不整形立体架構の剛心・偏心率計算に用いる水平剛性の評価手法に関する研究

栗田研究室　　4109642　吉村　貴司

1.はじめに

現在の構造計算において，立体解析における剛心及び偏心率の計算は，応力解析結果から求めた柱や耐震壁などの水平剛性を使用する方法が多用されている。しかし，現在多用される水平剛性の評価手法の中には，解析上の誤差を許容して評価しているものや力学的根拠に基づいていないものもあり，より精度の高い計算手法を構築するための議論がなされている。図 1 の様に構面が直交する整形な建物を対象とした計算方法は文献 1)に示されている。図 2 の様に構面が斜めに交わるような不整形な建物については文献 2)に示されたせん断型モデルの捩れ理論に基づいた偏心率の計算方法が多用されている。両者とも従来の手法では「柱断面の主軸＝剛性の主軸」という仮定に基づいているが，不整形な建物ではその仮定が成立しているとは限らない。

筆者らは文献 3)で従来とは異なる「柱断面の主軸≠剛性の主軸」と仮定した水平剛性の評価手法を提案し，単層の不整形立体架構を対象に検証を行っている。そこで本研究では多層の不整形立体架構を対象として本手法の妥当性を検証することを目的とする。ここで，全体曲げ変形が与える影響についても併せて検証を行う。

2.柱の水平剛性の評価手法

2.1 水平せん断力－水平変形の関係式

構面が斜めに交わるような不整形な建物でも，従来の手法では図 3(a)の様に「柱の断面の主軸＝水平剛性の主軸」と仮定して，剛心・偏心率計算に使用する鉛直部材の水平剛性を算出している。柱の断面の主軸座標系を(x,y)で表わすと，断面の主軸方向の水平剛性(D_x,D_y)を用いて，水平せん断力(q_x,q_y)と水平変形(δ_x, δ_y)の関係は式(1)で表わされる。

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x & 0 \\ 0 & D_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{Bmatrix} \tag{1}$$

しかし，柱に斜めに接続する梁の材端曲げモーメントが鉛直部材のx軸とy軸の両主軸方向に働くことから水平剛性の主軸と柱断面の主軸が一致するとは限らない。そこで，本手法では図 3(b)のように「柱断面の主軸≠剛性の主軸」と仮定している。このとき，柱断面の主軸座標系に囚われない全体座標系(X,Y)の水平せん断力(q_X,q_Y)と水平変形(δ_X,δ_Y)の関係は式(2)で表わすことができる。

$$\begin{Bmatrix} q_X \\ q_Y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{XX} & D_{XY} \\ D_{XY} & D_{YY} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_X \\ \delta_Y \end{Bmatrix} \tag{2}$$

ここでD_{XX}，D_{XY}，D_{YY}は部材の水平剛性マトリクスの成分であり，式(2)のようにD_{XY}を対称としたのは線形弾性域を適応範囲としているためである。

2.2 応力解析結果を用いた水平剛性の評価手法

剛床仮定を用いた立体架構モデルの応力解析結果から，式(2)の水平剛性マトリクスの成分を求める方法を以下に示す。

使用する応力解析結果は柱断面の主軸方向に関わらず，図 4(a)のように全体座標系の X 軸に対しβ_1傾いた方向に加力したときに得られる水平せん断力$({}_1q_X,{}_1q_Y)$と水平変形$({}_1\delta_X,{}_1\delta_Y)$，図 4 (b)のように$\beta_1$に直交する$\beta_2$方向に加力したときに得られる水平せん断力$({}_2q_X,{}_2q_Y)$と水平変形$({}_2\delta_X,{}_2\delta_Y)$の結果とする。応力解析結果の水平せん断力と式(2)に水平変形を代入して得られる水平せん断力は一致することは望ましいが加力方向を変化させた場合，応力と変形の状態が変化するため一致する保証はない。そこでその二乗誤差の和 J（式(3)）が最小となるように，

