

数学1及び演習 ノート 07

2.4 逆行列

余因子行列

$\tilde{A}$ を行列 A の (i, j) 余因子を (i, j) 成分とする行列とすると、 ${}^t\tilde{A}$ を行列 A の**余因子行列**という.

例 7-1: 3 次の場合は, ${}^t\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$

定理 7-1 (教科書 P.39 定理 2.7): ${}^t\tilde{A}A = A {}^t\tilde{A} = |A|E$

- 定理 7-1 より, $|A| \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} {}^t\tilde{A}$
- A が正則 $\Rightarrow |A^{-1}| = |A|^{-1}$, 特に $|A| \neq 0$

例 7-2: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し, $ad - bc \neq 0$ のとき, $A^{-1} = \frac{1}{|A|} {}^t\tilde{A}$ を用いて逆行列を求めよ.

解答:

例 7-3: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ に対し, $A^{-1} = \frac{1}{|A|} {}^t\tilde{A}$ を用いて逆行列を求めよ.

解答:

2.5 連立1次方程式

連立1次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

に対し,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

とおくと, 連立1次方程式は $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ と表すことができる. ここで A をこの方程式の**係数行列**という. $|A| \neq 0$ のとき, この連立方程式は次の形で与えられるただ1組の解をもつ.

クラメルの公式: $1 \leq j \leq n$ に対し,

$$x_j = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

第 j 列

例 7-4: $n = 3$ の場合で考える.

例 7-5: $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 9 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -7 \end{cases}$ をクラメルの公式を用いて解け.

解答: