

数学 1 及び演習 ノート 06

2.3 行列式の展開

余因子

n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対し、第 i 行と第 j 列を取り除いて得られる行列を

$$D_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

部分を除く

とおいたとき、 $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ を (i, j) **余因子** という。

例 6-1: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ に対し、 $(1, 2)$ 余因子 A_{12} を求めよ。

解答：

行列式の展開

- n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ の**余因子展開**の公式：

i 行についての展開： $|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$

j 列についての展開： $|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$

例 6-2: $n = 3$ のときの 1 行目についての展開 $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$ の証明：

例 6-3 : $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

解答 :

別解 :