# 数学 1 及び演習　ノート 03

## 1.4　正則行列

正方行列 $A$ に対し，$AX = XA = E$ となる正方行列 $X$ が存在するならば，$A$ は正則であるという．また，$X$ を $A$ の逆行列といい $A^{-1}$ で表す．

- $A$ が正則ならば，その逆行列は 1 つしかない．
  $\because$
- $AX = E$ か $XA = E$ のいずれか片方を満たす $X$ が存在すれば，$X = A^{-1}$ であることが知られている．
- $A, B$ が正則 $\Rightarrow AB, A^{-1}, {}^tA$ も正則で，$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, (A^{-1})^{-1} = A, ({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$．
  $\because$
- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，
  $A$ が正則 $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$
  また，このとき，$A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
- 実正方行列 $A$ に対し，${}^tAA = A\,{}^tA = E$ となるとき，$A$ を直交行列という．
  注意：$A$ が直交行列のとき，$A^{-1} = {}^tA$.
- $(A^{-1})^r = A^{-r}$ と書く．

### 1.5　2009 年度第 1 回小テスト

**1.**　次の問に答えよ．

**(1)** $A$ が正則行列のとき，${}^tA$ は正則であって ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$ が成り立つことを示せ．

**(2)** $A$ が正則な対称行列であれば，$A^{-1}$ も対称行列になることを示せ．

**(3)** $A$ を直交行列，$E + A$ を正則行列とする．このとき $(E - A)(E + A)^{-1}$ が交代行列であることを示せ．

**2.** $A : m \times n$ 行列, $E_m : m$ 次の単位行列, $E_n : n$ 次の単位行列に対し，$B = \begin{bmatrix} E_m & A \\ 0 & E_n \end{bmatrix}$ とおく．

**(1)** $B$ の逆行列を求めよ．

**(2)** $B^k$ を求めよ（証明はしなくてよい）．

**3.** $n$ 次の対角行列 $A = (a_{ij})$，$B = (b_{ij})$ に対し，$AB$ も対角行列になることを示せ．

### 1.6　2009 年度第 1 回小テスト追試

**1.**　$E + A$ を正則行列，$B = (E - A)(E + A)^{-1}$ とする．このとき次を示せ．

**(1)** $E + B$ は正則である．

**(2)** $A$ が交代行列のとき $B$ は直交行列である．

**2.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & -7 & 2 \\ 3 & -5 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & -1 \\ 4 & 6 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ を対称行列と交代行列の和として表せ．

**3.** $n$ 次正方行列 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ に対し，次を示せ．

**(1)** $\mathrm{tr}\,({}^tAA) = \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij}^2$

**(2)** $\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)$

**(3)** $B$ が正則のとき，$\mathrm{tr}\,(B^{-1}AB) = \mathrm{tr}\,(A)$