数学 1 及び演習　ノート 01

1　行列

行列：数を長方形に並べて () で囲んだもの.

例：$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1.1　基本用語

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- m 行 n 列の行列を $m \times n$ 行列，(m, n) 行列という.
- $n \times n$ 行列を n 次正方行列という.
- 並んでいる数を成分という.
- a_{ij} を (i, j) 成分という.
- 行列 A の (i, j) 成分が a_{ij} のとき，$A = (a_{ij})$ と書くことがある.

例：$a_{ij} = 3i + 2j$ の 2×3 行列を書け.

解答：

- $1 \times n$ 行列を n 項行ベクトル，$m \times 1$ 行列を m 項列ベクトルという.
- 行列 A, B の行と列の個数が等しいとき，同じ型の行列であるという.

1.2　行列の演算

和とスカラー倍

同じ型の 2 つの行列 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$ に対して A と B の
和を,

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij}),$$

スカラー倍を,

$$cA=(ca_{ij})$$

で定める.

- 零行列：全ての成分が 0 の行列．O で表す.
- 同じ型の行列に対して，教科書 P4 定理 1.1 が成立.

積

$A=(a_{ij})$：$l\times m$ 行列，$B=(b_{ij})$：$m\times n$ 行列に対して A と B の 積を,

$$AB=(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj})$$

で定める.（AB は $l\times n$ 行列となる）

積の定義の説明：

- $AB=BA$ のとき，A と B は可換であるという.
- $A\neq O, B\neq O$ で $AB=O$ のとき，A, B を零因子という.
- 積が定義されている行列に対し，教科書 P7 定理 1.2 が成立.

例：教科書 P7 定理 1.2 (2)：$A(B+C)=AB+AC$ の証明：

注意：因数分解の公式は行列では一般には使えない.（可換な行列に対しては使える.）