

数学 1 及び演習 ノート 10

0.1 行列の階数

行列 A に行と列の基本変形を、0 ではない要素ができる限り少なくなるまで繰り返し行った行列を A' とする。このとき、 A' の 0 ではない要素の個数を A の階数またはランクといい、 $\text{rank } A$ または $r(A)$ で表す。 $\text{rank } A$ は基本変形の仕方によらず行列 A に対して 1 通りに決まることが知られている。

例 10-1：次の行列の階数を求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & 5 & -8 \\ -3 & -9 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

解答：

階段行列：次の形の行列を r 階の階段行列という。

例 10-2：

- $A \rightarrow r$ 階の階段行列のとき、 $r = \text{rank } A$

定理 10-2 (教科書 P.51 定理 3.2)：何回かの行基本変形でどの行列も階段行列に変形できる。