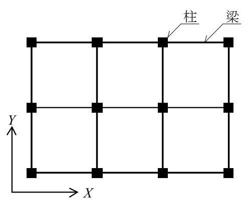


図 1 整形な建物の例

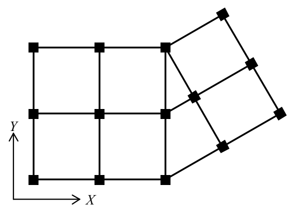
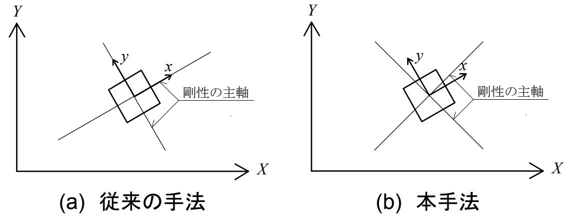
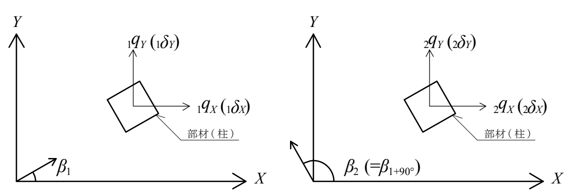


図 2 不整形な建物の例



(a) 従来の手法　　(b) 本手法

図 3 部材の断面の主軸と剛性の主軸



(a) 水平加力 1　　(b) 水平加力 2

図 4 水平加力方向と水平せん断力（水平変形）

柱の水平剛性マトリクスの各成分を求める。

$$J=\sum_{i=1}^{2}\left\{\left(D_{XX}\cdot{}_i\delta_X\right)+\left(D_{XY}\cdot{}_i\delta_Y\right)-{}_iq_X\right\}^2+\sum_{i=1}^{2}\left\{\left(D_{XY}\cdot{}_i\delta_X\right)+\left(D_{YY}\cdot{}_i\delta_Y\right)-{}_iq_Y\right\}^2 \tag{3}$$

ここでJが最小となる最適化条件は次の通りである。

$$\frac{\partial J}{\partial D_{XX}}=0,\frac{\partial J}{\partial D_{XY}}=0,\frac{\partial J}{\partial D_{YY}}=0 \tag{4}$$

式(4)の条件で偏微分を行うと次の連立方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{2}\left({}_i\delta_X\right)^2 & \sum_{i=1}^{2}{}_i\delta_X\cdot{}_i\delta_Y & 0 \\ \sum_{i=1}^{2}{}_i\delta_X\cdot{}_i\delta_Y & \sum_{i=1}^{2}\left\{\left({}_i\delta_X\right)^2+\left({}_i\delta_Y\right)^2\right\} & \sum_{i=1}^{2}{}_i\delta_X\cdot{}_i\delta_Y \\ 0 & \sum_{i=1}^{2}{}_i\delta_X\cdot{}_i\delta_Y & \sum_{i=1}^{2}\left({}_i\delta_Y\right)^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} D_{XX} \\ D_{XY} \\ D_{YY} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{2}{}_iq_X\cdot{}_i\delta_X \\ \sum_{i=1}^{2}\left({}_iq_X\cdot{}_i\delta_Y+{}_iq_Y\cdot{}_i\delta_X\right) \\ \sum_{i=1}^{2}{}_iq_Y\cdot{}_i\delta_Y \end{Bmatrix} \tag{5}$$

式(5)を解くことで剛性マトリクスの成分D_{XX}, D_{XY}, D_{YY}を求めることができる。

2.3 層剛性マトリクスの計算方法

任意の座標での層せん断力(Q_X,Q_Y), ねじれ層モーメント(Q_T)と層間変位(δ_X,δ_Y), 層間ねじれ回転角(δ_T)の関係式は式(6)で表わすことができる。

$$\begin{Bmatrix} Q_X \\ Q_Y \\ Q_T \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XY} & K_{XT} \\ & K_{XX} & K_{YT} \\ sym. & & K_{TT} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \delta_X \\ \delta_Y \\ \delta_T \end{Bmatrix} \tag{6}$$

