は、$n = 1, 3, 7$ のときにコンパクト商を持つ。

一方、(普通の)n 次元球面 S^n は、$n = 1, 3, 7$ のときに平行化可能であることが知られている。筆者は、コンパクト商の存在と平行化可能性に何らかの関連があるのではないかと考えているが、未だはっきりとした証拠は得られていない。

2 コンパクト Clifford-Klein 形の存在問題

主結果をより広い枠組みで捕らえるために、Clifford-Klein 形という言葉を導入する。

G/H を等質空間とし、Γ を G の離散部分群とする。このとき Γ は G/H に自然に作用する。

Fact 4. Γ の G/H への作用が固有不連続かつ固定点自由であるとき、商空間 $\Gamma\backslash G/H$ は自然に多様体の構造を持つ。

Definition 5 (小林)**.** 上記の商多様体 $\Gamma\backslash G/H$ を G/H の **Clifford-Klein 形**という。

特に G/H が対称空間ならば、その Clifford-Klein 形 $\Gamma\backslash G/H$ は (測地的) 完備な局所対称空間となり、逆に任意の完備局所対称空間は対称空間 G/H の Clifford-Klein 形として表せる。

小林は次の問題を提起した。

Problem 6. コンパクトな Clifford-Klein 形を持つ等質空間を分類せよ。

現時点では、この問題は解決には程遠い状況である。既約対称空間は、等質空間の中でも特に良いクラスであり Berger によって分類されている ([Br57])。しかし、その場合に限っても、この問題には未解決な例が多く残っている。

3 コンパクト Clifford-Klein 形の構成

上記の問題の難しさは、固有不連続に作用する離散群を直接取り扱う事の難しさに起因する。そこで、その「連続版近似」として、固有な作用という概念を導入する。

リー群 L が多様体 M に作用しているとする。

Definition 7. 任意のコンパクト集合 $S \subset M$ に対し、次で定まる集合 L_S がコンパクトであるとき、L の M への作用は**固有**であるという。

$$L_S := \{l \in L \ : \ l(S) \cap S \neq \emptyset\} .$$

このとき簡単な議論から次が分かる。

Fact 8. L が M に固有に作用しているとする。このとき L の勝手な離散部分群 Γ は M に固有不連続に作用する。

さらに、線形簡約リー群には常に余コンパクト離散部分群が存在することを用いると、次の十分条件が得られる。

Fact 9 (小林)**.** *G/H を線形簡約等質空間とする。次の 2 条件を満たす簡約部分群 $L \subset G$ が存在するならば、G/H はコンパクト Clifford-Klein 形を持つ。*

(a) L の G/H への作用は固有。

(b) 商空間 $L\backslash G/H$ はコンパクト。

この定理により、離散群 Γ の存在問題は (連結な) 部分群 L の存在問題に帰着される。さらに、主結果の対称空間 $G/H = O(8, \mathbb{C})/O(7, \mathbb{C})$ については、$L := Spin(1, 8)$ をスピン表現を用いて $O(8, \mathbb{C})$ に埋め込むことで得られる。

References

[Br57] M. BERGER, *Les espaces symétriques non compacts*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **74** (1957), 85–177.

[Bo63] A. BOREL, *Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces*, Topology **2** (1963), 111–122.

[Ko88] T. KOBAYASHI, *Properly discontinuous action on reductive homogeneous spaces*, Seminar Reports of Unitary Representation (ed. H. Yamada) **8** (1988), 17–22, (in Japanese).

[Ko96b] T. KOBAYASHI, *Discontinuous groups and Clifford-Klein forms of pseudo-Riemannian homogeneous manifolds*, In: Lecture Notes of the European School, August 1994, eds. H. Schlichtkrull and B. Ørsted, Perspectives in Math. **17**. Academic Press (1996), 99–165.

[KoY05] T. KOBAYASHI AND T. YOSHINO, *Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces—revisited*, Pure Appl. Math. Q. **1** Special Issue: In Memory of Professor Armand Borel (2005) 591–663.