

数学 1 及び演習 ノート 05

2.2 行列式の計算方法

(I), (II) 多重線形性

$$(I) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$(II) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} + a'_{i1} & a_{i2} + a'_{i2} & \cdots & a_{in} + a'_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例 5-1 :

$$(I) \text{ の例 : } \begin{vmatrix} 15 & 20 & -30 \\ 9 & 16 & 12 \\ 18 & 24 & 6 \end{vmatrix}$$

$$(II) \text{ の例 : } \begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 9 & 16 & 12 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

(III) 交代性

$$(III) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\text{例 5-2 : } \begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 6 & 12 & 18 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 18 \\ 3 & 4 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\text{例 5-3 : } \begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 3 & 4 & -6 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \text{ の値を求めよ .}$$

解答 :

(IV) 2 つの行が一致 $\Rightarrow$ 行列式の値は 0

(V) ある行に他の行の定数倍を加えても行列式の値は変わらない .

(V) の略証 ($n = 3$) :

例 5-4 : 次の行列式の値を求めよ .

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & 9 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & 1 \\ -1 & 3 & 9 & 2 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & 2a+b+c & b \\ c & a & a+2b+c \end{vmatrix}$$

解答 :

- (I) ~ (V) と同様なことが列に対しても成り立つ .
- 行と列の変形 (I) ~ (V) を用いて , ノート 4 の最後の公式が使える形に変形するのが行列式の計算の基本方針 .
- $|AB| = |A||B|$ となることが知られている .