式(6)の層剛性マトリクス[K]は式(5)で求まった水平剛性を当該層の総部材数 N 個足し合わせることで得られる。また任意の点を基準としたときに，基準点からの各部材までの水平距離を(${}_il_X$,${}_il_Y$)とすると，水平剛性マトリクス[K]は式(7)のように表わせる。

$$\begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XY} & K_{XT} \\ & K_{YY} & K_{YT} \\ sym. & & K_{TT} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N}{}_iD_{XX} & \sum_{i=1}^{N}{}_iD_{XY} & \sum_{i=1}^{N}\left(-{}_il_Y\,{}_iD_{XX}+{}_il_X\,{}_iD_{XY}\right) \\ & \sum_{i=1}^{N}{}_iD_{YY} & \sum_{i=1}^{N}\left(-{}_il_Y\,{}_iD_{XY}+{}_il_X\,{}_iD_{YY}\right) \\ sym. & & \sum_{i=1}^{N}\left({}_il_Y{}^2\,{}_iD_{XX}+{}_il_X{}^2\,{}_iD_{YY}\right)-2\sum_{i=1}^{N}{}_il_X\,{}_il_Y\,{}_iD_{XY} \end{bmatrix} \tag{7}$$

また, 剛心に水平力を与えたとき捩れを伴わず並進移動をすることを考慮すればK_{XT}, K_{YT}がゼロとなる座標が剛心であることが分かる。

3. 水平剛性の評価手法の妥当性の検証

3.1 検証方法

柱の軸方向変形を拘束し，全体曲げが生じないモデルを用いて本手法の妥当性を検証し，別途全体曲げ変形の影響について考察する。具体的な検証内容は以下の通りである。

3.1.1 本手法における仮定条件の妥当性

本手法の「断面の主軸≠剛性の主軸」という仮定条件が反映されているかどうかを式(5)で求めた鉛直部材の水平剛性の各成分を従来の手法と比較することで確認する。ここで，従来の計算方法とは，柱の断面の主軸方向が全体座標軸と加力方向と同じ場合はX方向加力時の水平せん断力 ${}_1q_X$ と水平変形 ${}_1\delta_X$ からX方向の水平剛性を算出し，Y方向の剛性も同様に水平せん断力 ${}_2q_Y$ と水平変形 ${}_2\delta_Y$ から求める。それぞれの水平剛性は式(8)の通りである。

$$D_{XX}={}_1q_X/{}_1\delta_X\,,D_{YY}={}_2q_Y/{}_2\delta_Y \tag{8}$$

3.1.2 本手法による層剛性マトリクスの妥当性

対象建物が単層の場合，自由度を水平変位のみに縮約した全体剛性マトリクスは等価せん断型モデルと同値であるため，全体剛性マトリクスから求めた剛心と偏心率を理論値として本手法の剛心・偏心率と比較することで妥当性を検証することができる。しかし，対象建物が多層の場合，全体剛性マトリクスはフルマトリクスとなるため本手法の結果と直接比較検証することができない。そこで，応力解析時に得られる建物の層間変位を比較対象として, 式(6)に本手法で得られた剛性マトリクスと応力解析で使用した外力と同じ層せん断力を加えた時の層間変位を比較する。これにより層剛性マトリクスが等価なせん断系に置換されているかを確認することで本手法の妥当性を検証する。また，式(8)で得られた鉛直部材の水平剛性を式(7)に代入し得られる，従来の手法での層剛性マトリクスを用いた場合とも比較を行う。

3.2. 解析条件

対象建物は図5に示すように6000×6000mmの正方形平面を基準に柱 C4 を X 方向に移動させ，A1構面が Y1,Y2 構面に斜めに交わるような平面をした 5 層純ラーメン RC 造の不整形立体架構とした。C4 の X 座標は 250mm ずつ 5000mm まで変化させており，全 21 モデルを対象とした。このとき A1構面の傾きθは 0~約 40°まで変化させることになる。また全体曲げ変形を考慮する場合と拘束する場合（柱の軸剛性を通常の 1000 倍に設定）の 2 つのモデルを使用する。また，剛床を仮定し，柱脚の支持条件は固定としてモデル化する。剛域とスラブによる梁剛性の割増は考慮していない。

外力分布は Ai 分布とし，地震荷重用建物重量は各モデルの値を用いる。応力解析に用いる外力の加力方向は全ての柱の断面と同一の X 軸方向と Y 軸方向の 2 方向とする。

