数学 1 及び演習　ノート 9

3　連立 1 次方程式

3.1　行列の基本変形

連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

に対し，行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

をそれぞれ，与えられた連立 1 次方程式の**係数行列**，**拡大係数行列**という．拡大係数行列に行基本変形と呼ばれる行列の変形を行っていくことにより，解を求めることができる．

行基本変形：次の 3 つの行列の変形を**行基本変形**という．

(RI) ある行を定数倍（$\neq 0$）する．

(RII) 2 つの行を入れ替える．

(RIII) ある行に他の行の定数倍を加える．

例 9-1：次の連立 1 次方程式を，拡大係数行列の行基本変形によって解け．

$$\begin{cases} -x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & -3 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -2 \end{cases}$$

解答：

基本行列：次の 3 つの正方行列を**基本行列**という.

(I) $P_i(c) =$

(II) $P_{ij} =$

(III) $P_{ij}(c) =$

定理 9-1 (教科書 P.50 定理 3.1) (I) $P_i(c)A$, (II) $P_{ij}A$, (III) $P_{ij}(c)A$ は, それぞれ行列 A に行基本変形 (RI), (RII), (RIII) を行ったことに対応している.

- 基本行列は正則．逆行列は，$P_i(c)^{-1} = P_i(c^{-1})$, $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$, $P_{ij}(c)^{-1} = P_{ij}(-c)$.
  $\because$

- 基本行列の逆行列も基本行列.

列基本変形：次の 3 つの行列の変形を**列基本変形**という.

(SI) ある列を定数倍（$\neq 0$）する.

(SII) 2 つの列を入れ替える.

(SIII) ある列に他の列の定数倍を加える.

- 行基本変形，列基本変形を総称して，基本変形という.
- 何回かの基本変形で行列 A を行列 B に変形できるとき，$A \to B$ と書く.
- (I) $AP_i(c)$, (II) AP_{ij}, (III) $AP_{ij}(c)$ はそれぞれ行列 A に列基本変形 (SI), (SII), (SIII) を行ったことに対応している.