数学 1 及び演習　ノート 04

2　行列式

2.1　行列式の定義

順列，転倒

$\{1, 2, \ldots, n\}$ を 1 列に並べたものを**順列**という．$(p_1 p_2 \cdots p_n)$ で表す（全部で $n!$ 個ある）．

例 4-1：$\{1, 2, 3\}$ の順列を書け.
解答：

ある順列が与えられたときに，$1, 2, 3, \ldots$ の自然な順序とは逆になっている 2 組の数を**転倒**といい，その組の総数を**転倒数**という.

例 4-2：(3412) の全ての転倒を書け．また転倒数を求めよ.
解答：

- **偶順列**：転倒数が偶数の順列.
- **奇順列**：転倒数が奇数の順列.
- 順列 $(p_1 p_2 \ldots p_n)$ に対して，その**符号**と呼ばれるものを次のように定義する.

$$\epsilon(p_1 p_2 \ldots p_n) = \begin{cases} \ \ 1 & ((p_1 p_2 \ldots p_n) \text{ は偶順列}) \\ -1 & ((p_1 p_2 \ldots p_n) \text{ は奇順列}) \end{cases}$$

例 4-3：(3412) と (3142) の符号を求めよ.
解答：

> 定理 4-1
> $\epsilon(p_1 \ldots p_i \ldots p_j \ldots p_n) = -\epsilon(p_1 \ldots p_j \ldots p_i \ldots p_n)$

注意：どの 2 数の入れ替えでも符号が変わる（教科書 P24 定理 2.1 は隣同士の入れ替え）.

行列式の定義

n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して，A の行列式 $|A|$ を次のように定義する.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \epsilon(p_1 p_2 \ldots p_n) a_{1p_1} a_{2p_2} \ldots a_{np_n}$$

ここで $\sum$ は全ての順列に対する和を意味するものとする．$|A|$ を $\det\,(A)$ と書くこともある.

- 2 次と 3 次の行列式に対しては，覚えやすい計算方法がある．

2 次の行列式の計算方法：

3 次の行列式の計算方法（**サラスの方法**）：

例 4-4：$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$ の値を求めよ．

解答：

- $|A| = |\,{}^tA|$ となることが知られている．

4 次以上の行列式に対しては，次の公式が役に立つ．

- $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$
- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

例 4-5：次の行列式の値を求めよ．(1) $\begin{vmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & a & b \\ f & a & 0 & c \\ g & b & c & 0 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$

解答：