表 1 建物諸元　単位:mm

寸法	柱C1～4	500×500
	梁G1～4	350×700
	スラブ	150
構造階高		3400

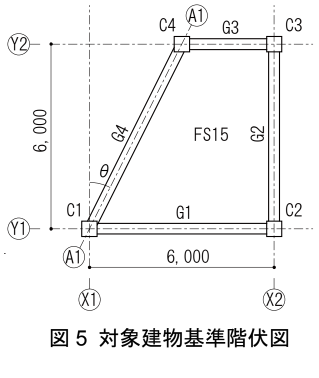


図 5 対象建物基準階伏図

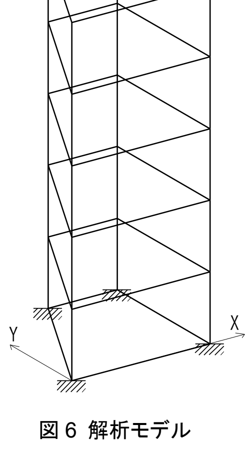


図 6 解析モデル

3.3 解析結果

3.3.1 本手法における仮定条件の妥当性

全体曲げ変形を考慮しないモデルの構面が斜めに交わる位置にある柱C1の水平剛性を図7に示す。(a)と(b)より水平剛性 D_{XX} と D_{YY} は A1 構面が傾くにつれて本手法と従来の手法による差は大きくなり，どちらも本手法の方が剛性を高く評価していることが分かる。(c)より従来の計算方法では式(1)のように「部材断面の主軸＝剛性の主軸」を仮定しているため D_{XY} の値がゼロとなっている。一方，本手法では建物が整形なとき D_{XY} はゼロであるが，A1 構面の傾きが大きくなるにつれて大きくなっている。従って，本手法の「部材断面の主軸≠剛性の主軸」という仮定を，柱断面の主軸に対して梁が斜めに交わるような場合は考慮する必要がある。

3.3.2 本手法における層剛性マトリクスの妥当性

図 8 に本手法で得られる層剛性マトリクスから求めた層間変位（以下，本手法の変位）と従来の手法で得られる層剛性マトリクスから求めた層間変位（以下，従来の変位）と応力解析時の層間変位（以下，理論値）を示す。いずれも X 方向に加力したときの重心位置における層間変位を示している。

(a)は X 方向の層間変位 δ_X を示しており，本手法の変位は理論値と概ね一致しているが，従来の変位はそれらより僅かに小さくなり，差が生じていることが分かる。これは鉛直部材の水平剛性 D_{XX} で差があることに加え，(c)に示す層間振れ回転角 δ_θ が影響しているからである。そのため A1 構面の傾きが僅かなときから変形に差が生じている。

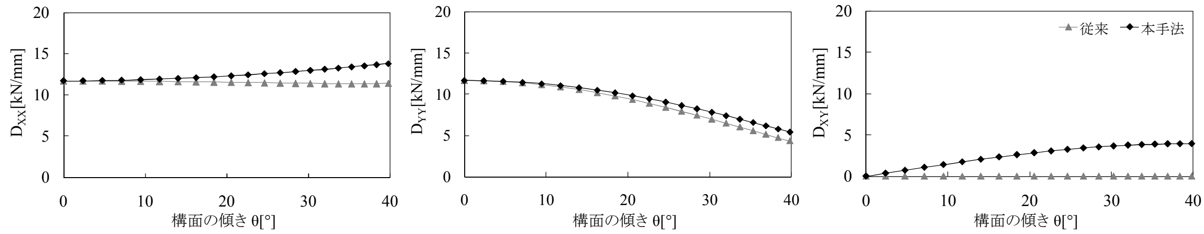
(b)の Y 方向の層間変位 δ_Y も X 方向と同様に本手法の変位と理論値は概ね一致しているが，従来の変位とは差が生じている。これは従来の手法では鉛直部材の水平剛性 D_{XY} が常にゼロであることから，Y 方向の並進成分は含まれず, (c)で示す層間振れ回転角 δ_T による変形が評価されていることに起因する。一方，本手法と理論値には振れ回転角だけでなく剛性 D_{XY} によるY方向の並進の影響が含まれているため，従来のものより変形が大きくなっている。

(c)の層間振れ回転角では僅かに本手法と理論値に差が生じているものの，従来の手法と比べると概ね一致していることがわかる。

以上より本手法の変位は理論値と概ね一致しているため，本手法は精度よく等価なせん断系へのモデル化がなされていることが確認できる。従って，本手法を用いて剛心・偏心率を算出することは妥当であると考えられる。

