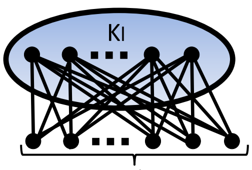
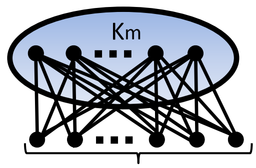
2012年度 有限幾何学 中間試験解答

問1：配布資料参照
問2：配布資料参照
問3：
(1)
丁度2つの奇点aとbが存在する ⇔ ある2頂点aとbに対し，G+ab の全ての頂点の次数が偶数
⇔ある2頂点aとbに対し，G+ab がオイラー回路を持つ（∵オイラーの定理）
⇔ある2頂点aとbに対し，Gがaとbを端点とするオイラー小道を持つ
(2) 配布資料参照
(3)



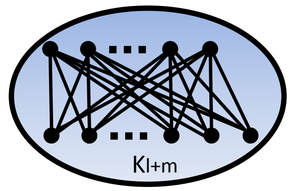
m個

$l < m$ の場合



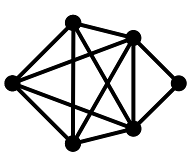
l個

$m < l$ の場合

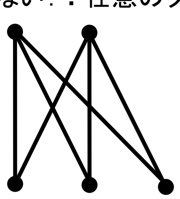


$l = m$ の場合

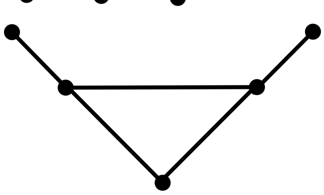
(4) Pをハミルトン道としSを空ではないV(G)の部分集合とすると$k(G-S) \leqq k(P-S) \leqq |S|+1$となる．
(5) $|m-l| \leqq 1$
証明：$K_{l,m}$ の部集合をA, B ($|A|=l$, $|B|=m$) とする．
Gがハミルトン道を持つとすると(4)より，
$m=k(G-A) \leqq l+1$ かつ $l=k(G-B) \leqq m+1$，∴$|m-l| \leqq 1$ となる．
逆に$|m-l| \leqq 1$ ならば次のことが簡単に分かる;
$m=l+1$ ⇒Bの任意の異なる2頂点に対して，それらを端点とするハミルトン道が存在する
$l=m+1$⇒Aの任意の異なる2頂点に対して，それらを端点とするハミルトン道が存在する
$l=m$⇒Aの任意の頂点とBの任意の頂点を端点とするハミルトン道が存在する．
問4：
(1) 描けない：∵オイラー小道，オイラー回路を持つための必要条件はそれぞれ奇点の数が2，奇点の数が0．
(2) 例



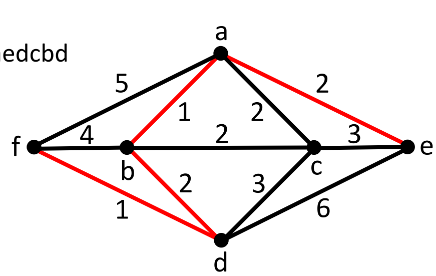
(3) 描けない：∵任意のグラフの奇点の数は偶数個．
(4) 例



(5) 例



問5：重み最小の閉歩道：dfbaecabdfaedcbd
重さ：37
(右図の赤い辺を2重化する)



2012年度 有限幾何学 中間試験解答補足

問2：(3),(4) ：$v \in V(G)$ だけだと曖昧です．
「任意の$v \in V(G)$に対して」と「ある$v \in V(G)$に対して」ではだいぶ意味が違います．

問3：

(1) 証明したいことは，
「丁度2つの奇点aとbが存在する⇔ある2頂点aとbに対し，Gがaとbを端点とするオイラー小道を持つ」．
・単に「Gがオイラーグラフであるとすると」として何かを示しても意味がありません．
・ ⇒の証明においてG-abの全ての頂点の次数が偶数になるとはかぎりません（∵辺abがないときはG=G-ab）．
・⇒と⇐ どちらかを示し忘れないようにしましょう．

(2) 証明したいことは，
「任意の$v \in V(G)$に対して$d(v) \geqq |V(G)|/2$ ⇒ Gはハミルトングラフ」．
・まずは「任意の$v \in V(G)$に対して$d(v) \geqq |V(G)|/2$ 」を仮定して証明を考えましょう．
・Oreの定理においてuとvは異なる非隣接な2頂点です．Oreの定理の$u=v$の場合とすることはできません．

(3) 完全グラフになる個所はそのことが分かるように書いてください．

(4) 証明したいいことは，
「Gがハミルトン道をもつ ⇒ 任意の空ではない$S \subseteq V(G)$に対し$k(G-S) \leqq |S|+1$」．
・まずは「 Gがハミルトン道をもつ」を仮定して証明を考えましょう．

(5) 十分条件であることのチェックを忘れないようにしましょう．

問4

(1) 「”全ての辺を含む閉じた小道”と”全ての辺を含む閉じていない小道”が同時に存在することはないので」
これは正しいのですが，授業で扱っていないことなので説明が必要です．