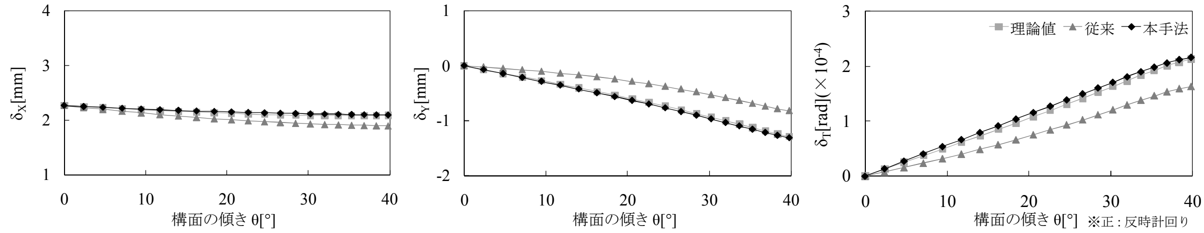
3.3.3. 全体曲げ変形を考慮した場合の影響

全体曲げ変形の影響を考慮して X 方向に加力したときの重心位置における本手法の変位，従来の変位，理論値を図 9 に示す。(a)の δ_X は A1 構面の傾きに関わらず変位量が増加している。また，構面の傾きが大きくなると(c)の δ_T が反時計回りから，時計



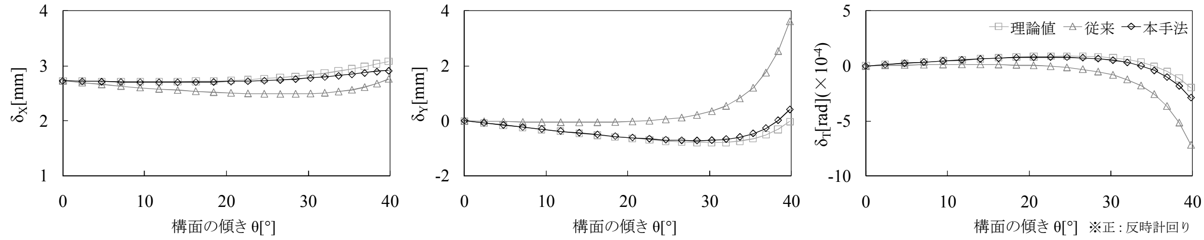
(a)D_{XX} (b)D_{YY} (c)D_{XY}

図 7 柱 C1 の水平剛性(5 階)



(a)層間変位 δ_X (b)層間変位 δ_Y (c)層間振れ回転角 δ_T

図 8 全体曲げ変形を拘束したときの X 方向加力による層せん断力の作用点での層間変位(5 階)



(a)層間変位 δ_X (b)層間変位 δ_Y (c)層間振れ回転角 δ_T

図 9 全体曲げ変形を考慮したときの X 方向加力による層せん断力の作用点での層間変位(5 階)

回りに捩れる方向が変わっていることが読み取れる。その結果(b)における δ_Y の変形方向が反対になっていることがわかる。また構面の傾きが大きくなると本手法の変位は理論値と差が生じているものの，全体曲げ変形を拘束したときと同様に，本手法の変位は理論値と概ね一致していることが分かる。一方，従来の変位は全体曲げ変形を拘束したときよりも理論値との差が大きくなっている。

以上より，全体曲げ変形の影響が僅かに認められるものの，本手法の変位は従来の変位よりも理論値を十分に追跡できていることが分かった。

5. 剛心・偏心率への影響

図 10 は全体曲げ変形を拘束したときと考慮したときの，本手法と従来の手法による剛心を伏図にプロットしたものである。A1 構面が傾いていないときは整形な建物であるため，剛心も重心も平面の図心と一致し，構面が傾くことでそれぞれの位置が変化していく。また本手法の剛心は，層剛性マトリクスが精度よく置換出来ていることから，理論計算の剛心に近いと考えられる。

全体曲げ変形を拘束した場合，A1 構面が傾くにつれて Y2 構面の剛性が上昇するため，剛心は Y2 構面側に移動する傾向がある。また，本手法による剛心は従来の手法による剛心よりも Y 方向の変化が大きくなっている。これにより，重心と剛心の間の偏心距離が増加し，図 8(c)に示すように，本手法及び応力解析の方が従来のものより捩れる結果となることを表わしている。また捩れやすさを表わした偏心率 Rex を示した図 12 から従来の手法では過小評価になっていることが分かる。

全体曲げ変形を考慮した場合，A1 構面が傾くにつれて，スパンが短くなる Y2 構面の全体曲げ変形が大きくなるため，剛心が Y1 構面側に移動する傾向がある。また，A1 構面の傾きが小さいとき本手法の剛心は Y2 構面側に寄ることから，偏心距離は従来の手法よりも大きくなる。一方，傾きが大きくなるにつれて従来の手法の剛心の方が Y1 構面側に寄り偏心距離が大きくなっていることが分かる。これにより図 9(c)に示した層間捩れ回転角 δ_T は，A1 構面に傾きが小さいとき，本手法の方が反時計回りに大きく捩れ，構面の傾きが大きくなると従来の手法の方が時計回りに大きく捩れていることが分かる。また，偏心率に回転方向は関係なく，偏心距離は剛心と重心の差の絶対値から求めるため，図 10 に示す重心と剛心の Y 座標が入れ替わるとき，図 12 のように偏心率はゼロになり，その前後で偏心率が大きく変化している。

以上より，従来の手法による偏心率は過小評価にも過大評価にもなり，適切に偏心率を評価できておらず，本手法の優位性は明らかである。

6. 結論

多層の不整形立体架構を対象に提案する剛心・偏心率の計算に用いる水平剛性の評価手法の妥当性を検証した。

1)構面が斜めに交わる位置にある柱の剛性の主軸は断面の主軸と一致していない。

2)本手法から求めた剛性マトリクスは精度良く等価なせん断系にモデル化できている。

3)全体曲げ変形の有無に関わらず本手法を用いることで，剛心・偏心率を適切に計算することが可能である。

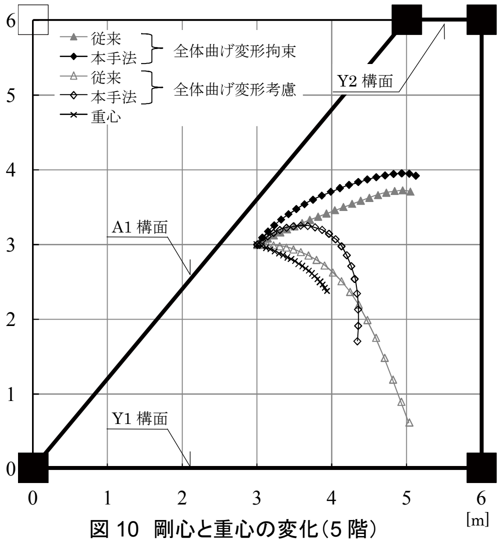


図 10 剛心と重心の変化（5 階）

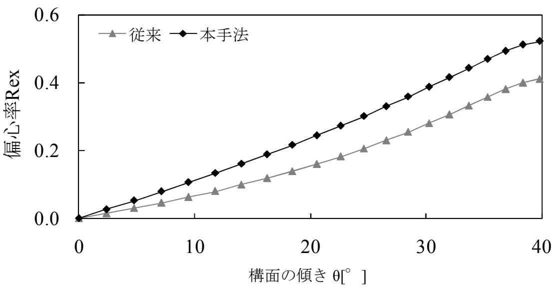


図 11 全体曲げを拘束したときの偏心率 Rex（5 階）

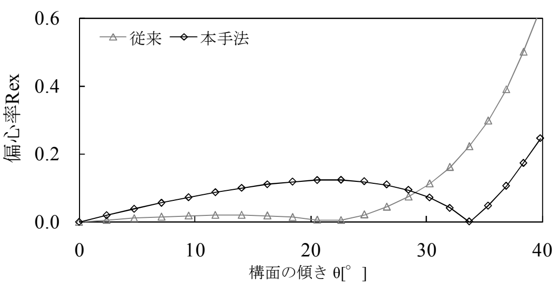


図 12 全体曲げを考慮したときの偏心率 Rex（5 階）

【参考文献】
1)国土交通省住宅局建築指導課ほか 3 団体 : 2007 年度版　建築物の構造関係術基準解説書，全国官報販売協同組合，2007.8
2)志賀敏男 : 構造物の振動，共立出版，1976.6
3)栗田哲,吉村貴司,千葉一樹 : 不整形立体架構の剛心と偏心率の計算方法の提案(その 1)計算方法，(その 2)精度の検証，日本建築学会大会学術講演梗概集，2010.8